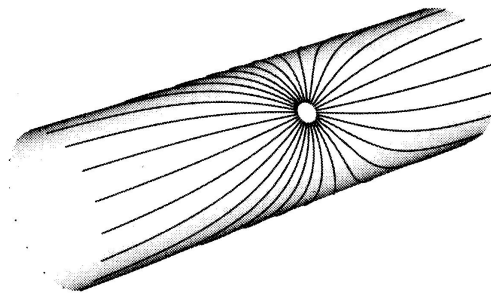


Universität Bielefeld

Fakultät für Physik

Masterarbeit im Studiengang  
Master of Science in Biophysik



**Untersuchung der Eignung von Self-assembled  
Monolayers (SAMs) für hochsensitive Kraftmessungen  
im Sub-100-Mikrometerbereich zur möglichen  
Bestimmung von Verletzungen des newtonschen  
Quadratabstandsgesetzes (*inverse square law violation*)**

eingereicht durch: Johannes Pehe

eingereicht am: 21.09.2011

Betreuer: Prof. Dr. Armin Götzhäuser und Prof. Dr. Dominik  
Schwarz

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Hintergrund</b>	<b>6</b>
2.1	Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	7
2.2	Newtons Gravitationsgesetz mit Zusatzdimensionen . . . . .	9
2.3	Kaluza-Klein-Teilchen . . . . .	12
2.4	Branen und Bulk . . . . .	13
2.5	Große Vereinheitlichte Theorie . . . . .	15
2.6	Hierarchieproblem . . . . .	16
2.7	Große Extradimensionen . . . . .	20
2.8	Parametrisierung der ISLV . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Andere Kräfte im Submillimeter- bis Submikrometerbereich</b>	<b>24</b>
3.1	Elektromagnetische Kräfte . . . . .	24
3.1.1	Elektrodynamik/-statik . . . . .	24
3.2	Magnetische Effekte . . . . .	24
3.3	Casimir-Kraft . . . . .	24
3.3.1	Elementare Herangehensweise an die Casimir-Kraft zwischen zwei parallelen Platten . . . . .	27
3.3.2	Fluktuationen und der physikalische Ursprung von Van-der-Waals-Kräften und der Casimirkraft . . . . .	30
3.3.3	Lifschitz-Theorie . . . . .	32
3.3.4	Rechnerische Ergebnisse für typische Dielektrika . . . . .	36
3.3.5	repulsiver Casimir-Effekt . . . . .	39
3.4	Van-der-Waals-Kräfte . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Bisher durchgeführte Experimente und resultierende Beschränkungen</b>	<b>41</b>
4.1	ISLV-Experimente bei Abständen größer 1 mm . . . . .	42
4.2	ISLV-Experimente bei Abständen von 1 $\mu\text{m}$ bis 1 mm . . . . .	44
4.3	ISLV-Experimente bei Abständen kleiner 1 $\mu\text{m}$ . . . . .	54

<b>5</b>	<b>Mathematische Beschreibung verschiedener Testmassen-Konfigurationen</b>	<b>58</b>
5.1	Kugel-Platte-Konfiguration . . . . .	59
5.1.1	Newtonsche Gravitation . . . . .	59
5.1.2	Yukawa-artige Wechselwirkung . . . . .	61
5.1.3	Casimir-Kraft . . . . .	63
5.1.4	Resultierende Kraftverläufe . . . . .	65
5.2	Kugel-Kugel-Konfiguration . . . . .	67
5.2.1	Newtonsche Gravitation . . . . .	67
5.2.2	Yukawa-artige Wechselwirkung . . . . .	69
5.2.3	Casimir-Kraft . . . . .	72
5.2.4	Resultierende Kraftverläufe . . . . .	73
5.3	Platte-Platte-Konfiguration . . . . .	75
5.3.1	Newtonsche Gravitation . . . . .	75
5.3.2	Yukawa-artige Wechselwirkung . . . . .	76
5.3.3	Casimir-Kraft . . . . .	76
5.3.4	Resultierende Kraftverläufe . . . . .	77
5.4	Vergleich der drei Konfigurationen . . . . .	79
<b>6</b>	<b>SAMs und mikromechanischer Ansatz</b>	<b>81</b>
6.1	SAMs . . . . .	81
6.2	Wechselwirkung von SAMs mit Elektronen . . . . .	82
6.3	Eigenschaften . . . . .	85
6.4	Notwendige Vorarbeiten und denkbare Experimente . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>91</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>93</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>94</b>
	<b>Literatur</b>	<b>107</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>115</b>

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Bielefeld, 21. September, 2011

Johannes Pehe

## 1. Einleitung

Startpunkt dieser Arbeit war die Idee von Prof. Armin Gölzhäuser und Prof. Dominik Schwarz, man könnte möglicherweise unter Verwendung von Self-assembled Monolayers (SAM, deutsch selbstaggregierende Monolagen) und den in der Arbeitsgruppe *Physik supramolekularer Systeme und Oberflächen* (Universität Bielefeld) verwendeten Methoden ein Experiment entwerfen, das die Überprüfung des newtonschen Gravitationsgesetzes bei kleinen Abständen ermöglicht.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, Voraussetzungen für ein derartiges Experiment zu untersuchen und zu einer Einschätzung zu gelangen, ob ein solches realisiert werden könnte.

Dazu wird zunächst ein Einblick in die theoretischen Konzepte mit Extra-dimensionen gegeben, die Verletzungen des Quadratabstandsgesetzes (*engl. inverse square law violations, ISLV*) plausibel machen würden (Kapitel 2). Weiter wird gezeigt wie ein solches ISLV-Experiment üblicherweise parametrisiert wird (Abschnitt 2.8).

Da das Quadratabstandsgesetz für Abstände  $>100\ \mu\text{m}$  bereits gut getestet ist (Abschnitt 4), ist vor allem der Bereich kleinerer Abstände für zukünftige Experimente interessant.

Um diesem Umstand Sorge zu tragen, werden die Kräfte abgehandelt, die in diesem Abstandsbereich zu berücksichtigen sind (Kapitel 3). Dabei wird nicht näher auf die gut verstandenen Effekte der klassischen Elektrostatik beziehungsweise -dynamik eingegangen.

Vielmehr wird der Schwerpunkt auf der weniger bekannten und unvollständiger verstandenen Casimir-Kraft liegen (Abschnitt 3.3), welche auf Quanteneffekten beruht und bei Abständen unter  $100\ \mu\text{m}$  dominant wird. Dabei wird auch die Lifschitz-Theorie behandelt, welche eine Verallgemeinerung zur Beschreibung der Casimir-Kraft darstellt und in dessen Rahmen auch die Van-der-Waals-Kräfte Erwähnung finden werden. Damit soll ein möglichst vollständiges "Handwerkszeug" geliefert werden, um später mögliche Testmassen-Konfigurationen mathematisch zu betrachten (Kapitel 5).

Darüber hinaus wird ein Überblick über bereits durchgeführte ISLV-

Experimente gegeben, wobei ein Schwerpunkt auf die Experimente gelegt wird, die zu den bisher besten Beschränkungen bei kleinen Abständen geführt haben (Kapitel 4). Es werden einige Ansätze und zugehörige Apparaturen betrachtet und die damit gewonnenen Beschränkungen für den gewählten Parameterraum diskutiert. Hier soll deutlich werden, welcher Abstandsreich noch zu bearbeiten ist und ergründet werden, was sich aus bisherigen Arbeiten für zukünftige Experimente lernen lässt.

In Kapitel 5 werden mathematische Beschreibungen für verschiedene Testmassenkonfigurationen erarbeitet. Dabei werden die in Kapitel 2 und 3 behandelten Kräfte berücksichtigt, um Kraft-Abstands-Kurven zu simulieren. Die Ergebnisse werden eingeordnet und Schlüsse darüber gezogen, welche Konfiguration für welche Art Experiment zu bevorzugen ist.

Das abschließende Kapitel 6 wird zunächst einen Überblick über SAMs und Nanoblätter geben. Anschließend werden einige Eigenschaften der Nanoblätter beleuchtet und schließlich einige grundlegende Ideen für mögliche Experimente skizziert und weitere nötige Vorarbeiten aufgezeigt.

## 2. Theoretischer Hintergrund

Die Frage nach zusätzlichen Raumdimensionen wurde erstmals zu Beginn des 20. Jahrhunderts aufgeworfen [56].

Einen guten Einstieg in die Diskussion um Extra-Raumdimensionen liefert das populärwissenschaftliche Buch der Harvard-Professorin Lisa Randall *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*, welches 2005 erschien<sup>1</sup> [56].

Die Möglichkeit eröffnete Einsteins allgemeine Relativitätstheorie (ART) [16], welche keine bestimmte Anzahl von Raumdimensionen favorisiert. Im Jahr 1919, vier Jahre nach ihrer Veröffentlichung, schlug Theodor Kaluza die Einführung einer vierten, unsichtbaren Raumdimension vor [31]. Sein Ziel war es, die Kräfte der Gravitation und des Elektromagnetismus zu vereinen. Dieser Versuch scheiterte zwar, die Idee einer zusätzlichen Raumdimension bleibt jedoch von großer Bedeutung. Will man die Idee einer zusätzlichen Raumdimension annehmen, drängen sich unmittelbar einige Fragen auf. Warum blieb sie uns bis jetzt verborgen? Warum unterscheidet sie sich von den bekannten Raumdimensionen? Und wie groß ist ihre Ausdehnung? Erst 1926 lieferte der schwedische Mathematiker Oskar Klein mögliche Antworten auf diese Fragen [33]. Er schlug vor, dass die Zusatzdimension kreisförmig aufgespult - man spricht auch von Kompaktifizierung - und extrem klein (Größe der Plancklänge  $10^{-35}$  m) sein sollte. Diese Dimension wäre an jedem Punkt im bekannten dreidimensionalen Raum zu finden. Ihre Ausdehnung ist so klein, dass eine derart kompaktifizierte Dimension keinerlei messbare Spuren hinterließe. Damit erklärt sich, warum wir eine solche Dimension bisher nicht wahrgenommen haben. Ein diesen Umstand verbildlichendes Beispiel stellt ein Gartenschlauch dar (siehe Abbildung 1). Aus der Ferne betrachtet wirkt er eindimensional. Erst aus der Nähe sieht man, dass er eine zweidimensionale Oberfläche hat und ein dreidimensionales Volumen einschließt [56] (S. 53).

---

<sup>1</sup>Hier wurde die Übersetzung aus dem Amerikanischen ins Deutsche (Verborgene Universen Eine Reise in den extradimensionalen Raum) von Hartmut Schickert (2008) verwendet [56].

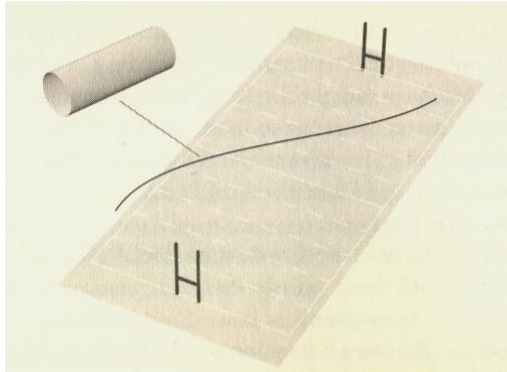


Abbildung 1: Betrachtet man einen Gartenschlauch auf einem Sportplatz, wirkt er eindimensional. Erst bei näherer Betrachtung wird deutlich, dass seine Oberfläche zweidimensional und das eingeschlossene Volumen dreidimensional ist [56](S. 55).

Erneute Aufmerksamkeit bekam die Idee von zusätzlichen Raumdimensionen durch die Suche nach einer Theorie der Quantengravitation. Die Stringtheorie ist ein Kandidat zur Vereinigung von Quantenmechanik und Gravitation. Ihren kohärenten Versionen zufolge gibt es zehn Dimensionen (neun Raumdimensionen plus eine Zeitdimension) [56] (S. 52). Wenn die Stringtheorie aber eine korrekte Beschreibung der Natur darstellt, stellt sich die Frage, was aus den sechs zusätzlichen Raumdimensionen geworden ist. Eine Möglichkeit stellt die oben genannte Art der Kompaktifizierung der Zusatzdimensionen dar. Eine weitere wird in Abschnitt 2.4 behandelt. Hier wird sich zeigen, dass es vorstellbare Konstellationen mit Zusatzdimensionen gibt, die tatsächlich messbare Konsequenzen hätten.

### 2.1. Allgemeine Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) revidierte das Konzept der Gravitation radikal. Dieser kurze Überblick folgt [56] (S. 134-141). Wir verstehen die Gravitation heute nicht mehr als eine Kraft, die direkt auf Objekte einwirkt, sondern als eine Folge der Raumzeitgeometrie. Die allgemeine Relativitätstheorie nutzt den engen Zusammenhang zwischen träger und schwerer Masse, um die Auswirkungen der Gravitation ausschließlich in Begriffen der Raumzeitgeometrie zu formulieren. Jede Verteilung von Materie und anderen Energieformen ( $E = mc^2$ ) krümmt oder verzerrt die Raumzeit.



Einstein bemerkte, dass der freie Fall eine Bewegung entlang der Raumzeit-Geodätischen<sup>2</sup> ist. Die ART erlaubt das relativistische Gravitationsfeld jeder Verteilung von Materie und Energie zu berechnen. Die Einstein'schen Gleichungen sagen uns, wie wir die Metrik  $g_{\mu\nu}$  aus einer bekannten Verteilung von Materie und Energie ableiten können:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4. \quad (1)$$

$R_{\mu\nu}$  ist der Ricci-Krümmungstensor und bezieht sich auf die Metrik  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  ist der Energie-Impuls-Tensor, der die Verteilung von Materie und Energie beschreibt [56] (S. 528). Die berechnete Metrik bestimmt die Raumzeitgeometrie indem sie angibt wie Zahlen einer beliebigen Größenskala in physikalische Entfernungen und Formen übersetzt werden, die die Geometrie bestimmen. Wie ein massives Objekt das Raumzeitgefüge verzerrt ist vereinfacht in Abbildung 2 dargestellt.

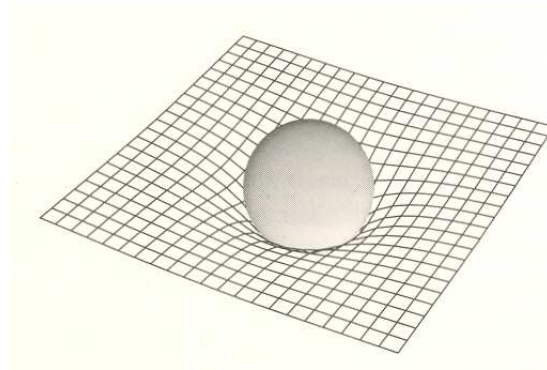


Abbildung 2: Gezeigt ist eine Materiekugel im Raum. Der Raum um die Kugel herum ist verzerrt. Die Kugel drückt eine Delle in den Raum, deren Tiefe durch ihre Masse bestimmt wird. Der dreidimensionale Raum beziehungsweise die vierdimensionale Raumzeit ist hier zweidimensional wiedergegeben. Wäre die gezeigte Kugel die Erde, so könnte man sich den Mond als eine kleinere Kugel vorstellen, welche in der Delle um die Erde "rollt". Das die kleinere Kugel dabei ihrerseits die Raumzeit krümmen würde, wird hier aufgrund ihrer geringeren Masse vernachlässigt [56] (S.136).

---

<sup>2</sup>Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, welche im gekrümmten Raum keine Gerade sein muss

Der eigentlich dreidimensionale Raum ist dabei zweidimensional dargestellt, um die Krümmung abbilden zu können. Die ART hat den Vorteil, dass sie jede Art von Energie -einschließlich der des Gravitationsfeldes- in die Beschreibung der Verteilung von Materie und Energie einbezieht. Die allgemeine Relativitätstheorie wurde vielfach experimentell bestätigt [71]. Eine Konsequenz der ART ist, dass eine Verzerrung auch eine höherdimensionale Raumzeit einschließlich möglicher Branen (siehe Abschnitt 2.4) durchziehen würde [56]. Die ART enthält das newtonsche Gravitationsgesetz für hinreichend kleine Massendichten und Geschwindigkeiten. Für Experimente unter typischen Laborverhältnissen auf der Erde genügt es daher mit Newtons Gravitationsgesetz (siehe Gleichung 2) zu rechnen.

