Musterlösung Serie 2

1. (a) Die Äquivalenz $x \leq M \Leftrightarrow -M \leq -x$ bedeutet, dass $-M$ genau dann eine untere Schranke für $-A$ ist, falls M eine obere Schranke für A ist. Insbesondere ist $M' = \sup A$ eine obere Schranke für A und es folgt dann mit der Eigenschaft des Infimums

$$\inf(-A) \geq -M' = -\sup A.$$

Entsprechend ist $-M'' = \inf(-A)$ eine untere Schranke von $-A$ und es folgt aus der Eigenschaft des Supremums:

$$\sup(A) \leq M'' = -\inf(-A).$$

Beide Ungleichungen liefern zusammen die Behauptung $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(b) Nach Voraussetzung gilt $\inf(A) > 0$, also insbesondere $x > 0$ für alle $x \in A$. Für $M > 0$ und $x \in A$ haben wir dann die Äquivalent $x \leq M \Leftrightarrow M^{-1} \leq x^{-1}$. Ausgehend von dieser Äquivalenz, verläuft der Beweis völlig analog zu Teil (a).

2. Da M gleich mächtig ist wie $\mathbb{R}$ existiert eine bijektive Abbildungen $f : \mathbb{R} \to M$. Da A abzählbar ist, ist A entweder eine endliche Menge oder gleich mächtig wie $\mathbb{N}$. Falls A endlich ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $g_1 : \{1, 2, \ldots, m\} \to A$. Dann definieren wir eine Abbildung $h_1 : \mathbb{R} \to M \cup A$ wie folgt:

$$h_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \\ f(x-m) & \text{falls } x \in \mathbb{N} \text{ und } x > m \\ g_1(x) & \text{falls } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \leq m \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass h_1 eine bijektive Abbildung ist und somit $M \cup A$ gleich mächtig ist wie $\mathbb{R}$.

Falls A eine unendliche abzählbare Menge ist, so existiert eine bijektive Abbildung $g_2 : \mathbb{N} \to A$. Dann definieren wir eine Abbildung $h_2 : \mathbb{R} \to M \cup A$ wie folgt:

$$h_2(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \\ f(x/2) & \text{falls } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist eine gerade Zahl} \\ g\left((x+1)/2\right) & \text{falls } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist eine ungerade Zahl} \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass h_2 bijektiv ist und somit ist $M \cup A$ auch in diesem Fall gleich mächtig ist wie $\mathbb{R}$.

3. (a) (i) Da die Definitionsmenge mehr Elemente enthält als die Wertemenge, kann es surjektive, aber keine injektiven Abbildungen geben.

(ii) Zunächst berechnet man

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\} = \{1, 3\} \cup \{0, 1\} 0 \{0, 1, 3\}$$

und

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Da die Definitionsmenge weniger Elemente enthält als die Wertemenge, kann es injektive, aber keine surjektiven Abbildungen geben.

(b) (i) Kein Graph einer Funktion.
(ii) Graph einer bijektiven Funktion.
(iii) Graph einer weder surjektiven, noch injektiven Funktion.
(iv) Graph einer injektiven, aber nicht surjektiven Funktion.
(v) Graph einer surjektiven, aber nicht injektiven Funktion.
(vi) Graph einer nicht injektiven Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}$, deren Wertebereich aber nicht in $[c, d]$ enthalten ist.

4. (a) Die Formel stimmt für a_0 und a_1:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4} = 1$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Formel für a_n und a_{n+1} gültig ist. Wir müssen dann zeigen, dass die Formel für a_{n+2}. Mit der Rekursionsformel gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+3} \right)
\end{aligned}$$

(b) Mit der Abkürzung $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ und der expliziten Formel aus Teil (a), berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - \alpha^{-1}(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-1}}{\alpha^{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \phi \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left| \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{-1}}{\alpha^{n+1} - 1} - 1 \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left| \frac{1 - \alpha^{-1}}{\alpha^{n+1} - 1} \right| = \frac{\sqrt{5}}{|\alpha^{n+1} - 1|}$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \phi\right| \leq \frac{\sqrt{5}}{|\alpha|^{n+1} - 1}.$$

Nun gilt:

$$\frac{\sqrt{5}}{|\alpha|^{n+1} - 1} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\epsilon} + 1 \leq |\alpha|^{n+1} \Leftrightarrow \frac{\log\left(\frac{\sqrt{5}}{\epsilon} + 1\right)}{\log(|\alpha|)} - 1 \leq n.$$

Setzen wir $\epsilon = 0.01$ in den letzen Ausdruck ein, so erhalten wir erhalten $n \geq 4.625...$ und somit können wir $n_0 = 5$ wählen.

