Mathematik I
Herbstsemester 2014
Kapitel 6: Potenzreihen

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/mathematik1_BIOL

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/~farkas

Folgen und Reihen

- Folgen bisher: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$
  z. B.:

$$2, 4, 6, 8, \ldots \quad a_n = 2n, \cdots$$
$$\frac{1}{3}, (\frac{1}{3})^2, (\frac{1}{3})^3, \ldots, (\frac{1}{3})^n \ldots \quad a_n = (\frac{1}{3})^n$$

Gegeben eine Folge $(a_n)_n$, kann man eine neue Folge bilden:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

(z. B.: falls $a_n = 2n$

$\Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2n$)

Man schreibt auch:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (\Sigma\text{-Notation}).$$

Definition

- Gegeben sei eine Folge $(a_n)_n$.
- Die Folge $(s_n)_n$ *zusammen* mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ (falls er existiert) heisst Reihe.
- Notation:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bezeichnung:
a_n ist das n-te Reihenglied
s_n heisst Partialsumme (der Ordnung n)

Konvergenz und Divergenz von Reihen

- Eine Reihe heisst konvergent, falls

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}.$$

- Eine Reihe heisst divergent,

$$\text{falls } \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \{\pm\infty\}$$

oder

$$\text{falls } \nexists \lim_{n\to\infty} s_n$$

Beispiel 1:

$$a_n = 2n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Betrachte die Partialsumme:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot n \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2} = n \cdot (n+1) \\ &= n^2 + n \end{aligned}$$

Beachte:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Somit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n) = +\infty$$

Beispiel 2:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \qquad q \in (0,1)$$
- Reihe bilden

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = q^1 + q^2 + \ldots + q^n \quad \Big| \cdot q$$

$$q \cdot s_n = \underbrace{q^2 + q^3 + \ldots + q^n}_{s_n - q} + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow q \cdot s_n = (s_n - q) + q^{n+1}$$

$$(q-1)s_n = -q + q^{n+1} \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$(1-q)s_n = q - q^{n+1} \Rightarrow \boxed{s_n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}}$$

- Grenzwert bilden

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q - q^{n+1}}{1-q}; \text{ aber } \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \quad q \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}$$

- $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}} \text{ konvergent}$$

$$\text{für } q = \frac{1}{3}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\to \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

- **Satz:**

$$\text{Sei } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent, dann gilt } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- **Korollar:**

$$\text{falls } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

- **Bemerkung:**
  die obige Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe.

Beispiele

- $a_n = 2n$
  klar: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$, somit ist $\sum_{n=1}^{\infty}(2n)$ divergent.
- $a_n = q^n$ mit $q = \frac{1}{3}$,
  klar: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ wissen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ ist konvergent.
- $a_n = \frac{1}{n}$
  wissen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

- **Fazit:** Auch wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sowohl divergent als auch konvergent sein, beides ist möglich!!!
- **Praktischer Hinweis:**
  Um die Konvergenz einer Reihe $\sum a_n$ zu untersuchen, wird in einem ersten Schritt der Grenzwert a_n untersucht.

$$1)\ \text{Falls} \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

$$2)\ \text{Falls} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \textit{alles} \text{ ist möglich}$$

Somit stellen wir weitere Kriterien vor, um im Fall 2) die Entscheidung zu ermöglichen!

- **1) Notwendiges Kriterium für Konvergenz ist:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- **2) Vergleich mit einer konvergenten Reihe:**
  Seien

$$0 \le a_n \le c_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist auch konvergent}$$

- Bemerkung: Wir brauchen konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ damit wir dieses Kriterium anwenden können.
- Gute Beispiele für konvergente Reihen:
  1. $$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ konvergent für } q \in (-1,1)$$
  2. Die (verallgemeinerte) harmonische Reihe:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergent wenn } \alpha > 1$$

Beispiel 1

- $$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

  a) $a_n \to 0 \Rightarrow$ Kriterium 1 ist erfüllt, die Reihe kann konvergent sein, muss aber nicht.

  b) $\underbrace{(n+1)}_{>n}\underbrace{(n+2)}_{>n} > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$

  $\Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq c_n = \frac{1}{n^2}$

  Aber: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \infty$ ist konvergent.