## 2.2. Newtons Gravitationsgesetz mit Zusatzdimensionen

Es ist plausibel, dass mögliche Zusatzdimensionen uns bisher verborgen geblieben sind. Es ist jedoch notwendig solche Erklärungen daraufhin zu prüfen ob sie mit den Gesetzen der Physik kompatibel sind. Hierzu ein Blick auf Newtons Gravitationsgesetz. Es ist ein *inverses Quadratgesetz*. Das bedeutet, dass die Stärke der Gravitation proportional zum Quadrat des Abstandes abnimmt. Die Gravitationskraft zwischen den beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  ist gegeben durch

$$\vec{F}_N = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2)$$

Dabei ist  $G$  die Gravitationskonstante und  $r$  der Abstand. Die quadratische Abnahme der Gravitationskraft ist dabei direkt auf die Anzahl der Dimensionen zurückzuführen, in denen sich die Feldlinien ausbreiten. Randall macht dies in Abbildung 3 in ihrem Buch [56] (Kapitel 2) sehr anschaulich deutlich. Geht von einer Masse eine konstante Anzahl radialer Feldlinien aus, so schneiden diese Feldlinien eine gedachte Sphäre, mit beliebigem Radius, wobei sich die Oberfläche der Sphäre quadratisch mit dem Radius vergrößert ( $A = 4\pi r^2$ ) (Gausscher Integralsatz in drei Dimensionen). Die Anziehungskraft ist dabei der Dichte der Schnittpunkte auf der Sphärenoberfläche proportional und nimmt somit mit dem Abstand quadratisch ab.



Abbildung 3: Geht von einer Masse eine konstante Anzahl von Schwerefeldlinien aus, die sich radial ausbreiten, so schneidet dieselbe Anzahl Feldlinien eine Sphäre mit beliebigem Radius, wobei die Oberfläche der Sphäre sich quadratisch mit dem Radius vergrößert. Die Stärke der Anziehungskraft ist dabei der Dichte der Schnittpunkte auf der Sphärenoberfläche proportional und nimmt somit mit dem Abstand quadratisch ab [56](S.65).

Die quadratische Abnahme der Kraft ist also damit zu erklären, dass sich die Gravitation gleichmäßig auf die drei Raumdimensionen verteilt. Gäbe es nur zwei Raumdimensionen würde sie demnach langsamer ( $1/r$ ) abnehmen (siehe Potential in Gleichung 3 für  $n=2$ ). In vier oder mehr Raumdimensionen müsste die Gravitation schneller abnehmen. Die Oberfläche einer Hypersphäre würde schneller zunehmen. Gleichung 3 zeigt die Potentiale, die sich gemäß Gaußschem Satz für  $n$  Dimensionen ergeben.

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(n)}\Phi = 0 &\Rightarrow \Phi \sim \frac{1}{r^{(n-2)}} \quad n \geq 3 \\
 &\Phi \sim \ln(r) \quad n = 2 \\
 &\Phi \sim r \quad n = 1
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ist damit die Idee von Extradimensionen zu verwerfen? Eine Theorie der Gravitation, die das Quadratabstandsgesetz nicht reproduziert, stünde im Widerspruch zu den beobachteten Umlaufbahnen von Planeten.

Tatsächlich lässt sich das Quadratabstandsgesetz mit kompaktifizierten Zusatzdimensionen in Einklang bringen. Vereinfacht lässt sich annehmen, dass sich die Feldlinien in den kompakten Dimensionen nicht beliebig weit ausbreiten können, da diese eine endliche Größe besitzen. Bei weiterer Ausbreitung bleiben nur die Richtungen der unendlich ausgedehnten Dimensio-

nen, so dass sich für Abstände größer als die kompakten Dimensionen das bekannte inverse Quadratgesetz ergibt. Um dies zu verdeutlichen lohnt es sich erneut die Gartenschlauchanalogie zu bemühen [56] (S. 67). Man stelle sich vor, Wasser wird durch ein kleines Loch (klein gegen den Schlauchdurchmesser) an einem Ende des Schlauches eingeleitet, so wird es nicht sofort der Richtung des Schlauches folgen, sondern sich zunächst entlang des Querschnitts in alle Richtungen verteilen. Sobald der Rand jedoch erreicht wäre, breitet es sich aus als gebe es nur eine Richtung (siehe Abbildung 4). Gleichmaßen kann man sich das Verhalten von Gravitationsfeldlinien in kleinen kompaktifizierten Dimensionen vorstellen.



Abbildung 4: Das Wasser breitet sich zunächst in drei Dimensionen aus, ehe es dann nur noch entlang der einen Dimension des Schlauches weiterfließt [56](S. 67).

Ähnlich wie im Beispiel zuvor kann man sich eine massive Sphäre vorstellen, von der eine feste Anzahl Feldlinien ausgehen (siehe Abbildung 5 und Titelseite). Bei Abmessungen, kleiner als die Größe der zusätzlichen Dimensionen breiten sich die Linien gleichmäßig in alle Richtungen aus (Abbildung 5 links). Bei Abständen größer als die Zusatzdimension verlaufen sie nur noch in Richtung der unendlichen Dimensionen (Abbildung 5 rechts).

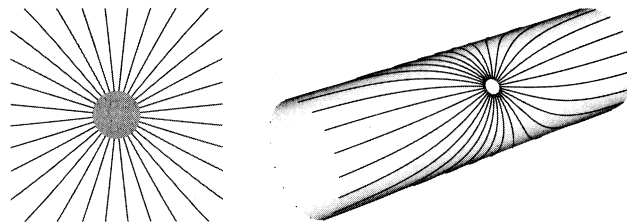


Abbildung 5: Die Gravitationsfeldlinien eines massiven Objektes breiten sich über kurze Entfernungen radial, über große Entfernungen nur entlang der unendlichen Dimensionen aus [56](S. 67).

Daraus ergibt sich, dass bei Größenordnungen einer kompaktifizierten Zusatzdimension eine Abweichung vom inversen Quadratgesetz zu erwarten wäre. Die Gravitation würde folglich in diesem Abstandsbereich zwischen Quell- und Testmasse schneller zunehmen. Bei Experimenten, die diese Abweichungen zu messen versuchen, spricht man von *inverse square law violation* (oder *ISLV*). Durchgeführte Experimente und Vergleichbarkeit der damit gewonnenen Beschränkungen werden in Abschnitt 4 behandelt.

### 2.3. Kaluza-Klein-Teilchen

Eine weitere Spur würden sogenannte *Kaluza-Klein-Teilchen* (im Folgenden KK-Teilchen) darstellen [56] (Kapitel 18). Es handelt sich dabei weniger um echte Teilchen als vielmehr um einen extradimensionalen Impuls, der sich gemäß spezieller Relativitätstheorie (SRT) in der vierdimensionalen Welt (drei räumliche und eine zeitliche Dimension) als Masse manifestieren würde. Dieser Masseterm ist der zweite Summand in der Klein-Gordon-Gleichung [60]:

$$\square^{(n)}\varphi = 0 \Rightarrow \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^{(3)} \right) \varphi_{k_e} - \vec{k}_e^2 \varphi_{k_e} = 0, \quad (4)$$

dabei ist  $\square^{(n)}$  der d'Alembert-Operator,  $\varphi$  die Wellenfunktion des Teilchens und  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_4 \\ \vec{k}_e \end{pmatrix}$ . KK-Teilchen hätten bei gleicher Ladung wie die bekannten Teilchen eine höhere Masse, die bei einer kreisförmig kompaktifizierten Zusatzdimension umgekehrt proportional zu dessen Ausdehnung wäre. Durch die diskreten unterschiedlichen extradimensionalen Impulse hat jedes Teilchen mit extradimensionalem Impuls mehrere *KK-Moden*. Man spricht hier von einem *KK-Tower*. Da bisher in Beschleunigern keine Anzeichen für KK-Teilchen gefunden wurden, lässt sich die Ausdehnung einer Extra-Raumdimension (mit  $M_C > 1.59$  TeV [47]) auf  $R < 7,8 \cdot 10^{-19}$  m beschränken. Dies gilt jedoch nur, wenn alle Teilchen sich durch den extradimensionalen Raum bewegen können<sup>3</sup>. Dass dies nicht unbedingt der Fall sein muss, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

---

<sup>3</sup>das heisst in einer extradimensionalen Welt ohne Branen [56](S. 406)

#### 2.4. Branen und Bulk

Diese Einführung folgt [56] (Kapitel 1). Alternative Konzepte wie beispielsweise das Randall-Sundrum-Modell werden hier nicht explizit behandelt.

Beträchtliche Aufwertung erfuhr die Idee der Extradimensionen, durch Joe Polchinski (1995) [53], der zeigte, dass sogenannte *Branen* (*englisch Branes*, Ableitung von *membrane*) für die Stringtheorie eine wichtige Bedeutung haben. Erste branenähnliche Objekte wurden schon früher vorgeschlagen. So wurde die Dp-Brane, ein Objekt, das sich nur in einigen Dimensionen unendlich weit erstreckt, mathematisch aus Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie hergeleitet. Auch die Teilchenphysik hatte schon Mechanismen vorgeschlagen, die Teilchen auf branenähnliche Oberflächen beschränken. Die Branen der Stringtheorie waren die ersten, die sowohl Kräfte als auch Teilchen einfangen konnten. Das heisst, Teilchen wie Kräfte könnten auf einer niedrigerdimensionalen Oberfläche gefangen sein, auch wenn das Universum noch viele weitere Dimensionen hätte. Wenn die Stringtheorie eine treffende Beschreibung der Natur darstellt, müsste man auch die potenzielle Existenz solcher Branen anerkennen.

In jedem Fall ist eine Brane ein Gebiet das weniger Dimensionen hat als der umfassende, höherdimensionale Raum, der sie umgibt oder an sie grenzt. Diesen umfassenden, höherdimensionalen Raum nennt man *Bulk*<sup>4</sup>. Der Bulk umfasst alle Dimensionen, sowohl die auf als auch jene außerhalb der Brane. Treffen Teilchen auf eine Brane, an die sie gebunden sind, werden sie ohne Energieverlust reflektiert<sup>5</sup>. Auch Licht könnte an der Brane haften und sich demnach nur entlang dieser ausbreiten. In einer dreidimensionalen Brane würde sich Licht genauso verhalten wie in einem dreidimensionalen Universum. Alle Teilchen und Kräfte, die auf einer 3D-Brane<sup>6</sup> gebunden wären, würden niemals in den Bulk vordringen und somit auch nie einen Hinweis auf seine Existenz liefern.

---

<sup>4</sup>Von englisch bulk, "groß, Großteil, Gros"

<sup>5</sup>*reflektive Randbedingung*

<sup>6</sup>vierdimensional

Doch obwohl Kräfte und Materie auf eine Brane beschränkt sein können, sind Branen genau deswegen so interessant, weil wir wissen, dass dies nicht für alle Kräfte gelten kann. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Gravitation mit der Raumzeit verwoben (siehe Abschnitt 2). Das heißt, die Gravitation muss durch den gesamten Raum und in jeder Dimension wirken. Eine vereinfachte Darstellung zeigt Abbildung 6. Hier ist die dreidimensionale Brane als Fläche dargestellt. Nur die *Gravitonen* (hypothetische Austauschteilchen der Gravitation) können sich im Bulk ausbreiten. Alle anderen Kräfte und Teilchen sind auf der Fläche gefangen.

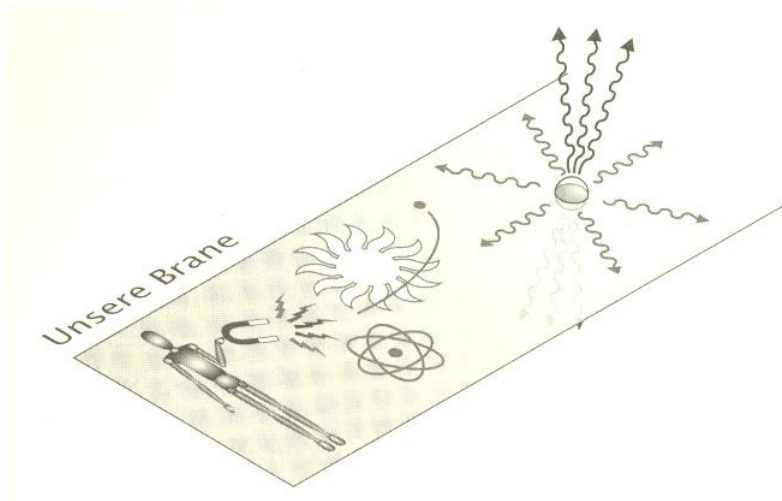


Abbildung 6: Wir leben möglicherweise auf einer Brane. Das heisst, die Materie, Photonen und andere Teilchen des Standardmodells könnten auf diese Brane beschränkt sein. Nur die Gravitation könnte sich auch über die Brane hinaus in den Bulk ausbreiten, wie durch die geschwängelten Pfeile angedeutet ist [56](S. 80).

Weitere schlüssige Konzepte haben Randall und Sundrum vorgeschlagen ([55, 54]). Um den Überblick in einem überschaubaren Rahmen zu halten, wird hier auf eine genauere Darstellung verzichtet.

## 2.5. Große Vereinheitlichte Theorie

Im Jahr 1974 machten Howard Georgi und Sheldon Lee Glashow den mutigen Vorschlag, dass die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung sich mit Abstand und Energie derart verändern, dass sie sich bei hohen Energien zu einer einzigen Kraft vereinen. Sie nannten ihre Theorie "GUT", für "Grand Unified Theory" ("Große Vereinheitlichte Theorie". "GVT") [18]. Ihrer Theorie zu Folge hatten in der heißen energiereichen Frühzeit des Universums bei Temperaturen von  $10^{26}$  K und Energien von über  $10^{15}$  GeV alle drei nicht-gravitativen Kräfte die gleiche Stärke und verschmolzen zu einer Kraft (siehe Abbildung 7). Mit zunehmender Abkühlung des Universums spaltete sich diese Einheitskraft - durch spontan gebrochene Symmetrie - in die drei verschiedenen Kräfte mit ihren unterschiedlichen Energieabhängigkeiten. Trotz des Ursprungs in einer einzigen Kraft haben sie heute, bei niedrigen Energien, unterschiedliche Wechselwirkungsenergien. Auf die Idee einer GVT kamen sie, indem sie damals noch ungenaue Messdaten der nichtgravitativen Wechselwirkungen nahmen und mithilfe der Renormierungsgruppe ihre Stärke bei hohen Energien extrapolierten.

Ihren Berechnungen zufolge schienen die drei Wechselwirkungen in einem Punkt zusammen zu laufen. Genauere Messungen haben ergeben, dass das vorgeschlagene Modell höchstwahrscheinlich falsch und für eine Vereinheitlichung der Kräfte eine Erweiterung des Standardmodells notwendig ist. Möglich wäre eine Vereinheitlichung in verschiedenen Modellen, unter anderem in Supersymmetrie- und verschiedenen

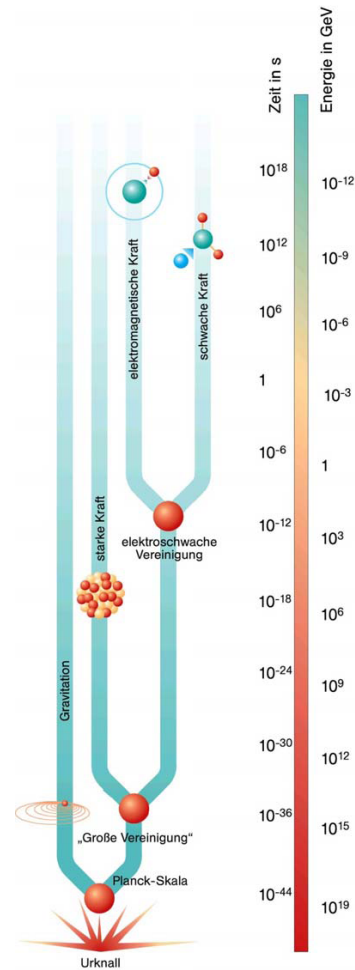


Abbildung 7: Aufspaltung der vier Grundkräfte bei abnehmender Energie seit dem Urknall.

<http://www.weltderphysik.de/de/940.php> Stand:23.05.2011



extradimensionalen Modellen. Eine theoretisch messbare Konsequenz einer GVT wäre ein Protonenzerfall, da die vereinheitlichte Wechselwirkung die Umwandlung eines Quarks in ein Lepton erlauben würde. Die vorhergesagte Protonenlebensdauer wäre jedoch so hoch<sup>7</sup>, dass extrem geringe Wahrscheinlichkeiten für einen experimentellen Nachweis sprechen [56].

### 2.6. Hierarchieproblem

Die theoretische Physik steht trotz der vielen Stärken des Standardmodells der Teilchenphysik vor einem großen Rätsel, dem sogenannten *Hierarchieproblem* [56] (Kapitel 12). Vereinfacht lässt sich dieses Problem auf die Frage reduzieren, warum die Gravitation so viel schwächer ist als die übrigen bekannten Wechselwirkungen.