5. (a) Man erhält die Formel aus dem binomischen Lehrsatz und durch Vertauschen der Summationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} &= \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{l=1}^{n} \binom{p+1}{k} l^{p+1-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} l^{p+1-k} \cdot 1^k \\
&= \sum_{l=1}^{n} (l+1)^{p+1} - l^{p+1} \\
&= (n+1)^{p+1} - 1
\end{aligned}$$

(b) Wir wenden induktiv die Formel aus (a) an:

$p = 0$: Wir erhalten $S_n^0 = (n+1)^1 - 1 = n$.

$p = 1$: Wir erhalten $2S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^2 - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_n^1 &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - S_n^0\right) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 - 2n - n) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$p = 2$: Wir erhalten $3S_n^2 + 3S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^3 - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_n^2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3S_n^1 - S_n^0\right) \\
&= \frac{1}{6}(2n^3 - 6n^2 - 6n - 1 + 3(n^2 - n) - n) = \\
&= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 - 8n - 1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

$p = 3$: Wir erhalten $4S_n^3 + 6S_n^2 + 4S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^4 - 1$ und folglich

$$\begin{aligned}
S_n^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - 6S_n^2 - 4S_n^1 - S_n^0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Beachte, dass $S_n^3 = (S_n^1)^2$. Wie kann man das direkt zeigen?

(c) Die Rechnungen aus (b) legen die Vermutung nahe, dass die höchste vorkommende Potenz in S_n^p die Ordnung $p+1$ hat mit Koeffizienten $\frac{1}{p+1}$. Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion. Die Formel aus (a) besagt:

$$\binom{p+1}{1} S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Für alle $q < p$ ist S_n^q nach Induktionsannahme ein Polynom vom Grad kleiner gleich $q+1$. Insbesondere ist dann

$$f(n) := \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} S_n^1 + S_n^0$$

ein Polynom vom Grad kleiner gleich p. Wir erhalten also

$$(p+1)S_n^p = (n+1)^{p+1} - 1 - f(n) = n^{p+1} + (p+1)n^p + \ldots + (p+1)n - f(n)$$

und es folgt direkt die Behauptung.

6. (a) Wähle $m \in \mathbb{N}$ sodass $2^m > n$ gilt. Dann schätzen wir ab:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k^2} = \sum_{l=0}^{m-1} \left(\sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{k^2} \right) \leq \sum_{l=0}^{m-1} 2^l \frac{1}{(2^l)^2} \leq \sum_{l=0}^{m-1} 2^{-l} = 2 - 2^{1-m} < 2$$

Der letzte Schritt folgt aus der Formel für geometrische Reihen (oder alternativ mit einem einfachen Induktionsargument).

(b) Durch ausmultiplizieren erhält man

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k a_l$$

Für $k \neq l$ erhalten die beiden Terme $a_k a_l = a_l a_k$ in der Summe und wir könne beide durch den Term $2a_k a_l$, wobei $l < k$ ersetzen. Diese Überlegung liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k a_l &= 2 \sum_{0 \leq l < k \leq n} a_k a_l + \sum_{k=0}^{l} a_k^2 = 2 \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} a_k a_l - \sum_{k=0}^{l} a_k^2 \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_k a_l - \sum_{k=0}^{l} a_k^2 \end{aligned}$$

Fasst man beide Gleichungen zusammen, folgt die Behauptung.

(c) Betrachte die Polynome

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \\ g(x) &= (1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)^2 = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \binom{n}{k-l} \right) x^k \end{aligned}$$

In der letzen Gleichung verwenden wir die Konvention $\binom{n}{l} = 0$ für $l > n$. Da $f(x) = g(x)$ gilt, müssen alle Koeffizienten der Polynome gleich sein. Ein Vergleich der Koeffizienten von x^n liefern die Behauptung

$$\binom{2n}{n} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \binom{n}{n-l}.$$

Alternativ, kann man die Aufgabe auch mit elementaren kombinatorischen Überlegungen lösen. Wie?