Beispiel 2:

- $$a_n = (0,7)^n \cdot \underbrace{|\sin n|}_{\leq 1}$$

- **Lösung:**

$$0 \leq a_n \leq c_n = (0,7)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0,7)^n < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.}$$

3. Kriterium: Quotientenkriterium

- Satz:

$$0 \le a_n; \quad \text{falls der Grenzwert existiert:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = j$$

$$j < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ ist konvergent}$$

$$j > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ ist divergent}$$

- **Bemerkung:** Falls $j = 1$ ist keine Aussage möglich:
  es gibt Reihen für die $j = 1$ gilt, welche entweder konvergent oder divergent sind.

Beispiel

- $$a_n = \frac{1}{(2n)!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$
$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)(2n)$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{[2(n+1)]! = (2n+2)!}}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n-1)(2n)}}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.}$$

Bemerkung:

- Vergleich- oder Quotientenkriteritum, je nach Erfahrung oder Situation!

Bisher wurden insbesondere Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ betrachtet.

Definition:

Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot b_n$ mit $b_n > 0$

heisst *alternierende Reihe.*

(d. h. die Vorzeichen von $a_n = (-1)^{n+1} \cdot b_n$ alternieren).

Beispiel:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{a_n} \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{n} = b_n$$

$$a_1 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{1} = 1$$
$$a_2 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$a_4 = (-1)^5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

4. Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Satz:

Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot b_n \qquad \text{also} \quad a_n=(-1)^{n+1}b_n;\ b_n>0.$$

Falls

a) $b_1 > b_2 > \ldots b_n > \ldots$ (die Folge $(b_n)_n$ ist fallend)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

dann

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \text{ ist konvergent.}$$

Definition:
Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

heisst Potenzreihe d.h. a_n hat eine spezielle Form.
$a_n = c_n x^n$
$c_n =$ Koeffizient der Potenzreihe.

Bemerkungen:

1. die Konvergenz der Reihe hängt von x ab ($x \in \mathbb{R}$).
2. Manchmal bezeichnet man auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ als eine Potenzreihe (x_0 fest).
3. Manchmal sind die Potenzreihen auch für $n = 0$ zu untersuchen d. h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$
4. Alle bisherigen Konvergenzkriteriterien für Reihen bleiben gültig für Potenzreihen.

Beispiel:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad a_n = \frac{1}{n!} x^n; \qquad c_n = \frac{1}{n!}$$

$\Rightarrow$ Kriterium 3 $\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{1}{n+1} x \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n!(n+1)$$

- $\Rightarrow$ für alle $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$

  d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ konvergent.

  $$f : x \mapsto \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}_{f(x)} \Rightarrow (f(x) = e^x)$$

Potenzreihen von Funktionen:

- Gegeben: $x \mapsto f(x)$
  Frage:
  $$f \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
  oder
  $$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Kanonischer Weg: sei f in x_0 unendlich oft differenzierbar.

- $f \longmapsto c_0 = f(x_0)$
- $c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$
- $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$
- $c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$
- für alle $n \geq 0 : c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
- x_0 ist fest; Entwicklungspunkt.
- Betrachte die Potenzreihe (für f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Beispiel:

- $$f(x) = e^x; x_0 = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-0)^n$$

$$c_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1!} = 1$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2!} = \frac{1}{2}$$

- **allgemein:**

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$f \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

Definition:

- Gegeben $x \mapsto f(x)$.
  Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ die f zugeordnet wird mit
  $$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$
  heisst Taylor-Reihe von f (um den Entwicklungspunkt x_0.)
- Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ konvergent ist, heisst **Konvergenzbereich** der Reihe.

Satz 1:

- Gegeben die vorherige Potenzreihe:
  $\Rightarrow$ Es existiert ein $r > 0$ (r heisst Konvergenzradius)
  a) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x_0 - r < r < x_0 + r$ konvergiert die Reihe
  b) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < x_0 - r$ oder $x > x_0 + r$ divergiert die Reihe.

Bemerkung:

falls $x = x_0 - r$ oder $x = x_0 + r$ sind keine Aussagen möglich.

