BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN /
SOFTWARETECHNOLOGIE
Dr. W. Hofschuster

Verifikationsnumerik I

WS 2016/17

Übungsblatt 2

Aufgabe 3: *Ausdrucksauswertung*

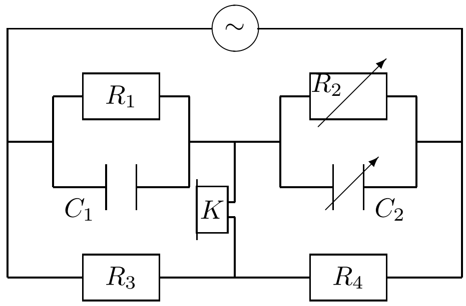
Schreiben Sie ein C–XSC-Programm, mit dem Sie eine untere und eine obere Schranke für den folgenden Ausdruck

$$\frac{(1-x)(y+3)}{(y+1)}, \quad y \neq -1$$

berechnen können. Verwenden Sie dazu die Operationen mit gerichteter Rundung von C–XSC (z.B. `addd()`, `addu()`, `subd()`, ...). Geben Sie die berechnete Unter- und Oberschranke jeweils dezimal und hexadezimal aus.

Testen Sie Ihr Programm mit den folgenden Eingabewerten für (x, y): $(2, 2)$, $(0, 2)$, $(-4, -4)$, $(6, -4)$, $(10^{20}, 10^{20})$, $(10^{20}, -10^{20})$, $(-10^{20}, -10^{20})$, $(10^{20}, -2)$, $(-10^{20}, -2)$.

Aufgabe 4: *Wechselstrom-Messbrücke*



Die unbekannte Kapazität C_1 und der unbekannte Widerstand R_1 können mit Hilfe der oben angegebenen Schaltung bestimmt werden. Man variiert dazu den Kondensator C_2 und den Widerstand R_2 solange, bis der Ton im Lautsprecher K ein Minimum erreicht oder verschwindet. In diesem Fall gilt

$$C_1 = R_4 \cdot C_2 / R_3, \quad R_1 = R_3 \cdot R_2 / R_4.$$

Für die Werte von R_3 und R_4 gilt nach den Herstellerangaben

$$9.9\Omega \leq R_3 \leq 10.1\Omega, \quad 7.5\Omega \leq R_4 \leq 7.6\Omega,$$

für C_2 und R_2 gelten, bedingt durch Messungenauigkeiten, folgende Abschätzungen

$$41.2\text{mF} \leq C_2 \leq 42.3\text{mF}, \quad 17.8\Omega \leq R_2 \leq 19.2\Omega.$$

Berechnen Sie von Hand die Kapazität C_1 und den Widerstand R_1. Geben Sie für beide Werte jeweils die größtmögliche untere und die kleinstmögliche obere Schranke an.

Bei einer neuen Messung werden die Werte $C_2 = 40\text{mF}$ und $R_2 = 20\Omega$ ermittelt. Führen Sie die Rechnung nun unter der Annahme durch, dass der maximale Fehler durch Messungenauigkeiten 4% betragen kann. Geben Sie Ihre Ergebnisse mit *2 Nachkommastellen (d.h. geeignet gerundet)* an.

Aufgabe 5: *Reelle Intervallrechnung*

Gegeben sind die Intervalle $[a] = [1, 2]$, $[b] = [-4, 1]$, $[c] = [3, 4]$.

a) Berechnen Sie per Hand:

α) $[a] + [b],\ [b] + [a]$

β) $[a] - [b],\ [b] - [a]$

γ) $[a] \cdot [b],\ [b] \cdot [a]$

δ) $[a]/[b],\ [b]/[a]$

ϵ) $([a] + [b]) + [c],\ [a] + ([b] + [c])$

ζ) $([a] \cdot [b]) \cdot [c],\ [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

η) $[a] \cdot ([b] + [c]),\ [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c],\ ([b] + [c]) \cdot [a]$

ϑ) $([a] + [b])[c],\ [a] \cdot [c] + [b] \cdot [c]$

b) Berechnen Sie $[a] - [a]$ und $\frac{[a]}{[a]}$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichungen $[a] + [x] = 0$ und $[a] \cdot [x] = 1$ unlösbar sind.

Aufgabe 6: *Fixpunktsatz von Brouwer*

a) Beweisen Sie den Fixpunktsatz von Brouwer für den Fall $n = 1$, d.h. für $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1$. Tip: Verwenden Sie hierzu den Zwischenwertsatz.

b) Im Fixpunktsatz von Brouwer werden als notwendige Voraussetzungen genannt, dass die betrachtete Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt (d.h. also beschränkt und abgeschlossen) und nicht-leer ist.

   Geben Sie nacheinander unter den Annahmen, dass V nicht konvex, nicht beschränkt oder nicht abgeschlossen ist, jeweils ein Beispiel für eine stetige Selbstabbildung von V an, die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 7: *Numerische Integration*

Beweisen Sie den in der Vorlesung angegebenen Verfahrensfehler

$$\left| \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \right|, \xi \in (a, b), f \in C^2[a, b]$$

bei der numerischen Integration mittels der Trapezregel.