Das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik stimmt mit den experimentellen Ergebnissen hervorragend überein. Experimente an den Teilchenbeschleunigern am CERN, SLAC und Fermilab haben die Vorhersagen des SM über Wechselwirkungen und Zerfallsraten der bekannten Teilchen bestätigt. Eine Ausnahme ist die Tatsache, dass Neutrinos nicht masselos sind, wie vom Standardmodell vorhergesagt [60, 46]. Die mit den drei nichtgravitativen Kräften zusammenhängenden Massen und Ladungen sind mit hoher Präzision geprüft worden. Auch die Stärke der Wechselwirkungen und ihr Verhältnis zueinander ist zu erahnen und bildet die Grundlage der Idee einer GVT. Zudem erklärt der Higgs-Mechanismus, wie das Vakuum die elektroschwache Symmetrie bricht und den W- beziehungsweise Z-Eichbosonen und auch den Quarks und Leptonen ihre Masse verschafft.

Die Vorhersagen funktionieren jedoch nur, wenn man schlicht davon ausgeht, dass die Stärken der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung, die im Experiment gemessenen Werte zeigen. Die schwache Massenskala ist jedoch sechzehn Größenordnungen kleiner als man aufgrund einer hochenergetischen Theorie erwarten würde. Um den Massen der Teilchen im Standardmodell ihre gemessenen Werte zu geben, muss ein irritierend großer und exakter Faktor eingeführt werden.

---

<sup>7</sup>Aktuelle Untergrenze:  $(t_p > 2,1 \cdot 10^{29}$  Jahre, [47])

Im Zusammenhang einer GVT hat man gute Gründe davon auszugehen, dass Teilchen, die ähnlichen Wechselwirkungen unterliegen, vergleichbare Massen haben. Das Problem ist, dass das Higgs-Teilchen, das die elektroschwache Symmetrie bricht, vergleichsweise leicht sein muss (ungefähr schwache Massenskala), die GVT aber dem Higgs-Teilchen einen mit der starken Kraft wechselwirkenden Partner zuweist. Dieses Teilchen muss extrem massereich sein (ungefähr GVT-Massenskala (siehe Abb. 7)). Anders ausgedrückt: Zwei Teilchen, die vermutlich über eine Symmetrie (die Symmetrie der GVT-Kraft) miteinander verwandt sind, müssen extrem unterschiedliche Massen haben. Diese zwei Teilchen müssen in einer GVT zusammen auftreten, weil schwache und die starke Wechselwirkung bei hoher Energie gegeneinander austauschbar sein müssten. Das ist ja gerade die Idee einer GVT.

Dies hat weitreichende Konsequenzen. Der stark geladene Partner des Higgs-Teilchens könnte simultan mit einem Quark und einem Lepton wechselwirken und so einen Protonenzerfall ermöglichen. Um einen raschen Zerfall zu vermeiden, muss das stark wechselwirkende Teilchen, - das zwischen zwei Quarks und zwei Leptonen ausgetauscht werden muss, damit es zu einem Protonenzerfall kommen kann - extrem schwer sein. Die gegenwärtige Grenze der Proton-Lebensdauer ( $t_p > 2,1 \cdot 10^{29}$  Jahre, [47]) sagt uns, dass der stark geladene Higgs-Partner, so er existiert, eine mit der GVT-Massenskala vergleichbare Masse haben muss. Das heisst die Masse des einen Partners ist um einen Faktor  $10^{13}$  größer als die des anderen. Für die meisten vereinheitlichten Theorien lässt sich dieses Problem nur durch die Einführung dieses großen Faktors lösen. Dieser muss auf dreizehn Stellen feinabgestimmt sein, sonst versagt die Theorie.

Bis hierher wurde das Hierarchieproblem einer GVT beschrieben, doch in der Teilchenphysik ist es nicht leichter. Selbst in einer Theorie ohne Teilchen von GVT-Masse verursachen virtuelle Teilchen viel zu große Beiträge<sup>8</sup> zur Masse des Higgs-Teilchens. Das Problem ist, dass eine aus Standardmodell und Gravitation bestehende Theorie zwei enorm unterschiedliche Energies-

---

<sup>8</sup>Quantenbeiträge siehe [56]S.283

kalen umfasst.

Die eine ist die schwache Energieskala, bei der die elektroschwache Symmetrie gebrochen wird; sie beträgt

$$E_S = \left(G_F \sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 246 \text{ GeV}. \quad (5)$$

Dabei ist  $G_F$  die Fermi-Kopplungskonstante ( $G_F \approx 1,16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ , [47]). Wenn Teilchen weniger Energie haben, manifestieren sich die Effekte der gebrochenen elektroschwachen Symmetrie, und schwache Eichbosonen und Elementarteilchen haben Masse.

Die zweite ist die Planck-Energieskala bei welcher Quantengravitationseffekte wichtig werden müssen. Sie ist sechzehn Größenordnungen größer als die schwache Energieskala. Sie beträgt gemäß

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1,2209 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (6)$$

etwa  $10^{19} \text{ GeV}$ . Da die Planck-Massenskala umgekehrt proportional zur Stärke der Gravitation ist, entspricht eine riesige Planckmassenskala einer extrem schwachen Gravitation.

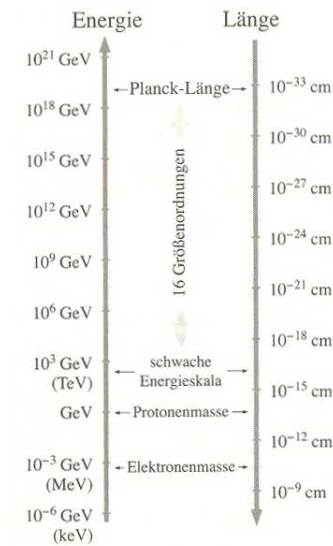


Abbildung 8: Das Hierarchieproblem ist die Frage, warum die Planck-Energieskala so viel größer (16 Größenordnungen) als die schwache Energieskala ist [56](S.292).

Der Quotient aus Planck- und schwacher Energieskala zeigt, dass 16 Größenordnungen zwischen ihnen liegen:

$$\frac{E_P}{E_S} \approx 5 \times 10^{16}. \quad (7)$$

Warum ist die Gravitation so schwach, dass wir sie bei teilchenphysikalischen Berechnungen nicht berücksichtigen müssen? Es wird deutlich, dass das Hierarchieproblem ein dringliches ist. Ein Lösungsansatz, durch Stabilisierung der elektroschwachen Skala, ist die *Supersymmetrie*<sup>9</sup>. Dies ist eine Symmetrie der Teilchenphysik, die Bosonen und Fermionen ineinander umwandelt, wodurch kein Feintuning mehr nötig ist. Die Hierarchie zwischen der elektroschwachen und der Planck-Skala wird durch Supersymmetrie jedoch nicht aufgehoben, das heißt sie liefert keine Erklärung für die Schwäche der Gravitation. Auf Supersymmetrie soll hier nicht näher eingegangen werden. Ein alternativer Ansatz, der vor allem die Frage behandelt, warum die Gravitation so schwach ist im Vergleich zu den übrigen bekannten Wechsel-

<sup>9</sup>siehe [56] Kapitel 13

wirkungen, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

### 2.7. Große Extradimensionen

Auf der Supersymmetrie-Konferenz von Oxford (1998) präsentierte der Stanford-Physiker Savas Dimopoulos eine interessante Idee, die er mit Nima Arkani-Hamed und Gia Dvali in Gemeinschaftsarbeit [4] ausgearbeitet hatte [56] (Kapitel 19).

Die Idee von Arkani-Hamed, Dimopoulos und Dvali (im Folgenden kurz ADD genannt) war, dass sehr große Extradimensionen, basierend auf den Ideen aus Abschnitt 2.4, die Schwäche der Gravitation erklären könnten. Wenn die Gravitation sich gleichmäßig in alle Raumdimensionen ausbreitet, wird sie dadurch so stark verdünnt, dass sie auf der 3D-Brane viel schwächer wäre, als man aufgrund von Schätzungen ohne Extradimensionen annehmen würde. Die Planckskala wäre demzufolge keine fundamentale Skala und ihre Größenordnung eine simple Konsequenz der großen Ausdehnung der Extradimensionen. ADD behandelte die Frage, wie groß kompaktifizierte Zusatzdimensionen sein könnten, ohne den experimentellen Resultaten zu widersprechen, wenn die Standardmodell-Teilchen auf eine Brane beschränkt sind.

Sie nahmen an, dass die fundamentale Skala  $M_*$  von der Größenordnung 1 TeV ist, so dass es keine Hierarchie zwischen der schwachen Energieskala und  $M_*$  mehr gibt. Wenn es  $n$  weitere Raumdimensionen gibt, dann lässt sich die höherdimensionale Gravitationskonstante  $G_{4+n}$  gemäß [2] (S. 84) schreiben als

$$G_{(4+n)} = \frac{4\pi}{S_{(2+n)}} \left( \frac{\hbar}{M_* c} \right)^{(2+n)} \frac{c^3}{\hbar}, \quad (8)$$

wobei  $S_{(2+n)}$  die Fläche einer Einheits- $(2+n)$ -Kugel ist, mit

$$S_{(2+n)} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (9)$$

Bei ausreichend kurzen Abständen wäre die Gravitationskraft proportional zu  $G_{(4+n)}/r^{2+n}$ . Um dies mit dem  $1/r^2$ -Gesetz in Einklang zu bringen,

nahmen ADD an, dass die  $n$  Zusatzdimensionen kompaktifiziert sind. Bei Abständen größer als die Größenordnung der Kompaktifizierung hat sich das Gravitationsfeld bereits gleichmäßig über die Extradimensionen verteilt und ist somit stark verdünnt. Mit dem Gausschen Gesetz findet man für  $n$  neue Dimensionen mit Radius  $R_*$ , kompaktifiziert auf einen Torus, dass die effektive Gravitationskonstante für große Abstände gegeben ist durch

$$G = \frac{\hbar c}{M_*^2} \left[ \frac{\hbar}{M_* c} \right]^n \frac{1}{V_n}, \quad (10)$$

wobei  $V_n$  hier das Volumen des  $n$ -ten Torus,  $(2\pi R_*)^n$  ist. Das Hierarchieproblem ist damit in das Problem überführt, die Größe der Zusatzdimensionen zu erklären [2].

Unter der Annahme, dass alle Zusatzdimensionen gleichgroß und auf einen Torus mit Radius  $R_*$  kompaktifiziert sind ergibt sich, mit  $M_* = 1$  TeV, nach Gleichung 10 die Größenordnung der Zusatzdimensionen zu

$$R_* = \frac{1}{\pi} 10^{-17+32/n} \text{ cm}. \quad (11)$$

Eine Extradimension ( $n = 1$ ) hätte eine Ausdehnung vergleichbar mit der Größe unseres Sonnensystems. Dies war schon aufgrund der beobachteten Planetenbahnen auszuschließen (siehe auch Abbildung 16). Für den Fall von  $n = 2$  ergibt sich  $R_* = 0,3$  mm. Dies war zum damaligen Zeitpunkt noch nicht auszuschließen. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass dies bereits experimentell ausgeschlossen ist. Einige Experimentatoren geben daher zusätzlich zu den Beschränkungen für  $R_*$ , die Vereinigungsenergieskala  $M_*$  an, bei welcher zwei gleichgroße kompaktifizierte Dimensionen noch möglich wären. Für  $n = 3$  wäre  $R_*$  mit 1,5 nm schon in einem Bereich der experimentell nicht zugänglich ist.

Bei anderen Kompaktifizierungen, anderen Werten für  $M_*$  oder unterschiedlichgroßen Zusatzdimensionen wären jedoch auch Werte im Bereich weniger Mikrometer denkbar [2].

Das ist im Vergleich zu den in Abschnitt 4 angesprochenen  $10^{-19}$  m riesig. Hier ist zu betonen, dass große Zusatzdimensionen nur möglich sind, wenn die

Teilchen des Standardmodells einschließlich Photonen sich nicht durch den Bulk bewegen können. Ohne Branen kämen derartig große Zusatzdimension nicht in Frage. In dem von ADD beschriebenen Szenario würde ausschließlich die Gravitation Hinweise auf Zusatzdimensionen liefern können. Gravitonen wären in diesem Fall die einzigen Teilchen, welche sich in den Bulk ausbreiten könnten und somit auch die einzigen Teilchen, die Kaluza-Klein-Partner hätten.

Einen Nachweis von Zusatzdimensionen könnten also, wie schon zu Beginn in Abschnitt 2.2 erwähnt, Experimente liefern, die das newtonsche Quadratabstandsgesetz bei kleinen Abständen überprüfen. Der Aufsatz von ADD [4] löste einen regelrechten Boom derartiger Experimente aus, welche ausführlich in Abschnitt 4 behandelt werden.

An dieser Stelle ist noch einmal zu betonen, dass das ADD-Szenario nur ein beispielhaftes extradimensionales Modell zur Lösung des Hierarchieproblems darstellt. Wie oben bereits erwähnt sind vor allem die Modelle von Randall und Sundrum zu nennen [55, 54].

Kompakte Extradimensionen würden als neue Yukawa-artige Kräfte mit der Reichweite  $R_*$  in Erscheinung treten, die durch den Austausch massiver Spin-2 Teilchen (KK-Gravitonen) zustande kommen. Die deshalb zumeist verwendete Parametrisierung durchgeführter Experimente sowie mögliche Alternativen werden im nächsten Abschnitt behandelt.

Alternativ könnte ein passiver Nachweis<sup>10</sup> der Kaluza-Klein-Partner des Gravitons im *Large Hadron Collider* (LHC) am CERN erfolgen.

### 2.8. Parametrisierung der ISLV

Die gesuchten Verletzungen der newtonschen Gravitation müssen parametrisiert werden. Historisch wurden experimentelle Tests Coulombs und Newtons  $1/r^2$ -Gesetzes genutzt, um Limits für Verletzungen der Form

$$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^{2+\epsilon}} \quad (12)$$

---

<sup>10</sup>KK-Partner des Gravitons würden ähnlich schwach wie das Graviton selbst wechselwirken und wären demnach nicht direkt zu detektieren. Ihre Entstehung würde sich demnach in fehlender Energie im Experiment manifestieren.

zu gewinnen [2]. Diese Parametrisierung war theoretisch nicht motiviert. Stattdessen ist es heute üblich aus ISLV-Experimenten, Beschränkungen eines zusätzlichen Yukawa-Beitrags zum bekannten  $1/r^2$ -Term abzuleiten. Im Fall der Gravitation ergibt sich folgendes Potential:

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} [1 + \alpha e^{-r/\lambda}], \quad (13)$$

dabei ist  $\alpha$  ein dimensionsloser Parameter und  $\lambda$  ist eine Längenskala oder -bereich. Der Yukawa-Beitrag ist das statische Limit einer Wechselwirkung aufgrund des Austauschs virtueller Bosonen der Masse  $m_b = \hbar/(\lambda c)$ .

Die zugehörige Kraft ergibt sich aus Gleichung 13 zu

$$F(r) = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \left( 1 + \alpha \left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} \right). \quad (14)$$

Einige Forscher haben die Möglichkeit in Betracht gezogen, dass eine Masse ungleich Null des Gravitons zu einem "puren Yukawa"-Gravitationspotential führen könnte. Diesem Ansatz fehlt jedoch das theoretische Fundament [2].

Weiter wurden Potenzgesetz-Modifikationen in Betracht gezogen:

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left[ 1 + \alpha_N \left( \frac{r_0}{r} \right)^{N-1} \right], \quad (15)$$

wobei  $\alpha_N$  eine dimensionslose Konstante und  $r_0$  mit einer neuen Längenskala eines nicht-newtonschen Prozesses verknüpft ist. So könnten etwa Terme mit  $N = 2$  und  $N = 3$  durch simultanen Austausch zweier skalarer beziehungsweise pseudoskalarer masseloser Teilchen erzeugt werden. Ein  $N = 5$  Term könnte durch simultanen Austausch zweier masseloser Axionen oder eines masselosen Neutrino-Antineutrino-Paares generiert werden [2]. Wie in den Reviews zu ISLV-Tests von Adelberger et al. [2] und Newman et al. [48] soll die Beschreibung sich in dieser Arbeit auf die Parametrisierung in Gleichung 13 beschränken, da jede mögliche Verletzung des  $1/r^2$ -Gesetzes sich in diesem Parameterraum manifestieren würde. Für den Fall, dass man eine Verletzung findet, müsste ihre funktionale Form genauer untersucht werden [2]. Berechnungen von Beschränkungen für unterschiedliche Parametrisierungen werden in [1] angestellt.