Satz 2:
Bestimmen des Konvergenzradius:
r lässt sich wie folgt berechnen:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Schritte / Allgemein:

- Bestimme r mit Satz 2
- Wende Satz 1 an
- Untersuche $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ für $x = x_0 - r$ und $x = x_0 + r$

Beispiel 1:

- Bestimmen Sie den Konvergenzradius und untersuchen Sie folgende Potenzreihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (x-0)^n$$

$x_0 = 0 \qquad c_n = 1$ für alle n

$r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$

- Satz 1 anwenden:
  Für $0-1 < x < 0+1$ ist die Reihe konvergent.
  Für $x < -1$ und $x > 1$ ist die Reihe divergent. Sei nun $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty \Rightarrow \text{ für } x = 1 \text{ ist die Reihe divergent}$$

- Fortsetzung
  Sei nun $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n =$$

$$s_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

$$s_2 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1$$

$$s_2 = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

$$s_n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 0; n \text{ ungerade} \\ 1; n \text{ gerade} \end{cases}$$

s_n ist also nicht konvergent. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x = -1$ ist divergent.

Fazit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ist konvergent genau dann, wenn } -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow \text{ vergleiche mit } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad q \in (-1, 1)$$

Beispiel 2:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

  $x_0 = 0$
  $c_n = \frac{1}{n!}$

  $$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

- **Bemerkung:**

  für alle x gibt es ein $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ später: $f(x) = e^x$

Beispiel 3:

- $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{c_n}\cdot(x-1)^n$$

  $x_0 = 1$
  $c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

  $$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|}{\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \Rightarrow r = 1$$

  $\Rightarrow$ Für $1-1 < x < 1+1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ ist die Reihe konvergent

  $\Rightarrow$ Für $x < 0$ oder $x > 2$ ist die Reihe divergent.

- Fortsetzung

$$x=0: \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(0-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergent } \left(\sum\frac{1}{n^{\alpha}}\text{konvergent wenn } \alpha>1\right)$$

$$x=2: \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(2-1)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\Leftrightarrow \text{ konvergent gemäss } \sum(-1)^{n+1}b_n$$

$$\text{mit } b_n=\frac{1}{n}\rightarrow b_1>b_2>\ldots>b_n\ldots\rightarrow\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$\Rightarrow$ Reihe ist konvergent für $x\in(0,2]$

- **Frage**: Wann gilt $=$ in
  $f(x) \sim c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots \quad ?$
  1. Gegeben f und $x_0 \in D_f$:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f(x_0) \\
c_1 &= \frac{f'(x_0)}{1!} \\
&\vdots \\
c_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \ldots
\end{aligned}
$$

  2. Betrachte die Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt x_0, also

$$
\underbrace{f(x_0)}_{c_0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{c_1}(x-x_0)^1 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{c_2}(x-x_0)^2 + \ldots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{c_n}(x-x_0)^n + \ldots
$$

- Wende Konvergenzkriterien für Potenzreihen an
(es existiert ein $r > 0, r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ so dass für
$x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ die Reihe konvergent
und für $x < x_0 - r$ oder $x > x_0 + r$ divergent ist)

- **Beispiel 1:**

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) \quad x_0 = 0$$

Wir wissen: die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$; somit ist sie konvergent, für $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \begin{cases} s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ -1 < x < 1 : \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-x} \end{cases}$$

Bemerkung:
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ hat eine Darstellung als Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Diese Reihe **ist** die Taylor-Reihe von f um 0: man rechnet leicht nach, dass $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$ gilt.

Natürlich ist $f(x) = \frac{1}{1-x}$ definiert für alle $x \neq 1$.
Jedoch für $x < -1$ oder $x > 0$ ist die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

nicht möglich.

