Fragen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie

Lernkontrolle

Professor Staudacher SS 2015

Allgemeine Hinweise

Beachten Sie immer die Aufgabenstellung und formulieren Sie, wenn nötig, einen kurzen Antwortsatz.

Achten Sie auf eventuelle Fallunterscheidungen in Ihren Rechnungen. Es ist grundsätzlich besser, eine Fallunterscheidung zu identifizieren, selbst wenn man dann nicht alle Fälle lösen kann, als eine nötige Fallunterscheidung gar nicht zu erwähnen.

Skalarprodukte

Sei V ein $\mathbb{R}, \mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

1. Eigenschaften von Norm und SKP? Wie bekommt man eine Norm aus einem Skalarprodukt? Gilt auch die Umkehrung?
2. Was ist das Verfahren von Gram und Schmidt? Welche Vektorräume haben keine Orthonormalbasis?
3. Kann man über jedem $\mathbb{R}, \mathbb{C}$-VR ein SKP definieren? (Kann man ohne weiteres über jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum ein SKP definieren?)
4. Was sagt die CSU? Wie kann man kanonisch den Winkel zwischen zwei reellen Matrizen definieren? (Hinweis: Welche Menge aus Spaltenvektoren ist kanonisch isomorph zum Raum reeller Matrizen?)
5. Was sind orthogonale und unitäre Abbildungen? Eigenschaften? Hat jede orthogonale/unitäre (bzw. symmetrische/hermitesche) Matrix einen Eigenvektor in V?
6. Können diese auf eine kanonische Form gebracht werden? Wenn ja, wie?
7. Was ist die Hauptachsentransformation? Algorithmus zum Diagonalisieren von symmetrischen Matrizen über $\mathbb{K}$? Gibt es hierbei Bedingungen an $\mathbb{K}$?
8 Was sagt der Trägheitssatz von Sylvester?
9. Wie überprüfe ich Matrizen auf positive Definitheit? (Negative?)
10. Was hat Orthogonalität mit Abstandsmessung in Vektoräumen zu tun?

Endomorphismen und Eigenwerte

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

1. Was ist das charakteristische Polynom? Welchen Zusammenhang gibt es zu Eigenwerten?
2. Welche Eigenschaften hat das charakteristische Polynom über $\mathbb{C}$ bzw. über $\mathbb{R}$? Was bedeutet das für Matrizen und ihre Eigenwerte?
3. Wie sind der Eigenraum und verwandte Begriffe definiert?
4. Kann eine symmetrische Matrix einen Eigenwert haben, der nicht reell ist?
5. Was ist das Minimalpolynom? Was sagt Cayley-Hamilton?
6. Wie bekommt man ein Matrix auf Jordansche Normalform? Geht das immer? Wann? Wann nicht?
7. Was hat das Minimalpolynom mit der JNF zu tun?
8. Ist jede konvergierende Matrixpotenzreihe umschreibbar als eine, die nur endlich viele nichttriviale Summanden hat? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

9. Was sind Spuren, Determinanten? Nennen Sie Eigenschaften.
10. Welche Formeln/Möglichkeiten kennen Sie, um Determinanten von Matrizen zu berechnen?
11. Welche elementaren Matrixumformungen beeinflussen die Determinante nicht?
12. Jede n-lineare alternierende Form hat welche Beziehung zur Determinanten?
13. Sind normale Matrizen diagonalisierbar? Wenn ja, sind auch alle diagonalisierbaren Matrizen normal?
14. Wenn eine Matrix nicht diagonalisierbar ist, woran kann dies liegen? Wie kann man mindestens einen dieser Gründe leicht beheben und bekommt so zumindest eine abgeschwächte Version der Diagonalisierbarkeit?
15. Was wissen Sie über simultane Diagonalisierbarkeit? Warum genügt es nicht hierfür, dass die entsprechenden Matrizen kommutieren?

Dualräume

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$, $\dim W = m$, $U \subset V$ ein UVR, U^0 dessen Annullator.

1. Wie lässt sich V als eine Menge von Spaltenvektoren verstehen? (Haben diese jeweils notwendigerweise n Einträge?)
2. Gibt es in diesem Fall eine kanonische Interpretation des Dualraums als eine bestimmte Menge von Vektoren?
3. In dieser Interpretation, was ist die duale Abbildung A^* eines Endomorphismus A von V für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$?
4. Gilt $A^* = \overline{A}^T$ immer? Wenn nicht, wann nicht? Was haben die beiden miteinander zu tun?
5. Gibt es einen Zusammenhang zwischen Eigenschaften von A und denen von A^*? Was ist Bild(A^*), ker(A^*), rang(A^*), $\dim(U^0)$?
6. Was ist der Bidualraum zu V? (Zum eigenen Verständnis: V hat die gleiche Dimension wie V^*, also sind sie isomorph, und demnach auch isomorph zum Bidualraum. Warum unterscheidet man nun trotzdem zwischen V und V^*, allerdings nicht zwischen V^{**} und V?)
7. Wie bekommt man exakte Sequenzen von schon vorhandenen mithilfe von dualen Abbildungen? Was sind überhaupt exakte Sequenzen?

Tensorprodukte

1. Wie ist das Tensorprodukt definiert?
2. Was ist die universelle Eigenschaft? Kennen Sie Beispiele für Beweise, die Gebrauch von dieser machen?
3. Wie ist der Zusammenhang von Basen von Vektorräumen V, W und deren Tensorprodukt? Wie beweist man das?
4. Was können Sie über die Dimension des Tensorprodukts aussagen?

Analytische Geometrie

1. Was "bedeutet"die Notation (X, V_X, τ)? Wie ist der Zusammenhang zwischen τ und $\overrightarrow{pq}$?
2. Wie ist der Verbindungsraum definiert? Wie kann man $Y_1 \vee Y_2$ im Fall $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ für affine Unterräume $Y_1, Y_2 \subset X$ eines affinen Raumes X über einem Körper mit Charakteristik ungleich 2 darstellen?
3. Was für Dimensionsformeln kennen Sie? Welche Fallunterscheidungen sind notwendig?
4. Definitionen und Grundlagen aus der projektiven Geometrie. Hier sollten Sie sich selber überlegen, was aus diesem Gebiet wichtig ist.