Serie 14

Abgabe: Keine.

1. Gibt es einen Diffeomorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$? Gibt es einen holomorphen Diffeomorphismus $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$?

2. (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann rational ist, wenn f keine wesentliche Singularität in ∞ hat.

   (b) Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die Definitionsgebiete sowie ob sie meromorph und/oder rational sind:

   i. $f_1(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$,
   ii. $f_2(z) = \frac{1}{\sin(z)}$,
   iii. $f_3(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$,
   iv. $f_4(z) = \frac{z^3-7z^2+12z}{(z^2+4)^3}$,
   v. $f_5(z) = \frac{z^3-1}{z^2-2}$.

3. Sei $m \geq 1/2$. Wir definieren die drei Punkte $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ und $C = (\cos(\pi/m), \sin(\pi/m))$ in der Ebene. Sie spannen einen Kreissektor ABC des Einheitskreises auf, dessen Inneres wir mit $\mathrm{int}(ABC)$ bezeichnen, wobei der Kreisbogen von B nach C im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde. Zeigen Sie, dass

$$f : \mathrm{int}(ABC) \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2$$

   ein holomorpher Diffeomorphismus ist.

4. (a) Sei $\varnothing \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ mit Ω offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so dass $z \in \Omega \iff \bar{z} \in \Omega$ gilt. Zeigen Sie, dass $\Omega \cap \mathbb{R}$ einen Punkt z_0 enthält.

   (b) Sei nun $f : \Omega \to \mathbb{D}$ der eindeutige holomorphe Diffeomorphismus mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$. Zeigen Sie, dass $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ gilt.

   (c) Was lässt sich weiter über f sagen, wenn Ω bezüglich z_0 symmetrisch (d.h. $z_0+z \in \Omega \iff z_0-z \in \Omega$) ist? Finden Sie eine Funktionalgleichung für f!

5. Sei Ω_1 die rechte Halbebene und $\Omega_2 := \Omega_1 \cap \mathbb{H}$ der erste Quadrant der komplexen Zahlenebene. Sei weiter Ω_3 der Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-1,1)\}$ und $\Omega_4 := \Omega_3 \cap \mathbb{H}$. Schliesslich sei $\Omega_5 := \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Wir definieren die Funktionen f_i für $i = 1,2,3,4,5$, die jeweils Ω_i auf $\mathbb{D}$ abbilden, wiefolgt:

$$f_1(z) := \frac{z-1}{z+1}, \quad f_2(z) := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z^2-i}{z^2+i}, \quad f_3(z) := \frac{e^{\pi z/2}-1}{e^{\pi z/2}+1},$$

$$f_4(z) := \frac{e^{\pi z}-i}{e^{\pi z}+i}, \quad f_5(z) := \frac{1}{i} \frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}.$$

Zeigen Sie, dass diese 5 Abbildungen holomorphe Diffeomorphismen sind. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz gibt es dann für jede dieser Funktionen genau einen Punkt z_i mit $f_i(z_i) = 0$. Bestimmen Sie jeweils z_i und die Ableitung in diesen Punkten. Zeigen Sie weiter, dass das folgende Diagramm bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl von Betrag 1 kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
& \Omega_2 \arrow[dl, "f_1|_{\Omega_2}"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
\Omega_5 \arrow[rr, "f_5"] & & \mathbb{D} \\
& \Omega_4 \arrow[ul, "f_3|_{\Omega_4}"] \arrow[ur, "f_4"'] &
\end{tikzcd}$$