### 3. Andere Kräfte im Submilimeter- bis Submikrometerbereich

#### 3.1. Elektromagnetische Kräfte

##### 3.1.1. Elektrodynamik/-statik

Effekte der klassischen Elektrodynamik sollen hier nicht behandelt werden. Einen umfassenden Überblick bietet zum Beispiel Jackson [29].

##### 3.2. Magnetische Effekte

Mikroskopische Eisenpartikel in nominell nichtmagnetischen Testkörpern, können etwa bei der Herstellung oder Manipulation eines Aufbaus durch Verunreinigungen eingetragen werden. Diese können so klein sein, dass sie mit Standard-Magnetometern nicht detektiert werden können und dennoch im Vergleich zur Gravitationskraft nennenswerte Beiträge liefern [2] (S. 98). Bei makroskopischen Aufbauten reicht für gewöhnlich standardmäßiges magnetisches Abschirmen aus. Umso wichtiger ist es bei mikroskopischen Aufbauten, derartige Verunreinigungen zu vermeiden.

##### 3.3. Casimir-Kraft

Die folgende Darstellung orientiert sich an den ersten beiden Kapiteln aus *Advances in Casimir Effect* [6].

Der Casimir-Effekt wurde vor über 60 Jahren von Hendrik Casimir (1948) [7] entdeckt und publiziert. Er ist eine der direktesten Manifestationen von Nullpunkts-Vakuumfluktuationen. Der Casimir-Effekt in seiner einfachsten Form ist die Anziehung zwischen zwei elektrisch neutralen, unendlich großen parallelen Leiterplatten. Er ist ein reiner Quanteneffekt. Nach der klassischen Elektrodynamik ist die Kraft zwischen zwei neutralen Platten Null. Es ist also nur das Vakuum des quantisierten elektromagnetischen Feldes, das heißt der Grundzustand der Quantenelektrodynamik, der die Anziehung der Platten verursacht. Gemäß Casimirs Vorhersage ist die attraktive Kraft pro Flächeneinheit, also der Druck zwischen zwei unendlich großen, neutralen parallelen Platten aus idealem (perfekt leitfähig und reflektierend) Metall am Temperaturnullpunkt gegeben durch

$$P_{Ca,IM} = \frac{F_c}{A} = \frac{-\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \quad (16)$$

wobei  $a$  der Abstand,  $\hbar$  das reduzierte plancksche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Der Casimir-Effekt geht auf die bereits 1911 von Planck eingeführte Nullpunktenergie zurück. Gemäß der Quantenmechanik hat ein harmonischer Oszillator diskrete Energieniveaus

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz des Oszillators und  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Energiequantenzahl ist. Daraus folgt, dass es eine (Vakuum-) Grundzustandsenergie bei  $n = 0$  gibt:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (18)$$

Das ist die Energie einer Nullpunktoszillation mit der Frequenz  $\omega$ . Im Rahmen der Quantenfeldtheorie wird ein quantisiertes Feld, zum Beispiel das elektromagnetische, aufgefasst als Summe der Energien aller Nullpunktoszillationen. In Übereinstimmung mit Gleichung 18 ist die Energie im Grundzustand gegeben durch

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_J \omega_J, \quad (19)$$

wobei  $J$  die Quantenzahlen der Feldmoden sind. Im freien Minkowski-Raum sind die Moden durch einen dreidimensionalen Wellenvektor mit kontinuierlichen Komponenten und einem zweiwertigen diskreten Index, der den Polarisationszustand fixiert, gekennzeichnet. In begrenzten Raumbedingungen werden manche Komponenten des Wellenvektors diskret. Zum Beispiel verschwindet die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf einer Metalloberfläche, was zu einer diskreten Komponente des Wellenvektors in senkrechter Richtung führt. Es war Casimir, der als erster von der unendlichen Vakuumenergie des quantisierten elektromagnetischen Feldes in Gegenwart idealer Metallplatten die unendliche Vakuumenergie desselben Feldes im freien Minkowski-Raum subtrahierte. Beide unendlichen Energien wurden dazu regularisiert. Nach der Subtraktion wurde die Regularisierung entfernt, so

dass eine endliche Energie pro Flächeneinheit übrig bleibt:

$$E(a) \equiv E_{IM}(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}, \quad (20)$$

welche vom Abstand  $a$  zwischen den Platten abhängt. Der Casimir-Druck (Gleichung 16) ergibt sich mit Gleichung 20 aus

$$P(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a}. \quad (21)$$

Eine bildliche Vorstellung davon, wie der Casimir-Druck zustande kommt, liefert die Darstellung in Abbildung 9. Die Gleichungen 16 und 20 sollen im folgenden Abschnitt gemäß [6] (Kapitel 2.5) für den einfachsten Fall hergeleitet werden.

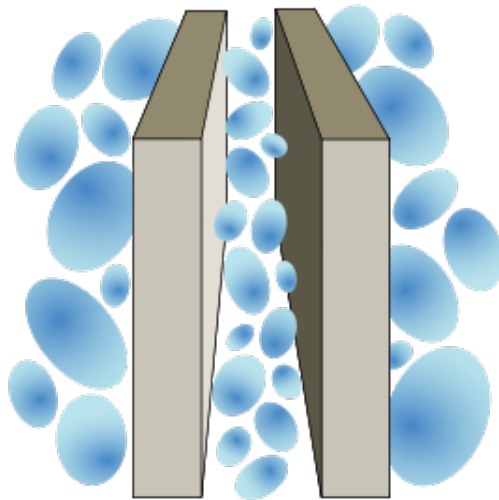


Abbildung 9: <http://schools-wikipedia.org/images/702/70207.png>

Vereinfacht gesagt existiert außerhalb der Platten ein Kontinuum virtueller Teilchen, die aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation entstehen, während innerhalb der Platten nur eine diskrete Anzahl<sup>11</sup> dieser Teilchen

---

<sup>11</sup>Streng genommen sind beide Spektren unendlich, deswegen müssen sie vor der Subtraktion regularisiert werden.

existieren, welche von den durch die Platten gegebenen Randbedingungen bestimmt wird. Dadurch kommt es zu einer attraktiven Kraft zwischen den Platten.

### 3.3.1. Elementare Herangehensweise an die Casimir-Kraft zwischen zwei parallelen Platten

Hier soll es darum gehen, eine auf einfachen Modellen basierende Herleitung des Casimir-Effektes für parallele ideale Metallplatten bei  $T = 0$  zu liefern [6] (S.29). Eine ausführliche Herleitung einschließlich Temperaturen größer Null bietet [6] (Kapitel 7).

Eine Konfiguration von zwei parallelen Platten mit sehr großer Fläche  $S$  im Abstand  $a$  voneinander ist in Abbildung 10 gezeigt. Die Betrachtung wird in kartesischen Koordinaten durchgeführt, wobei die  $z$ -Achse senkrecht zu den Plattenoberflächen steht. Mathematisch wird die Fläche  $S$  als unendlich groß aufgefasst. Dennoch sind die erhaltenen Resultate für die Bedingung  $a \ll \sqrt{S}$  anwendbar.

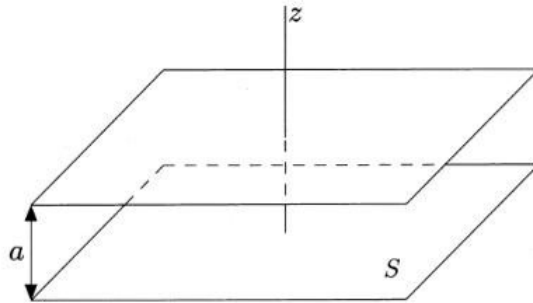


Abbildung 10: Zwei parallele ideale Metallplatten der Fläche  $S$  im Abstand  $a$  [6](S. 29)

Gemäß klassischer Elektrodynamik erfüllen das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte beider Polarisierungen die Randbedingungen auf der Oberfläche eines idealen Metalles:

$$\mathbf{E}_t(t, \mathbf{r})|_S = \mathbf{B}_n(t, \mathbf{r})|_S = 0. \quad (22)$$

Dabei ist  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor,  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor zur Oberfläche und

der Index  $t$  bezeichnet die Tangentialkomponente, welche parallel zur Plattenoberfläche ist. Die Bedingungen aus Gleichung 22 implizieren, dass ein elektromagnetisches Feld nur außerhalb eines idealen Leiters existieren kann. Endliche Leitfähigkeit und Eindringtiefe bei realen Metallen bleiben hier unberücksichtigt.

Wir betrachten das elektromagnetische Feld als unendliche Menge von Oszillatoren mit den Frequenzen  $\omega_J$  und Vakuumenergie (Gleichung 19), wobei  $J$  der Photon-Wellenvektor ist. Im freien Raum (ohne Ränder) ist  $J = \mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$ , wobei alle  $k^i$  kontinuierlich sind. In Gegenwart von Metallplatten ist dies nicht der Fall. Im Folgenden wird die Notation  $x^1 \equiv x$ ,  $x^2 \equiv y$ ,  $x^3 \equiv z$  und  $k^1 \equiv k_x$ ,  $k^2 \equiv k_y$ ,  $k^3 \equiv k_z$  gewählt, um Verwirrung mit vierdimensionalen Größen zu vermeiden. Mit der  $z$ -Achse senkrecht zu den Platten bleiben die Komponenten  $k_x$  und  $k_y$  kontinuierlich, die Komponente  $k_z = k_{zn} = \pi n/a$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  wird dagegen diskret. Die zwei Polarisationen liefern einen Faktor 2. So kann schließlich die Vakuumenergie des elektromagnetischen Feldes zwischen zwei idealen Metallplatten ausgedrückt werden als

$$\mathcal{E}_0(a) = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{k_{\perp},n} S. \quad (23)$$

Dabei ist  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  die Projektion des Wellenvektors auf die Metallplatten (sie ist senkrecht zur  $z$ -Achse, das heisst senkrecht zur Richtung der Casimir-Kraft) und  $k_{\perp} = |\mathbf{k}_{\perp}| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ . Die Oszillatorfrequenzen sind gegeben durch

$$\omega_J = \omega_{k_{\perp},n} = c \sqrt{k_{\perp}^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}. \quad (24)$$

Führt man Polarkoordinaten ein und berücksichtigt, dass  $\omega_{k_{\perp},n}$  eine gerade Funktion von  $n$  ist, lässt sich Gleichung 23 umschreiben zu

$$\mathcal{E}_0(a) = \frac{\hbar}{2} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \left( 2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{k_{\perp},n} - ck_{\perp} \right) S. \quad (25)$$

Die entsprechende Vakuumenergie des elektromagnetischen Feldes im freien Minkowski-Raum im Volumen zwischen den Platten, jedoch ohne Rand-

bedingungen, ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_{0M}(a) = \hbar a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \omega_k S, \quad (26)$$

wobei

$$\omega_k = c|\mathbf{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (27)$$

und die Multiplikation mit dem Faktor zwei die beiden Polarisationen des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt. Gleichung 26 lässt sich damit umformen in

$$\mathcal{E}_{0M}(a) = \frac{\hbar a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_z \omega_k S. \quad (28)$$

Entsprechend den Gleichungen 25 und 28 ist die Casimir-Energie pro Fläche definiert als

$$\begin{aligned} E(a) &\equiv \frac{\mathcal{E}_0(a)}{S} - \frac{\mathcal{E}_{0M}(a)}{S} \\ &= \hbar \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{k_{\perp},n} - \frac{ck_{\perp}}{2} - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \omega_k \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Einsetzen der Gleichungen 24 und 27 und Einführung einer neuen Variablen  $t = ak_z/\pi$ , liefern

$$E(a) = \frac{\pi \hbar c}{a} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 a^2}{\pi^2} + n^2} - \int_0^{\infty} dt \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 a^2}{\pi^2} + t^2} - \frac{ak_{\perp}}{2\pi} \right). \quad (30)$$

Die Differenz zwischen der unendlichen Summe und dem unendlichen Integral in Gleichung 30 wird mit der Abel-Plana-Formel (Kapitel 2.2 in [6], siehe auch Anhang) berechnet. Die Anwendung dieser Formel führt zur Casimir-Energie zwischen den Platten

$$E(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{a^3} \int_0^{\infty} y dy \int_y^{\infty} \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (31)$$

wobei die dimensionslose Variable  $y = k_{\perp} a/\pi$  anstatt  $k_{\perp}$  eingeführt wurde. Hier ist anzumerken, dass  $E(a)$  endlich ist. Das Resultat in Gleichung 31

hängt nicht von der spezifischen Form der Regularisierung ab, die angewendet wird, um die Größen  $E_0(a)/S$  und  $E_{0M}(a)/S$  in Gleichung 29 endlich zu machen. Um Gleichung 29 einzuschätzen, reicht es aus, den Grad der Integration zu ändern:

$$\begin{aligned} E(a) &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{a^3} \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \int_0^t y \sqrt{t^2 - y^2} dy \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{a^3} \frac{1}{3(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{e^v - 1} \end{aligned} \quad (32)$$

wobei eine weitere Variable,  $v = 2\pi t$ , eingeführt wurde. Nach Integration von Gleichung 32 erhält man in Übereinstimmung mit Gleichung 20:

$$E(a) \equiv E_{IM}(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}. \quad (33)$$

Wir können Gleichung 21 verwenden, um zu Gleichung 16 zu kommen. Hier wurde der Fall des zwischen zwei parallelen idealen Metallplatten eingeschlossenen elektromagnetischen Vakuums behandelt. In diesem Fall erhält man das Endergebnis durch Entfernen der Energie des freien Minkowski-Raumes durch Anwendung der Abel-Plana-Formel. In komplizierteren Konfigurationen ist das Ergebnis nach dem Entfernen des Beitrags durch den Minkowski-Raum im Allgemeinen unendlich, so dass zusätzlich eine Renormierung ausgeführt werden muss.

### 3.3.2. *Fluktuationen und der physikalische Ursprung von Van-der-Waals-Kräften und der Casimirkraft*

Die folgende Darstellung folgt Klimchitskaya et al. [34]. Langreichweitige, nichtgravitative Kräfte zwischen elektrisch neutralen Atomen, zwischen einem Atom und einem Makrokörper sowie zwischen Makrokörpern sind seit Jahrhunderten Gegenstand von Diskussionen. Doch erst mit der Entwicklung der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie wurde die physikalische Natur dieser Kräfte deutlich und erstmals quantitative Ergebnisse erzielt. Der Ursprung sowohl der Van-der-Waals- als auch der Casimirkraft ist mit der Existenz von Quantenfluktuationen verbunden. Für ein unpolares Atom

ist der Mittelwert des Dipolmoments im Grundzustand gleich Null. Aufgrund von Quantenfluktuationen gilt dies nicht für das Quadrat des Dipolmoments. Dies führt zu *Dispersionskräften*. Dieser Begriff schließt Van-der-Waals- und Casimirkraft ein.

Bei geringen Abständen unterhalb der Absorptionswellenlänge (1 Å bis wenige Nanometer) sind Bremsungseffekte zu vernachlässigen. Man spricht hier typischerweise von Van-der-Waals-Kräften. Es handelt sich dabei um ein nichtrelativistisches Quantenphänomen. Dieses wurde erstmals von London (1930) beschrieben, man spricht daher auch von den London'schen Dispersionskräften. Ein von einem Atom emittiertes virtuelles Photon erreicht dabei ein weiteres Atom innerhalb seiner durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegebenen Lebensdauer.

Bei größeren Abständen fallen relativistische Bremsungseffekte ins Gewicht man spricht dann von Casimir-Polder-Kräften (bei Atom-Atom- und Atom-Wand-Wechselwirkungen) beziehungsweise von der Casimir-Kraft (zwischen zwei Makrokörpern). Diese sowohl relativistischen als auch quantenmechanischen Phänomene wurde erstmals von Casimir und Polder (1948) [7] beziehungsweise von Casimir (1948) [8] beschrieben. Es gibt zwei unterschiedliche Wege, sich der Casimir-Wechselwirkung zu nähern.

Im einen Fall lässt sich die Theorie des Casimir-Effektes auf elektromagnetische Fluktuationen im Gleichgewicht im Medium zurückführen. Diese Herangehensweise ist Grundlage der Lifschitz-Theorie welche sich mit Hilfe des Fluktuations-Dissipations-Theorems herleiten lässt.