Beispiel 2:

- Beweisen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ eine Entwicklung in einer Potenzreihe wie folgt hat:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

- 1. Gegeben f und $x_0 = 0$. Bestimme die Taylorkoeffizienten.

$$c_0 = f(0) = e^0 = 1$$

$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1!} = \frac{1}{1!}$$

$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

  2. Betrachte die Taylor-Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

Untersuchung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist konvergent für alle $x \in (-\infty, \infty)$.

somit ist $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

- **Fazit:** Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \quad \rightarrow \boxed{x = 1}$
  $e^1 \simeq 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1^4 + \frac{1}{5!} \cdot 1^5 \simeq \underline{2,716}$
  Fehler der Abschätzung $= |e - 2,716| \approx 0,002$.
  Je höher n desto genauer die Approximation.

- **Bemerkung:**

Ersetze $x \longmapsto -x$:

$$e^{-x} = 1 + \frac{1}{1!}(-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(-x)^n + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}(-1)^n}_{c_n} \cdot x^n$$

Ersetze $x \longmapsto x^2$:

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(x^2) + \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x^2)^n + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

- **Bemerkung:**
  Bisherige Entwicklung um $x_0 = 0$.
- **Beispiel:**
  $f(x) = \ln(x)$ (definiert nur für $x > 0$).
  Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f um $x_0 = 1$

- **Lösung:**
  die Taylor-Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = \ln x & f(1) = \ln 1 = 0 & c_0 = 0 \\
f'(x) = \dfrac{1}{x} & f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1 & c_1 = \dfrac{f'(1)}{1!} = \dfrac{1}{1} = 1 \\
f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} & f''(1) = \dfrac{-1}{1^2} = -1 & c_2 = \dfrac{f''(1)}{2!} = \dfrac{-1}{2!} = -\dfrac{1}{2} \\
f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} & f'''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 & c_3 = \dfrac{f'''(1)}{3!} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\
f''''(x) = -\dfrac{2 \cdot 3}{x^4} & f''''(1) = \dfrac{-6}{1} = -6 & c_4 = \dfrac{f''''(1)}{4!} = -\dfrac{2 \cdot 3}{4!} = -\dfrac{1}{4}
\end{array}
$$

Somit: $c_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$

- Taylor-Reihe von $f(x) = \ln x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} (x-1)^n} \text{ Taylor-Reihe für den Logarithmus}$$

- **Bestimme den Konvergenzradius der Taylor-Reihe für den Logarithmus:**

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}}{(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Also:

- Für $1 - 1 < x < 1 + 1$, also für $0 < x < 2$ ist die Taylor-Reihe für den Logarithmus konvergent.
- Für $x > 2$ ist die Reihe divergent.

Noch zu untersuchen: Das Verhalten der Reihe für $x = 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (2-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist konvergent, weil sie eine

alternierende Reihe der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$

mit $b_n = \dfrac{1}{n}$ und $\begin{cases} b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$ ist

- **Fazit**

  Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n$ ist konvergent wenn $x \in (0,2]$

- Also gilt:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}(x-1)^n \quad \text{für } x \in (0,2]$$

- **Anwendung:**

$$\text{für } x = 2: \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\ln(2) \simeq (-1)^{-1} \cdot \frac{1}{1} + (-1)^{2-1} \cdot \frac{1}{2} + (-1)^{3-1} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^{4-1} \cdot \frac{1}{4} \ldots$$

- **Stammfunktion von** $e^{-x^2} = f(x)$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = -t^2$$

$$\Rightarrow e^{-t^2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-t^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-t^2\right)^n + \ldots$$

- **Somit**

$$\int_0^x e^{-t^2} dx \simeq \int_0^x (1 + \frac{1}{1!}\left(-t^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-t^2\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-t^2\right)^n) dt$$

$$= \left. t \right|_0^x + \frac{1}{1!} \cdot \left. \frac{-t^3}{3} \right|_0^x + \frac{1}{2!} \cdot \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^x + \ldots + \frac{1}{n!}(-1)^n \cdot \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^x$$

$$= x + \frac{1}{1!} \cdot \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1}{n}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Die Stammfunktion von e^{-x^2} darstellbar durch eine Reihe; längere Überlegungen notwendig.

- **Satz:**

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ konvergent.

- **Beweis:**

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \ln x \Big|_{x=1}^{x=\lambda} & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{x=1}^{x=\lambda} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} [\ln\lambda - \ln 1]\,; & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\lambda^{1-\alpha} - 1\right)\right]; & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \end{cases}$$