Lineare Algebra

D-MATH, HS 2014

Prof. Richard Pink

Serie 8

1. Zeige: Das folgende Diagramm kommutiert insgesamt genau dann, wenn alle 6 Teilquadrate kommutieren.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\
B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] \arrow[d, "g_3"] & B_4 \arrow[d, "g_4"] \\
C_1 \arrow[r, "c_1"] & C_2 \arrow[r, "c_2"] & C_3 \arrow[r, "c_3"] & C_4
\end{tikzcd}$$

2. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ die Identität

(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(vii) $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$

(viii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f$ die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(ix) $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y) \mapsto f_{x,y}$, wobei $f_{x,y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

3. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung definiert über $\mathbb{Q}$ durch Linksmultiplikation mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten.

a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} F : P_n(\mathbb{R}) &\to P_n(\mathbb{R}) \\ p &\mapsto p'' + p' \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

b) Bestimme die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \dots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

5. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a) Zeige, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von

(i) f bezüglich der Basen a, b.

(ii) g bezüglich der Basen b, c.

(iii) $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

6. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \longrightarrow V$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist. Zeige:

a) Für jede Projektion P gilt

$$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei beliebige Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \longrightarrow V$, sodass gilt:

$$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

7. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeige:

a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.

b) Es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim(\operatorname{Bild}(f) \cap W')\,.$$

Abgabetermin:
Montag, 17. November