Im zweiten Fall wird der Casimir-Effekt als Vakuum-Quanteneffekt aufgefasst, der aus dem Einfluss externer Bedingungen resultiert. Der Effekt wird dann mit der Quantenfeldtheorie beschrieben. Hier wird also mit Randbedingungen (an Stelle von Materialrändern) verfahren, welche das Quantisierungsvolumen beschränken und somit das Spektrum der Nullpunkts- und der thermischen Fluktuationen beeinflussen. Tatsächlich lassen sich beide Vorgehensweisen vereinbaren. So gibt es etwa Ableitungen der Lifschitz-Theorie, in der die Dispersionskräfte als Vakuum-Quanteneffekt betrachtet werden [34] (S. 1829).



### 3.3.3. Lifschitz-Theorie

Dieses Kapitel basiert zum größten Teil auf dem zwölften Kapitel aus *Advances in Casimir Effect* [6]. Anders als zuvor, geht es hier darum, die Casimir-Kraft zwischen unterschiedlichen, realen Materialien und nicht für idealisierte Ränder zu beschreiben. Für eine konsistente Theorie müssen elektrische, optische und mechanische Eigenschaften angemessen berücksichtigt werden. Die große Zahl verfügbarer Materialien und deren Eigenschaften macht dies zu einer großen Herausforderung. Ein umfassendes Review über Casimir-Kräfte zwischen realen Materialien wurde von Klimchitskaya et al. 2009 verfasst [34].

Es umfasst sowohl die theoretische Behandlung als auch Vergleiche dieser mit Experimenten. Die theoretische Basis einer vereinheitlichten Beschreibung von Van-der-Waals-Wechselwirkung und Casimir-Wechselwirkung für planare Dielektrika lieferte Lifschitz [38].

In der Physik der kondensierten Materie lassen sich alle Materialien als Dielektrika und Metalle einordnen abhängig von ihrer Leitfähigkeit bei der Temperatur  $T = 0$ . Dielektrika haben eine Leitfähigkeit von Null bei  $T = 0$ . Die unterschiedlichen Dielektrika werden weiter klassifiziert nach dem Verhalten der Elektronendichten von Zuständen  $N$  als Funktion der Elektronenenergie  $E_e$  bei  $T = 0$ .

Wenn  $N(E_F) = 0$ , wobei  $E_F$  die Fermienergie ist, und die Bandlücke groß ist im Vergleich zur thermischen Energie, dann heißt ein Material *Isolator*. Wenn  $N(E_F) = 0$ , die Bandlücke dagegen nicht so groß ist, dann spricht man von einem *intrinsischen Halbleiter*. Es gibt aber auch Dielektrika mit  $N(E_F) \neq 0$ , welche aufgrund von Elektronenkorrelation bei  $T = 0$  eine Leitfähigkeit Null besitzen. Diese Dielektrika heißen Mott-Hubbard-Dielektrika. Alle dotierten Halbleiter mit einer Dotierungskonzentration unterhalb des kritischen Wertes ( $n < n_{cr}$ ) sind ebenso Dielektrika. Bei  $T \neq 0$  haben alle Dielektrika eine Leitfähigkeit größer Null. Diese kann sowohl sehr klein (Isolatoren), als auch relativ groß (dotierte Halbleiter) sein. Metalle haben auch bei  $T = 0$  eine von Null verschiedene Leitfähigkeit. Halbleiter mit einer überkritischen Dotierungskonzentration verhalten sich wie Metalle.

Geometrische und Materialeigenschaften werden im oben genannten Re-

view behandelt [34]. In der Lifschitz-Theorie werden die Eigenschaften realer Materialien durch die frequenzabhängige Permittivität<sup>12</sup>  $\varepsilon(\omega)$  berücksichtigt. Diese wird mittels des komplexen Brechungsindex ausgedrückt als  $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$ . Beide Größen sind über große Frequenzbereiche messbar. In der Lifschitz-Theorie der Dispersionskräfte werden die freie Energie und andere thermodynamische Größen als Funktionale von  $\varepsilon(i\xi_l)$  dargestellt, wobei die Matsubara-Frequenzen<sup>13</sup> (thermische Feldtheorie)  $\xi_l = 2\pi k_B T l / \hbar$  für alle  $l = 0, 1, 2, \dots$  definiert sind, dabei ist  $k_B$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur.

Für die Anwendbarkeit der Theorie wird thermisches Gleichgewicht vorausgesetzt. Ursprünglich wurde die Lifschitz-Theorie für ideale Dielektrika vorgeschlagen, das heißt für Materialien mit der Leitfähigkeit Null bei allen Temperaturen. Tatsächlich haben alle Dielektrika bei Temperaturen größer Null eine kleine, aber physikalisch reale Gleichstromleitfähigkeit. Vernachlässigt man diese, so zeigt die Theorie eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Einbeziehung selbst kleinster, vernachlässigbarer Leitfähigkeiten führt zu großen thermischen Korrekturen. Hier liegt eine Schwachstelle in der theoretischen Beschreibung. Diese wurden bereits vielfach experimentell ausgeschlossen (Lamoreaux (1997), Decca, Fischbach et al. (2003), Decca, Lopez, Fischbach et al. (2005) und Decca et al. (2007)) [34] (S. 1830). Zudem verletzt die Einbeziehung das Nernst-Theorem und ist somit inkonsistent mit der Thermodynamik.

Um beispielsweise die Permittivität  $\varepsilon(i\xi)$  eines Metalls zu erhalten, verwendet man die tabellierten optischen Daten für den komplexen Brechungsindex und extrapoliert sie mit Hilfe der Drude-Theorie bis zur Frequenz Null. Im Allgemeinen lässt sich die Permittivität für das Plattenmaterial entlang der imaginären Frequenzachse aus dem Imaginärteil der komplexen Permittivität  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$  und den Kramers-Kronig-Relationen erhalten. Der Imaginärteil der Permittivität ist durch  $\varepsilon''(\omega) = 2n'(\omega)n''(\omega)$  gegeben, wobei  $n'(\omega)$  und  $n''(\omega)$  der Real- und Imaginärteil des komplexen Brechungsindex

---

<sup>12</sup>auch dielektrische Leitfähigkeit

<sup>13</sup>diskret und imaginär

xes sind. Eine ausführliche Tabellierung der optischen Daten für  $n'(\omega)$  und  $n''(\omega)$  liefert Palik (1985)[52]. In Abbildung 11 ist beispielhaft die Permittivität von Gold dargestellt, berechnet mit zwei unterschiedlichen theoretischen Ansätzen.

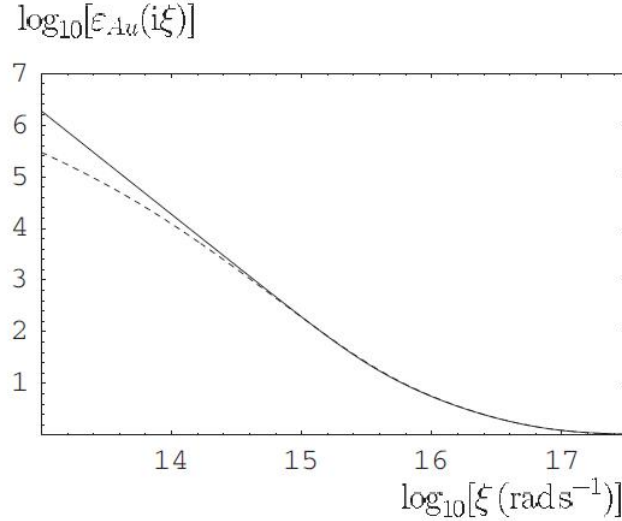


Abbildung 11: Die Permittivität von Gold entlang der imaginären Frequenzachse. Die durchgezogene Linie wurde mit dem allgemeinen *plasmalike model* erstellt. Dabei wurden optische Daten im Zusammenhang mit den Core-Elektronen verwendet. Die gestrichelte Linie wurde erhalten durch Extrapolation optischer Daten zu niedrigen Frequenzen mittels Drude-Theorie [34] (S.1843).

Die Lifschitz-Theorie stimmt mit dem Fall idealer Metalle überein, wenn das Limit  $\varepsilon(i\xi) \rightarrow \infty$  gebildet wird bevor  $\xi \rightarrow 0$  [34].

Die Lifschitz-Formel wird hergeleitet, ausgehend von der Nullpunktsenergie des elektromagnetischen Feldes, in Gegenwart von dielektrischen Halbräumen. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen ergibt sich die Lifschitz-Formel bei der Temperatur  $T=0$  gemäß [6] (S.282-290) zu

$$\begin{aligned}
 E(a) = & \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_0^\infty d\xi \{ \ln [1 - r_{TM}^2(i\xi, k_\perp) e^{-2qa}] \\
 & + [1 - r_{TE}^2(i\xi, k_\perp) e^{-2qa}] \}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

dabei sind

$$r_{TM}(i\xi, k_{\perp}) = \frac{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, k_{\perp}) - k(i\xi, k_{\perp})}{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, k_{\perp}) + k(i\xi, k_{\perp})}$$

und

$$r_{TE}(i\xi, k_{\perp}) = \frac{q(i\xi, k_{\perp}) - k(i\xi, k_{\perp})}{q(i\xi, k_{\perp}) + k(i\xi, k_{\perp})}$$

die bekannten Fresnel-Reflexionskoeffizienten mit  $q^2 = q^2(i, \xi, k_{\perp}) = k_{\perp}^2 + \frac{\xi^2}{c^2}$  und  $k^2 = k^2(i\xi, k_{\perp}) = k_{\perp}^2 + \varepsilon(i\xi)\frac{\xi^2}{c^2}$ , mit dem Abstand  $a$ . Mit  $P(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a}$  ergibt sich der Casimir-Druck zu

$$P(a) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_0^{\infty} d\xi q \left\{ [r_{TM}^2(i\xi, k_{\perp})e^{-2qa} - 1]^{-1} + [r_{TE}^2(i\xi, k_{\perp})e^{-2qa} - 1]^{-1} \right\}. \quad (35)$$

Für große Abstände  $a \gg \lambda_0$ , mit  $\lambda_0$  der charakteristischen Absorptionswellenlänge des dielektrischen Materials,  $\varepsilon \rightarrow \infty$  erhält man aus Gleichung 35 den Fall idealer Metallplatten.

Die Lifschitz-Formel lässt sich weiter verallgemeinern für den Fall von Temperaturen ungleich Null. Sie ergibt sich dann gemäß [6] (S. 296) zu:

$$\mathcal{F}(a, T) = \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \left\{ \ln [1 - r_{TM}^2(i\xi_l, k_{\perp})e^{-2aq_l}] + \ln [1 - r_{TE}^2(i\xi_l, k_{\perp})e^{-2aq_l}] \right\}, \quad (36)$$

wobei die Reflexionskoeffizienten gegeben sind durch

$$r_{TM}(i\xi_l, k_{\perp}) = \frac{\varepsilon_l q_l - k_l}{\varepsilon_l q_l + k_l}, \quad r_{TE}(i\xi_l, k_{\perp}) = \frac{q_l - k_l}{q_l + k_l}, \quad (37)$$

mit

$$q_l^2 = k_{\perp}^2 + \frac{\xi_l^2}{c^2}, \quad k_l^2 = k_{\perp}^2 + \varepsilon_l \frac{\xi_l^2}{c^2}, \quad \varepsilon_l = \varepsilon(i\xi_l), \quad (38)$$

wobei  $\xi_l$  die Matsubara-Frequenzen gemäß thermischer Feldtheorie sind. Der Casimir-Druck ergibt sich demnach zu

$$P(a, T) = -\frac{k_B T}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} q_l k_{\perp} dk_{\perp} \left\{ [r_{TM}^{-2}(i\xi_l, k_{\perp}) e^{2aq_l} - 1]^{-1} + [r_{TE}^{-2}(i\xi_l, k_{\perp}) e^{2aq_l} - 1]^{-1} \right\}. \quad (39)$$

Weiter lassen sich geschichtete und magnetische Medien beschreiben und die Oberflächenrauigkeit in die Beschreibung einbeziehen. Ausführlich werden diese Themen in *Advances in Casimir Effect* (2009) [6] in den Kapiteln 12-17 sowie im Review *The Casimir force between real materials: Experiment and theory* (2009) [34] behandelt.

### 3.3.4. Rechnerische Ergebnisse für typische Dielektrika

Wie bereits in Abschnitt 3.3.3 erwähnt, wird für die Berechnung des Casimir-Drucks zwischen zwei dielektrischen Platten die Permittivität entlang der imaginären Frequenzachse benötigt. Diese wurden in [6] (S. 310) für einen Halbleiter (Si) und einen Isolator ( $\text{SiO}_2$ ) berechnet. Sie sind in Abbildung 12 dargestellt.

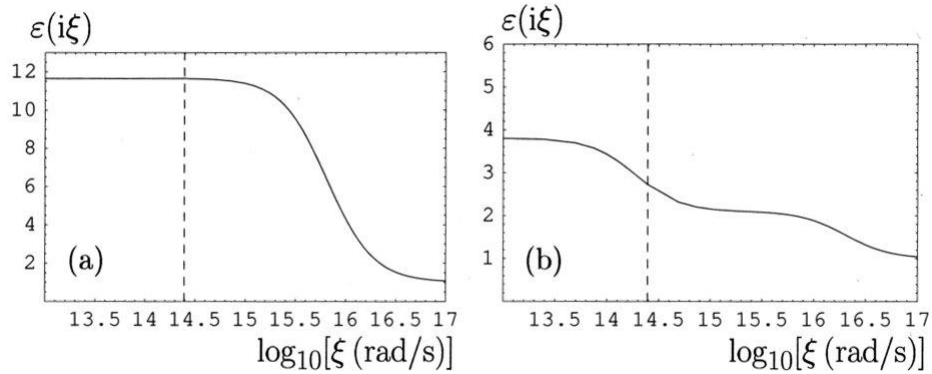


Abbildung 12: Die Permittivitäten entlang der imaginären Frequenzachse als Funktionen vom Logarithmus der Frequenz für (a) *Si* und (b) *SiO<sub>2</sub>*. Die gestrichelten Linien zeigen die Position der ersten Matsubara-Frequenz bei  $T = 300\text{K}$  [6].

Daraus wurden mit Gleichung 36 und 39 die freie Casimirenergie pro

Flächeneinheit und der Casimirdruck berechnet.

$a$ ( $\mu\text{m}$ )	Si		Vitreous SiO <sub>2</sub>	
	$T = 0$	$T = 300\text{ K}$	$T = 0$	$T = 300\text{ K}$
0.1	120.39	120.43	22.954	23.020
0.2	15.930	15.958	3.3234	3.3473
0.3	4.7850	4.8070	1.0884	1.1032
0.4	2.0292	2.0471	0.49558	0.50662
0.5	1.0416	1.0566	0.26964	0.27858
0.6	0.6036	0.6165	0.16400	0.17157
0.7	0.3804	0.3916	0.10766	0.11425
0.8	0.2550	0.2649	0.74717	0.80556
0.9	0.1792	0.1880	0.05409	0.05934
1.0	0.1306	0.1386	0.04048	0.04525

Tabelle 1: Größe der freien Casimirenergie pro Flächeneinheit ( $nJm^{-2}$ ) bei zwei verschiedenen Temperaturen  $T=0$  und  $T=300\text{K}$ , als Funktion des Abstandes [6](S. 313).

$a$ ( $\mu\text{m}$ )	Si		Vitreous SiO <sub>2</sub>	
	$T = 0$	$T = 300\text{ K}$	$T = 0$	$T = 300\text{ K}$
0.1	3457.95	3458.07	643.896	644.985
0.2	235.24	235.32	45.966	46.119
0.3	47.478	47.523	9.9445	9.9978
0.4	15.149	15.183	3.3818	3.4088
0.5	6.2306	6.2553	1.4703	1.4869
0.6	3.0116	3.0304	0.74571	0.75713
0.7	1.6279	1.6425	0.42032	0.42878
0.8	0.9551	0.9667	0.25583	0.26240
0.9	0.5966	0.6060	0.16507	0.17037
1.0	0.3916	0.3993	0.11151	0.11588

Tabelle 2: Größenordnung des Casimirdrucks (mPa) bei zwei verschiedenen Temperaturen,  $T=0$  und  $T=300\text{K}$ , als Funktion des Abstandes [6](S. 314).

Die Ergebnisse sind in Abbildung 13 dargestellt.

