Aufgabe 8 (Radioaktiver Zerfall)

Radioaktives Material besteht aus Teilchen, die nach einer gewissen Zeit zerfallen und dabei Strahlung aussenden. Man kann zwar nicht sagen, welches Teilchen wann zerfällt, aber dafür weiß man, wieviele Teilchen durchschnittlich pro Zeiteinheit zerfallen. Generell gilt: je mehr radioaktive Teilchen vorhanden sind, desto mehr zerfallen auch pro Zeiteinheit. Wir bezeichnen im folgenden die Anzahl radioaktiver Teilchen einer Probe in Abhängigkeit der Zeit mit $n(t)$. Angenommen, 5 Tage nach dem Fund einer radioaktiven Probe hat man noch $N > 0$ radioaktive Teilchen und zum Zeitpunkt des Fundes zerfielen $n_0 > 0$ Teilchen pro Tag.

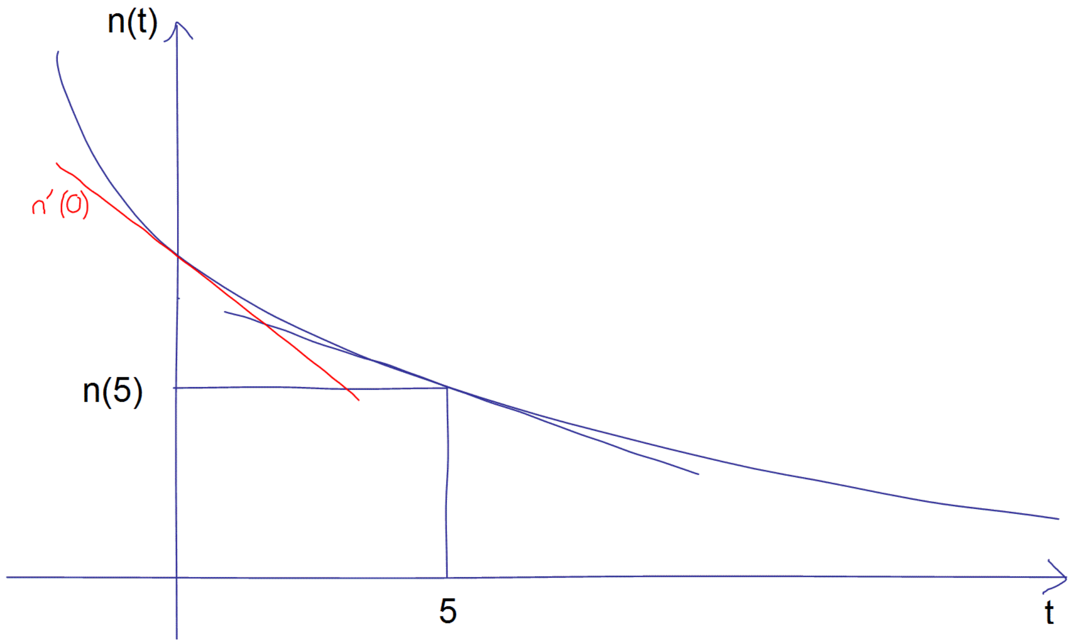
Variablen

$n(t)$ = Anzahl Teilchen zum Zeitpunkt t

n_0 = Teilchen, welche zum Zeitpunkt t=0 zerfielen

$N=n(5)$

a)



An der Stelle t=0 fällt die Funktion mit der Ableitung $n'(0)= -v_0$ und wenn t>0 ist die Funktion strikt monoton fallend.

b)

Die Zerfallsrate ist am Tag des Fundes am grössten. Das ergibt sich aus a), da die Ableitung der Funktion strikt monoton fallend ist.
Das heisst die maximal mögliche Anzahl Teilchen beim Fund beträgt $n(0) \leq n(5) + 5n_0$ mit der Annahme, dass an jedem Tag seit dem Fund gleich viele Teilchen wie am ersten Tag zerfallen wären.

c)

Die Zerfallsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist proportional zur Anzahl Teilchen zum Zeitpunkt t.

n'(t) = λn(t)   , λ= Proportionalitätsfaktor

d)

n'(t) = λn(t) $\rightarrow$ $\frac{dn(t)}{dt} = \lambda n(t)$ | *dt , /n(t)

$\frac{1}{n(t)} dn(t) = \lambda dt$ | Integrieren

$$\int \frac{1}{n(t)} dn(t) = \int \lambda dt$$

Daraus ergibt sich mit $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, dass

$\ln n(t) = \lambda t + C$ | exp()

$n(t) = e^{\lambda t + C} = e^{\lambda t} * e^{C}$

e^{C} ist eine Konstante, welche gerade der Anzahl Teilchen am Anfang entspricht.

Wir definieren für die Anzahl Teilchen am Anfang A=n(0)

Daraus folgt: $n(t) = A * e^{\lambda t}$

e)

Die Halbwertszeit t_h erfüllt folgende Bedingung:

$$\frac{1}{2} A = A * e^{\lambda t_h}$$

Wenn man das ganze nach t_h auflöst ergibt sich für die Halbwertszeit:

$$\frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = t_h$$