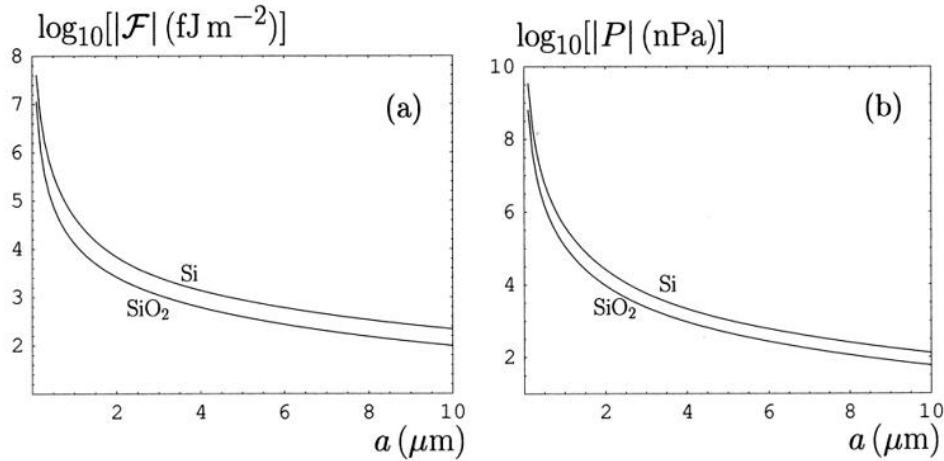


Abbildung 13: Logarithmus der (a) freien Casimirenergie pro Flächeneinheit und (b) des Casimirdrucks für eine Konfiguration von zwei Halbräumen aus *Si* und *SiO<sub>2</sub>* bei  $T=300\text{K}$  als Funktion vom Abstand [6](S. 313).

Bei einem Blick auf die Tabellen 1 und 2 fällt auf, dass die thermischen Korrekturen bei Raumtemperatur noch kaum ins Gewicht fallen ( $< 5\%$ ). Vergleicht man die Werte aus Tabelle 2 mit Werten, die gemäß Gleichung 16 für ideale Metallplatten berechnet wurden (Tabelle 3),

$a[\mu\text{m}]$	<i>Si</i> [mPa]	<i>SiO<sub>2</sub></i> [mPa]	<i>IM</i> [mPa]
0,1	3457,95	643,896	128.000
1	0,3916	0,11151	12,8

Tabelle 3: Casimirdruck bei 0,1 und 1 $\mu\text{m}$  für *Si*, *SiO<sub>2</sub>* und *IM*

so zeigt sich, dass der Wert des Casimirdrucks beim Halbleiter etwa um einen Faktor fünf über dem des Isolators liegt. Der Wert des Drucks für ein ideales Metall liegt wiederum um einen Faktor 30-40 über dem Wert des Halbleiters, was wiederum das 150 bis 200-fache des Casimirdrucks beim Isolator ausmacht. Die Casimirkraft lässt sich also durch die Wahl des Materials über etwa zwei Größenordnungen variieren. Der Wert der Casimirkraft korreliert dabei mit der Permittivität des verwendeten Plattenmaterials. Eine geringere Permittivität verursacht eine schwächere Casimirkraft.

### 3.3.5. repulsiver Casimir-Effekt

Wie schon 1961 von Dzyaloshinskii et al. [13] vorhergesagt, ist prinzipiell auch ein repulsiver Casimir-Effekt realisierbar. Der experimentelle Nachweis gelang erst im Jahr 2009 durch Munday et al. [45]. Um einen repulsiven Effekt zu erhalten müssen die Terme

$$-(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \quad (40)$$

positiv werden, wobei  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die Permittivitäten der interagierenden Körper und  $\varepsilon_3$  die Permittivität des dazwischen liegenden Mediums ist. Für den Fall  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  sind diese Terme negativ und führen zu einer anziehenden Kraft [45]. Wenn die Permittivität des Mediums gemäß,

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \quad (41)$$

zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  liegt, liefern die Terme aus Gleichung 40 ein positives Vorzeichen und dementsprechend eine repulsive Kraft. Zhao et al. [74] konnten zeigen, dass sich mittels Metamaterialien theoretisch auch ein repulsiver Casimir-Effekt im Vakuum erzielen ließe.

### 3.4. Van-der-Waals-Kräfte

Für den Fall kleiner Abstände, das heißt  $a \ll \lambda_0$ , wobei  $\lambda_0$  die charakteristische Absorptionswellenlänge des dielektrischen Materials ist, geht Gleichung 35 mit der neuen Variablen  $y = 2aq$  gemäß [6] (S. 290) über in

$$P(a) = -\frac{H}{6\pi a^3}, \text{ mit } H = \frac{3\hbar}{8\pi} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty y^2 dy \left\{ \left[ \frac{\varepsilon(i\xi) + 1}{\varepsilon(i\xi) - 1} \right] e^y - 1 \right\}^{-1} \quad (42)$$

Dabei ist H die sogenannte Hamakerkonstante.

Die Van-der-Waals-Kräfte werden auch oft zusammengesetzt aus Keesom-Kräften (Dipol-Dipol-Wechselwirkung), Debye-Kräften (Wechselwirkung Dipol-induzierter Dipol) und London-Kraft oder auch Londonsche Dispersionskräf-



te<sup>14</sup> (Kraft zwischen transienten Dipolen). Ausführlich behandelt werden diese Kräfte in [28].

---

<sup>14</sup>oft auch Van-der-Waals-Kraft im engeren Sinne

#### 4. Bisher durchgeführte Experimente und resultierende Beschränkungen

Im Jahr 1974 publizierte Daniel Long einen Aufsatz mit dem Titel: *Why do we believe Newtonian gravitation at laboratory dimensions?* [39].

Er verglich darin Messungen von  $G$  seit 1894 bei unterschiedlichen Abständen  $r$ . Seine Auftragung von gemessenen Werten für  $G$  als Funktion von  $r$  legte eine Abstandsabhängigkeit nahe. Zwei Jahre später veröffentlichte er eigene mit einer Torsionswaage gewonnene Messergebnisse bei Abständen von 4,5 cm und 29,9 cm, die diesen Schluss zu bestätigen schienen. Infolgedessen gab es Anstrengungen Anderer, diese ISLV zu bestätigen mit dem Ergebnis, dass die von Long scheinbar gefundene Abweichung für Abstände größer als 1 mm ausgeschlossen wurde [48]. Es ist wahrscheinlich, dass Longs Experiment einen systematischen Fehler enthielt durch Apparatverkippen im Bezug auf die Quellmassenposition. Dieses Problem tritt häufig in Gravitationsexperimenten mit Torsionspendeln auf [48].

Einen umfangreichen Überblick über die bisher durchgeführten Experimente zur Überprüfung Newtons Quadratabstandsgesetzes im Abstandsreich unter 1 mm liefert das 2009 verfasste Review von Newman et al. [48] mit Schwerpunkt auf den aktuellen Experimenten seit 2003.

Die im Zeitraum von 1995 bis 2003 durchgeführten Experimente werden durch das Review von Adelberger et al. abgedeckt [2]. Dieses enthält zudem einen Überblick über die unterschiedlichen theoretischen Motivationen (Kapitel 2). Die folgende Darstellung wird sich an diesen Reviews orientieren, wobei einzelne Experimente ausführlicher anhand der Originalquellen dargestellt werden. Es werden dabei sowohl abgeschlossene wie laufende und mögliche künftige Experimente behandelt. Vorwegzunehmen ist, dass bisher keine Abweichungen von Newtons  $1/r^2$ -Gesetz gemessen wurden.

#### 4.1. ISLV-Experimente bei Abständen größer 1 mm

Das erste Experiment, das offenbar den von Long beschriebenen Effekt ausschloß wurde von Spero et al. an der *University of California* in Irvine durchgeführt und 1980 veröffentlicht [64]. Die gewonnenen Beschränkungen sind in Abbildung 15 mit “Irvine 1” markiert. Der von Spero et al. verwendete Aufbau ist in Abbildung 14 dargestellt. Das durchgeführte Experiment war ein “nahe Null”-Experiment, was sich den Fakt zu Nutze machte, dass für ein  $1/r^2$ -Kraftgesetz das Gravitationsfeld innerhalb einer unendlichen Massenröhre<sup>15</sup> verschwindet. Der kleine Randeffekt durch die endliche Länge der Röhre ( $\approx 1\%$ ) wurde größtenteils aufgehoben durch einen Kupferring, der während der Bewegung der Röhre von der einen Seite der Testmasse zur anderen bewegt wurde. Röhre, Testmasse und Torsionspendel befanden sich im Vakuum.

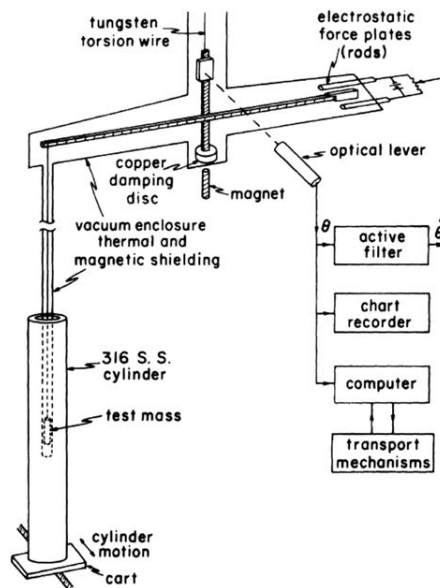
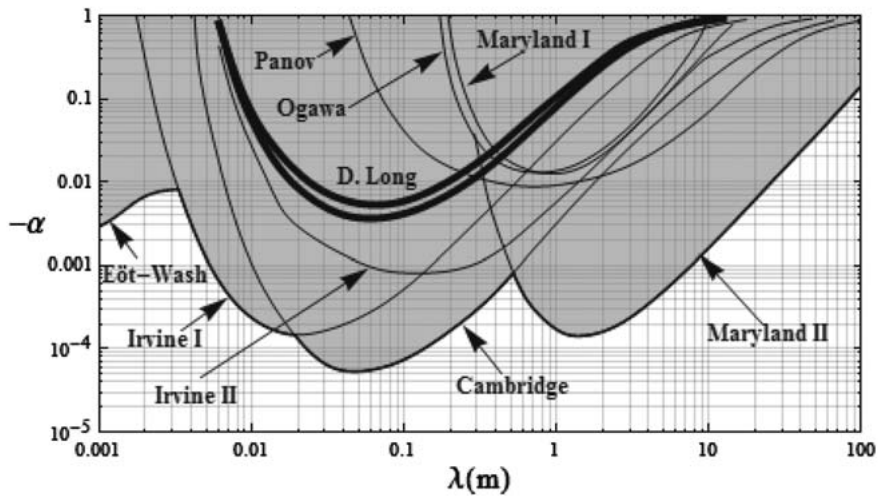


Abbildung 14: Vorrichtung des ersten Irvine ISLV-Experiments. Gezeigt ist eine Testmasse, die das Gravitationsfeld innerhalb einer 60 cm hohen Röhre ( $\varnothing$  innen 6 cm,  $\varnothing$  außen 8 cm) sondiert. Der hier sondierte Bereich liegt etwa bei  $\lambda \approx 10$  cm [64].

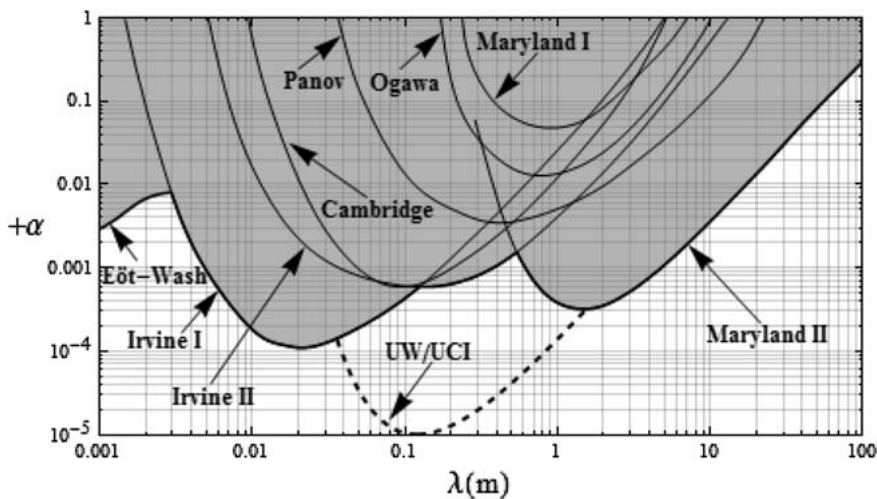
Andere Experimente für große Längenskalen werden ausführlich in [17]

<sup>15</sup>Analog zu einer massiven Kugelschale

besprochen. In dieser Arbeit wird der Schwerpunkt auf kleinere Abstände ( $>1$  mm) gelegt. Die empfindlichsten Messergebnisse sind gemäß [48] in Abbildung 15 graphisch dargestellt.



(a) Experimentelle Obergrenzen für eine Yukawa-artige Wechselwirkung mit  $\lambda > 1$  mm und negativen  $\alpha$  mit den  $1\sigma$  Beschränkungen (fett gedruckte Linien) des von Longs Experiment behandelten Parameterraums. Alle anderen Linien sind ebenfalls  $1\sigma$ -Limits, bis auf Eöt-Wash ( $2\sigma$ -Limit für  $|\alpha|$ ).



(b) Experimentelle Obergrenzen für eine Yukawa-artige Wechselwirkung mit  $\lambda > 1$  mm und positiven  $\alpha$  mit den  $1\sigma$  Beschränkungen (fett gedruckte Linien) des von Longs Experiment behandelten Parameterraums. Alle anderen Linien sind ebenfalls  $1\sigma$ -Limits, bis auf Eöt-Wash ( $2\sigma$ -Limit für  $|\alpha|$ ).

Abbildung 15: Experimentelle Obergrenzen für Abstände größer 1 mm. Referenzen sind in [48] angegeben.

Beschränkungen für Yukawa-Modifikationen des Gravitationsgesetzes im Bereich größer als 1 cm sind in Abbildung 16 dargestellt.

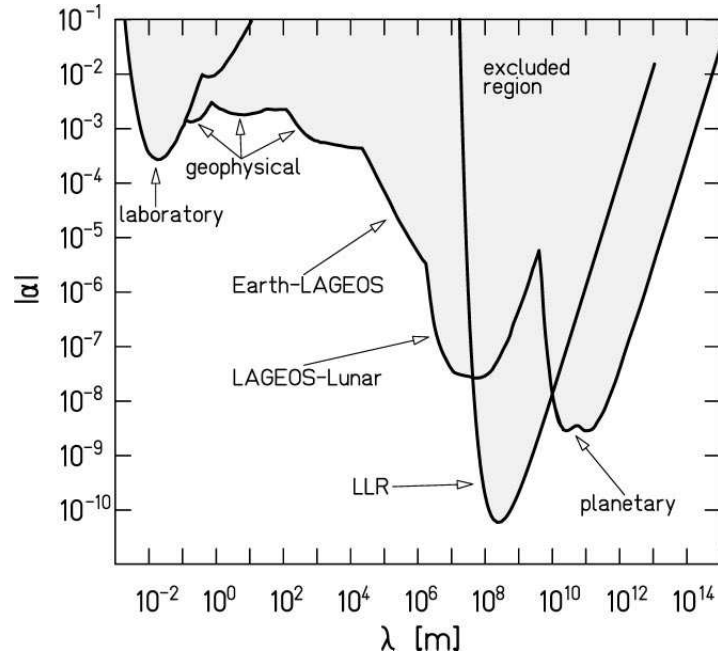


Abbildung 16:  $2\sigma$ -Beschränkungen für Verletzungen des inversen Quadratabstandsgesetzes der Yukawa-Form mit  $\lambda > 1$  cm [2] (S. 104). Angaben zu den einzelnen Kurven sind in [17] enthalten.

#### 4.2. ISLV-Experimente bei Abständen von 1 $\mu\text{m}$ bis 1 mm

Für Abstände von 9,53 mm bis hinunter zu 55  $\mu\text{m}$  wurden die besten Beschränkungen bisher von der “Eöt-Wash”-Gruppe gemessen [27, 26, 32]. Die von ihnen verwendete Torsionswaage mit “fehlender Masse” ist in Abbildung 17 dargestellt.

Der Aufbau besteht aus einem Torsionspendel-Detektor, der an einer etwa 80 cm langen Wolframfaser über einem mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Attraktor aufgehängt ist. Die 42 Detektor-“Testmassen” bilden zylindrische Löcher (4,767 mm  $\varnothing$ ), die in den etwa 1 mm dicken Molybdän-Detektorring eingearbeitet sind. Die Lochmittelpunkte sind in zwei Ringen mit jeweils 21-facher azimuthaler Symmetrie angeordnet. Der Attraktor besteht aus einer gleichdicken Molybdänplatte mit der gleichen 21-fachen

azimutalen Symmetrie, jedoch mit etwas kleinerem Durchmesser. Diese ist montiert auf einer dickeren Tantalplatte mit 21 Löchern ( $6,352 \text{ mm } \varnothing$ ).

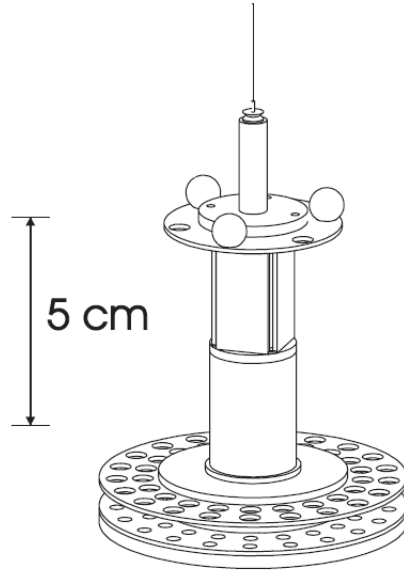


Abbildung 17: Maßstabgerechte Zeichnung von Detektor und Attraktor des Experiments von Kapner et al. [32]. Die drei kleinen Kugeln am Kopfende des Detektors wurden zur kontinuierlichen Kalibrierung der Torsionswaage genutzt. Die vier rechtwinkligen Spiegel unterhalb der Kugeln dienen zur Detektion der Verdrehung mittels Autokollimator. Die elektrische Abschirmung ist nicht gezeigt. Getestet wurden Abstände bis hinunter zu  $55 \mu\text{m}$ . Die Größe möglicher Extradimensionen wurde damit auf  $R \leq 44 \mu\text{m}$  beschränkt.

Die gravitative Wechselwirkung zwischen den fehlenden Massen bewirkt ein Drehmoment auf den Detektor, das 21 mal pro Umdrehung des Attraktors oszilliert. Dies liefert Drehmomente bei  $21\omega$ ,  $42\omega$ ,  $63\omega$ , etc. Die resultierende Pendeldrehung wurde durch ein Autokollimatorsystem gemessen. Die Löcher im unteren Attraktoring wurden azimutal um  $360/42^\circ$  verschoben und sind derart konzipiert, dass sie das  $21\omega$ -Drehmoment annähernd aufheben, wenn Newtons  $1/r^2$ -Gesetz Gültigkeit behält.

Eine Verletzung, die hier als einfache Yukawa-Wechselwirkung parametrisiert wurde, würde nicht aufgehoben wenn  $\lambda$  kleiner als die 1 mm Dicke der oberen Attraktorscheibe wäre.

Um elektromagnetische Drehmomente zu minimieren wurde der gesamte

Detektor mit Gold beschichtet und mit einer  $10\ \mu\text{m}$  dicken, fest gespannten Beryllium-Kupfer-Membran<sup>16</sup> umgeben. Zusätzlich wurde der Aufbau mit einem Kupfergehäuse umgeben mit kleinen Löchern für die Faser und den Autokollimator-Strahl. Das gesamte System wurde im Vakuum ( $\approx 10^{-6}\text{Torr}$ ) bei kontrollierter Temperatur und magnetisch abgeschirmt betrieben.

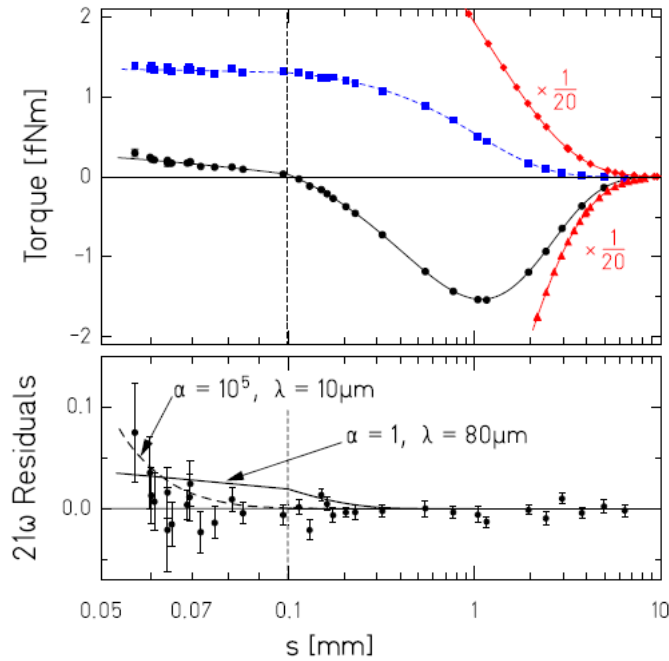


Abbildung 18: Experimentelle Drehmomente als Funktion des vertikalen Abstands  $s$ . Die horizontale Skala ist unterhalb von  $s=100\ \mu\text{m}$  gestreckt. Im oberen Kästchen sind die  $21\omega$ - (schwarz) und  $42\omega$ -Drehmomente (blau) gezeigt. Die Dreiecke (Karus) in rot, zeigen das  $21\omega$ -Drehmoment von der oberen (unteren) Attraktorplatte allein. Im unteren Kästchen sind die restlichen  $21\omega$  Beiträge gezeigt. Die durchgezogene und gestrichelte Linie zeigen die Residuen, die man bei  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 80\ \mu\text{m}$  beziehungsweise bei  $\alpha = 10^5$ ,  $\lambda = 10\ \mu\text{m}$  Yukawa-Wechselwirkungen erwarten würde. Beide werden durch die vorliegenden Ergebnisse ausgeschlossen [32].

Messergebnisse, die neben den  $21\omega$  und  $42\omega$ -Drehmomenten (oberer Kasten) die Restbeiträge für  $21\omega$  (unterer Kasten) zeigen, sind in Abbildung 18 dargestellt. Damit wurde etwa der Bereich von  $\lambda = 80\ \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 1$  ausge-

<sup>16</sup>Diese schirmt auch die Casimir-Wechselwirkung ab, so dass diese vernachlässigt werden kann.

schlossen. Das Experiment schließt zudem die Möglichkeit zweier kompakter gleichgroßer Extradimensionen im ADD-Szenario ( $M^* = 1 \text{ TeV}$ ) aus.

Ein vergleichbarer Abstandsbereich wurde von Tu et al. [66] abgedeckt. Sie untersuchten mit dem in Abbildung 19 dargestellten Torsionspendel den Bereich von 176 bis 341  $\mu\text{m}$ . Dabei wurden Beschränkungen auf  $|\alpha| = 1$  mit einem 95% Konfidenzniveau bis hinunter zu  $\lambda = 66 \mu\text{m}$  ermittelt. Dabei wurden die Testmasse und das Gegengewicht des Torsionspendels durch eine 56  $\mu\text{m}$  Glasmembran mit 300 nm Gold auf jeder Seite von der PZT-getriebenen (Blei-Zirkonat-Titanat *engl. Plumbum Zirconate Titanate*) Quellmasse separiert. Der Aufbau wurde so konzipiert, dass newtonsche Gravitation sich aufhebt. Gemessen wird also ein newtonsches Signal nahe Null. Perfekte Aufhebung lieferte der Aufbau nominell bei 250  $\mu\text{m}$  [66].

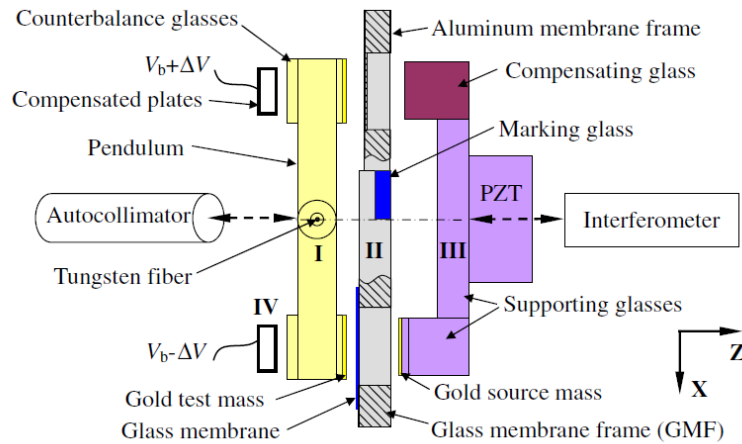
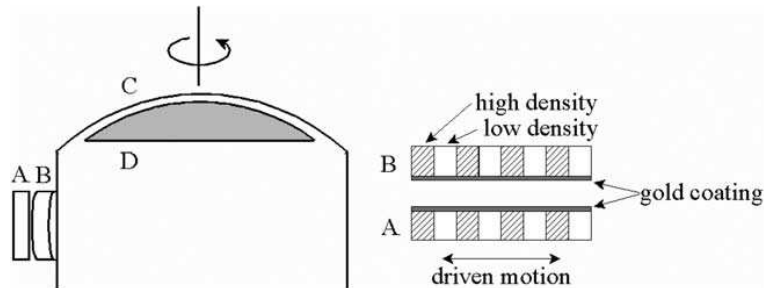


Abbildung 19: Schematische Darstellung des von Tu et al. verwendeten experimentellen Aufbaus. Er besteht aus vier Teilen. Gezeigt ist das Pendel mit Testmasse und Gegengewicht (I), ein Rahmen, der goldbeschichtete Membranen zur Abschirmung elektrostatischer Wechselwirkung trägt (II), ein PZT-getriebener bewegter Rahmen, der die Quellmasse und eine Masse trägt, um die newtonsche Wechselwirkung weitgehend zu kompensieren (III) und elektrostatisch kompensierende Platten, um die torsionale Verkippung zu nullen (IV). Die Quellmasse bewegt sich in z-Richtung. Ihre Translation und die Rotation des Pendels werden mit Interferometer und Autokollimator bestimmt [66].

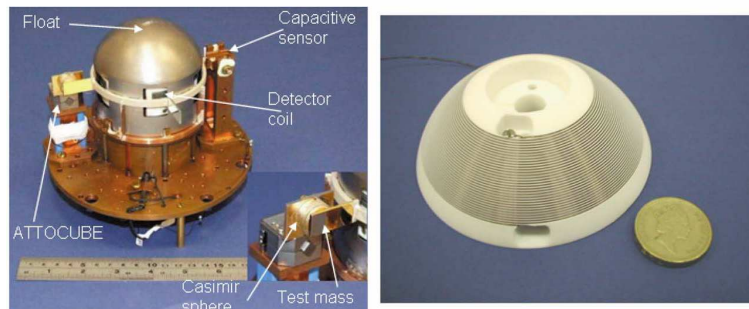
Clive Speake und seine Mitarbeiter an der Universität von Birmingham entwickeln seit einiger Zeit (2009 [48]) einen submillimeter ISLV-Test auf der



Basis einer neuen supraleitenden Torsionswaage [24] (Abbildung 20).



(a) Schematische Querschnitt-Darstellung aus [48]. Eine supraleitende Niobiumkappe mit sphärischer Oberfläche (C) (siehe auch Abbildung (b) rechts) ist frei schwebend über einem stromführenden spiralen Niobiumdraht gelagert, der in ein MACOR Lager (Radius 43 mm) mit sphärischer Oberfläche integriert ist (D). Eine Anordnung von Metallriegeln unterschiedlicher Dichte (B) ist auf der Torsionswaage montiert. Eine ähnliche Anordnung von Quellmassen (A) wird parallel in eingezeichneter Richtung mit der Frequenz  $\omega$  bewegt. Dadurch werden Drehmomente bei vielfachen von  $\omega$  auf die Torsionswaage ausgeübt [48].



(b) Fotografien der Hauptkomponenten der Torsionswaage von Hammond et al. [24]. Der Aufbau soll auch für Messungen der Casimirkraft genutzt werden, was an dieser Stelle nicht näher erläutert werden soll.

Abbildung 20: Schematische (a) und fotografische Darstellung (b) der von Hammond et al. [24] verwendeten Torsionswaage.

Die geplante Beschränkung liegt bei  $\alpha = 1$  und  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  (Abbildung 27).

Ein Experiment, das kein Torsionspendel beinhaltet, wird von Ho Jung Paik et al. in Maryland durchgeführt. Ergebnisse wurden noch nicht veröffentlicht. Der ungefähre Aufbau ist in Abbildung 21 dargestellt [48]. Eine

Prognose der mit diesem Experiment messbaren Beschränkungen ist ebenfalls in Abbildung 27 gegeben. Sie könnten demnach neue Beschränkungen liefern im Bereich  $\lambda = 10 - 100 \mu\text{m}$ .

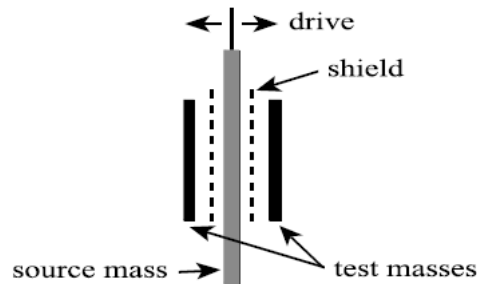


Abbildung 21: Prinzip des Maryland ISLV-Tieftemperaturinstruments. Die Quellmassenscheibe (source mass) wird bei der Frequenz  $\omega$  wie eingezeichnet getrieben. Die gefederten Testmassen erfahren eine differentielle Kraft bei  $2\omega$ , welche bei unendlicher Scheibengröße und rein newtonscher Wechselwirkung Null wäre. Die detektierte differentielle Kraft ist somit eine direkte Messung von ISLV. Die differentielle Verschiebung der Testmassen wird mit einer SQUID-basierten Technik gemessen, die bereits bei einem 1993 durchgeführten ISLV-Experiment [42] verwendet wurde [48].

Joshua C. Long arbeitet an der *Indiana University* weiter an einem Experiment, das er zusammen mit John Price an der *University of Colorado* entwickelt hat [40]. Dabei wird die Resonanzantwort eines die Testmasse tragenden Cantilevers auf die sich darunter auf und ab bewegende Quellmasse gemessen (Abbildung 22).

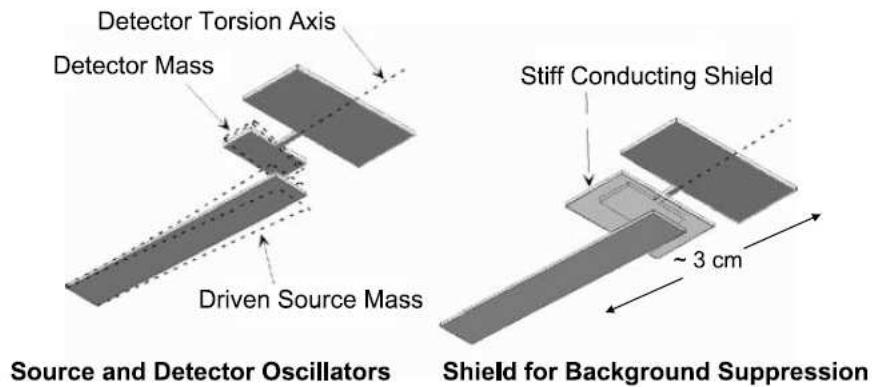


Abbildung 22: Prinzip der ISLV-Test-Apparatur von Josh Long [40]. Ein PZT-Biegeschwinger (Bimorph) lässt eine Wolfram Quellmasse bei  $\sim 1$  kHz schwingen, der Resonanzfrequenz eines doppelt drehbaren Wolframoszillators, der als Testmasse dient. Eine dünne Saphirplatte mit 100 nm Gold auf beiden Seiten wird zwischen Quell- und Testmasse gebracht. Ein kapazitiver Sensor misst die Amplitude der Torsionsschwingung. Die Quell- und Testmassensysteme sind unabhängig voneinander auf Vibrations-Isolations-Stapeln montiert, die die Vibration jeweils um einen Faktor  $10^{10}$  bei 1 kHz abschwächen [48].

Von Long anvisierte Beschränkungen sind in Abbildung 27 gezeigt.

Die bisher besten Beschränkungen für  $\alpha$  und  $\lambda$  für attraktive masseabhängige Kräfte auf der Längenskala zwischen  $5 \mu\text{m}$  und  $100 \mu\text{m}$  wurden in Stanford von der Gruppe um Aharon Kapitulnik gemessen [9, 61, 19]. Smulin et al. [61] und Geraci et al. [19] arbeiteten noch mit dem in Abbildung 23 gezeigten Aufbau.

Weld et al. [70] haben basierend auf den vorherigen Experimenten in der Folge dieser Arbeiten eine neue Apparatur designt (Abbildung 24). Mit dieser wurden bereits ähnlich gute Beschränkungen wie mit der Apparatur aus Abbildung 23 erreicht. Es laufen Anstrengungen, das Experiment weiter zu verbessern. Allerdings erreicht das Experiment gemäß [70] bald sein thermisches Limit. Dieses ist in Abbildung 27 eingezeichnet.

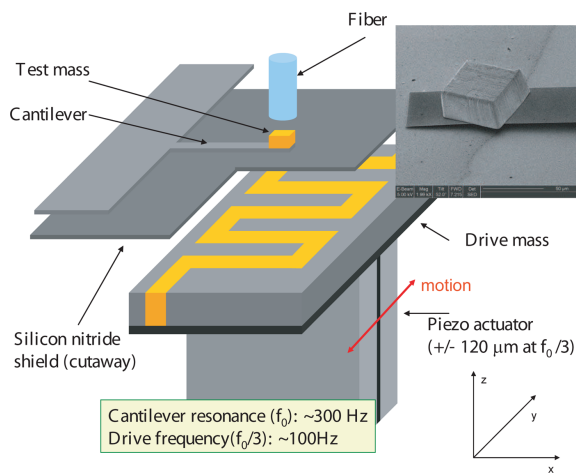


Abbildung 23: Nicht maßstabsgetreue schematische Abbildung der Stanford ISLV-Apparatur, die aufbauend auf die Arbeiten von Chiaverini et al. [9], Smullin et al. [61] und Geraci et al. [19] verwendet wurde. Es zeigt den Cantilever, Test- und Treibmasse sowie Abschirmung und piezoelektrischen Aktor. Zwischen optischer Faser und der Oberfläche der Testmasse wird eine Fabry-Perot-Kavität gebildet, um interferometrisch die Auslenkung des Cantilevers zu bestimmen. Oben rechts ist eine REM-Aufnahme der mit FIB hergestellten Testmasse gezeigt [19].

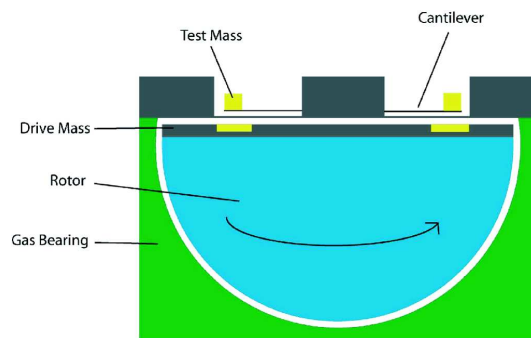


Abbildung 24: Nicht maßstabsgetreuer Querschnitt der Apparatur (a) von Weld et al. [70]. Als Teibmasse dient eine runde Scheibe geringer Dichte (Wolfram oder Messing), in welche Gräben eingearbeitet und mit einem weniger dichten Material zur Glättung der Oberfläche aufgefüllt wurden. So ergibt sich eine kreisförmige Anordnung von 100 “Quellmassen”. Die Treibmasse ist auf einer Quarzglas-Halbkugel ( $\varnothing = 5\text{cm}$ ) montiert, die auf Helium-Gas gelagert bei 3,5 Hz rotiert. Über der Treibmasse sind die Testmassen auf Cantilevern montiert, welche bei 350 Hz resonant sind. Die Auslenkung wird mit Faser-Interferometern ausgelesen. Die Oberfläche der Quellmassenscheibe ist mit einer glatten Lage Gold beschichtet. Eine goldbeschichtete Siliziumnitrit-Membran trennt die rotierende Anordnung von den Testmassen. Der Abstand zwischen Quell- und Testmasse liegt bei  $29\ \mu\text{m}$  und kann durch Regeln des Gasdrucks um etwa  $5\ \mu\text{m}$  variiert werden [48].

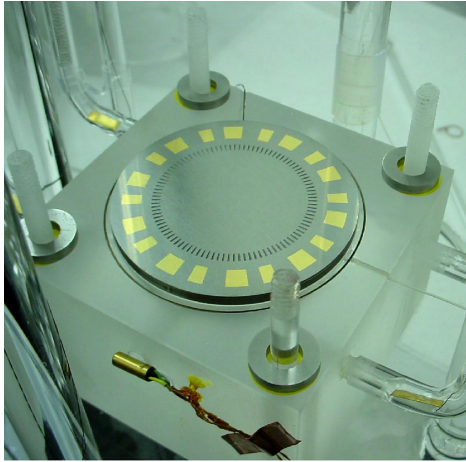


Abbildung 25: Foto der Treibmassen auf dem Rotor im Gas-Lager. Die Oberfläche wurde noch nicht mit der Glättungsschicht versehen, so dass die Quellmassenanordnung (innerer Ring) noch zu sehen ist. Außerdem sichtbar ist das Goldmuster (äußerer Ring), das zur Detektion der Rotationsgeschwindigkeit dient [70].

Die eigentliche Apparatur sowie einige interessante Details der Herstellung von Treibmassen sind in den Abbildungen 25 und 26 gezeigt.

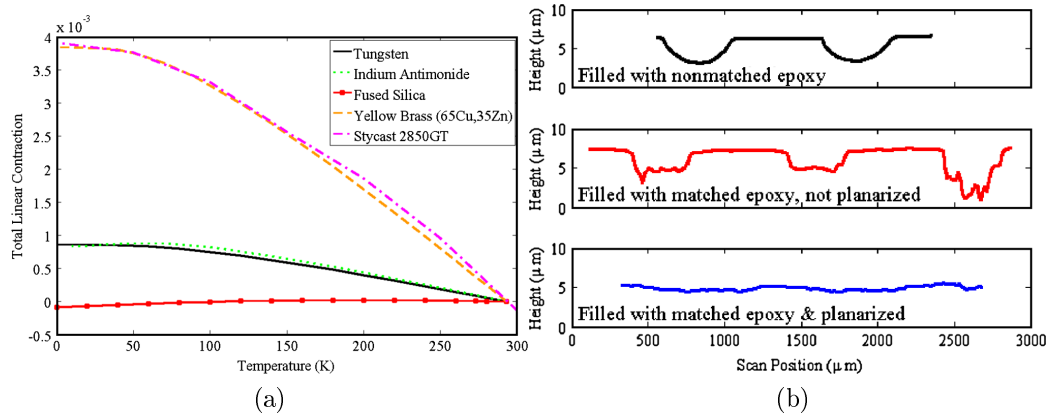


Abbildung 26: **(a)** Da die Apparatur 4 K heruntergekühlt wird, ist es wichtig, dass das Material, welches zur Glättung zwischen das Quellmassenmuster gegeben wird, einen ähnlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten hat. Wie hier gezeigt, wurden zwei Materialpaare gefunden, die diesbezüglich sehr gut zusammen passen. Es handelt sich um Wolfram und Indium Antimonid sowie gelben Messing (65Cu,35Zn) und Stycast 2850GT. Aufgetragen ist die totale lineare Kontraktion (definiert als  $\frac{L_{293}-L_T}{L_{293}}$ ) gegen die Temperatur. Die rote Linie zeigt das Verhalten von Quarzglas. **(b)** Profilometer-Scans dreier verschiedener Treibmassen. Die Gräben waren vor dem Befüllen jeweils 1 mm tief. Die großen Kuhlen sind auf Schrumpfung während des Aushärtens zurückzuführen (oberer Kasten). Weiter wurde versucht, die Gräben zu überfüllen und abzuschleifen. Hier entstehen wiederum Einwölbungen, da das Epoxid schneller entfernt wird als das Treibmassemetal (mittlerer Kasten). Die letztendlich zur Messung verwendete Treibmasse wurde zusätzlich planarisiert (unterer Kasten). Die Oberfläche gibt keinen Hinweis mehr auf die periodische Struktur darunter [70].

Mögliche zukünftige Beschränkungen aus zum Teil oben besprochenen Experimenten, zeigt Abbildung 27.

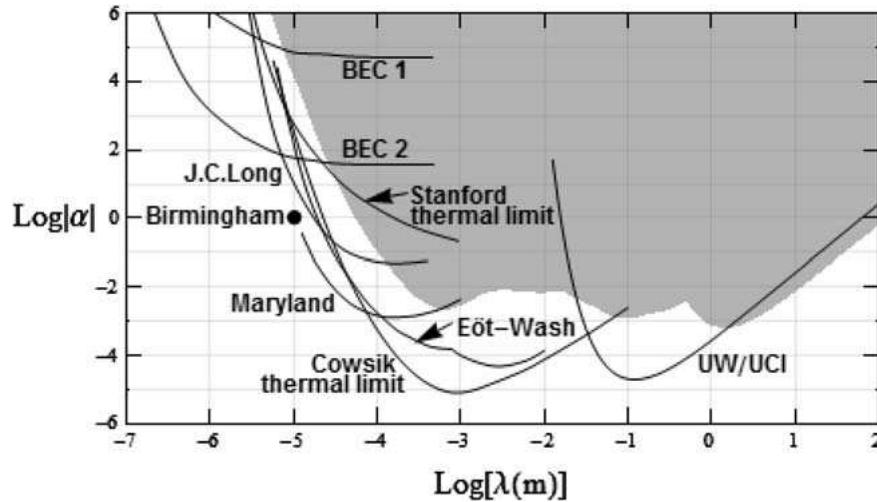


Abbildung 27: Abbildung möglicher künftiger Empfindlichkeiten verschiedener Gruppen, für die Suche nach anomalen Wechselwirkungen der Yukawa-Form (Gleichung 14). Die Kurven BEC 1 und 2 sind von Dimopoulos and Geraci [12]. Die Kurve Stanford ist von Weld et al. [70]. Die restlichen Vorrausberechnungen sind aus unpublizierten Arbeiten abgeleitet [48]. Der graue Bereich markiert bereits ausgeschlossenen Parameterraum. Es ist zu betonen, dass die Limits unterhalb  $10 \mu\text{m}$  bislang sehr schwach sind, was diesen Abstandsbereich besonders interessant für künftige Experimente macht.

#### 4.3. ISLV-Experimente bei Abständen kleiner $1 \mu\text{m}$

Bei sehr kleinen Abständen unterhalb  $1 \mu\text{m}$  kompetitiert die Gravitation mit magnetischen, elektrostatischen und Casimirkräften. Gemäß [48] wird die Casimirkraft adäquat abgeschirmt durch eine Goldschicht dicker als  $\sim 140 \text{ nm}$ , der Plasmawellenlänge von Gold. Es ist wichtig, dass die Abschirmung möglichst steif ist, so dass keine mit der Quellmasse korrelierten Verzerrungen auftreten durch Druck, Vibrationen oder elektrostatische Kräfte.

Wegen der Dominanz der Casimir-Kraft beruhen die besten Beschränkungen im Submikrometerbereich (siehe Abschnitt 3.3 und 5) auf direkten Messungen derselben und wurden von Mostepanenko et al. 2008 [43] berechnet. Dabei wird die Casimir-Wechselwirkung aus den Messergebnissen herausgerechnet. Das neueste Experiment, das für diese Berechnungen (95%-

Konfidenzintervall) verwendet wurde [11], ist in Abbildung 28 dargestellt. In diesem Experiment wurden Abstände von 160-750 nm untersucht.

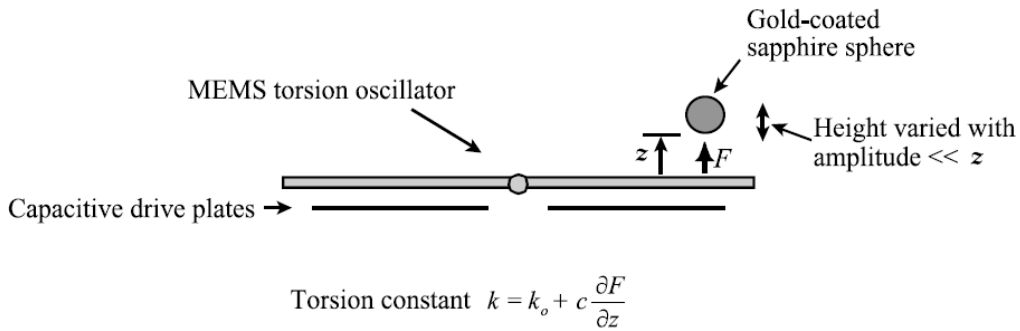


Abbildung 28: Schematische Darstellung der von Decca et al. [11] verwendeten Apparatur zur Messung der Casimirkraft. Im Abstand  $z$  über der goldbeschichteten Oszillatorplatte wird eine goldbeschichtete Saphirkugel ( $\varnothing 0,3$  mm) harmonisch in der Zeit auf und ab bewegt. Sie übt dadurch eine Kraft aus, deren Gradient  $\partial F/\partial z$  zur effektiven Torsionskonstante des Oszillators beiträgt. Der Torsionsoszillator wird mittel kapazitiver Platten bei Resonanz betrieben ( $\sim 700$  Hz). Die Kraft  $F(z)$  (Vergleich: Gleichung 65) wird aus der Variation der Resonanzfrequenz als Funktion von  $z$  abgeleitet. Der Kugel-Platte-Abstand wurde variiert von 160-750 nm, wobei die Kräfte mit unterschiedlichen relativen Fehlern von 0,19 % bei 160 nm bis 9,0 % bei 750 nm gemessen wurden. Abbildung nach [48].

Die originale Apparatur von Decca et al. [11] ist in Abbildung 29 gezeigt. Die aus diesem Experiment abgeleiteten Beschränkungen sind durch die Linie 2 in Abbildung 31 gezeigt.

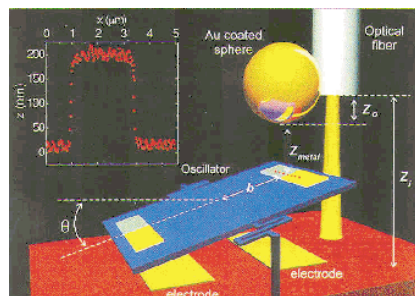


Abbildung 29: Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme (koloriert) des Mikrotorsionsoszillators. Die goldbeschichtete Kugel ist an einer optischen Faser befestigt, so dass ihre Höhe in  $z$ -Richtung detektierbar ist. Oben links ist ein AFM-Profil des Oszillators gezeigt. Abbildung nach [11].



Im Jahr 2003 machten Savas Dimopoulos und Andrew A. Geraci einen interessanten Vorschlag für ein Experiment [12], das ihren Angaben zufolge die Beschränkungen bei  $1\ \mu\text{m}$  um sechs bis zehn Größenordnungen verbessern könnte. Ihre Idee war, man könnte mittels Interferometrie von Bose-Einstein-kondensierten Alkali-Atomen Kräfte im Submikrometerbereich detektieren. Der hypothetische Aufbau ist in Abbildung 30 dargestellt. Die oben gezeigte periodische Quellmassenanordnung wird lateral bewegt. Die auf der anderen Seite des Casimir-Schildes optisch gefangenen Cluster von Bose-Einstein-kondensierten Alkali-Atomen befinden sich in unterschiedlichem Abstand ( $\Delta x = \lambda/2$ , mit  $\lambda = 840\ \text{nm}$ ) von der Quellmasse und sind dadurch unterschiedlichen Potentialen ausgesetzt. Die relative Phase wird durch Kombination der Kondensate nach einem geeigneten Zeitintervall mit einer Fluoreszenz-Technik ermittelt [48]. Die Durchführung dieses Experimentes könnte die bestehenden Beschränkungen im Abstandsbereich von  $1\ \mu\text{m}$  um sechs bis neun Größenordnungen verbessern [12] (BEC 1 und BEC 2 in Abbildung 27 und 31).

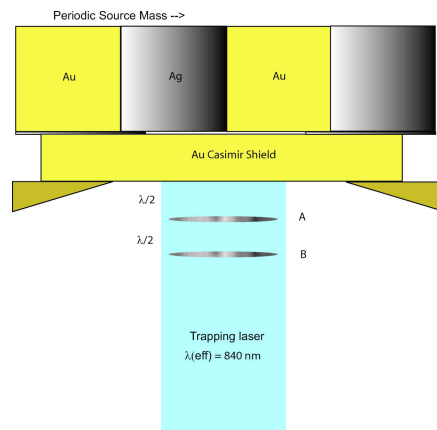


Abbildung 30: Vorgeschlagener experimenteller Aufbau von Dimopoulos und Geraci [12]. Das Casimir-Schild aus Gold dient zur Bildung einer Kavität zur Ausbildung einer stehenden Welle. Damit werden die BEC-Atome in den zwei der periodischen Quellmassenanordnung am nächsten liegenden Potentialmulden gefangen. Die BEC-Cluster wären gefangen in einem Abstand  $\lambda/2$  voneinander in der stehenden Welle, die durch die Reflexion eines  $\lambda=840\ \text{nm}$ -Lasers am Casimir-Schild erzeugt würde. Die einzelnen Cluster würden geladen mit einer wohldefinierten relativen Phase, deren Entwicklung mit der Zeit die unterschiedlichen Potentiale, in denen die Cluster sitzen, widerspiegelt [48]. Abbildung nach [12].

Die aktuellen Beschränkungen unterhalb  $1 \mu\text{m}$  sind in Abbildung 31 dargestellt.

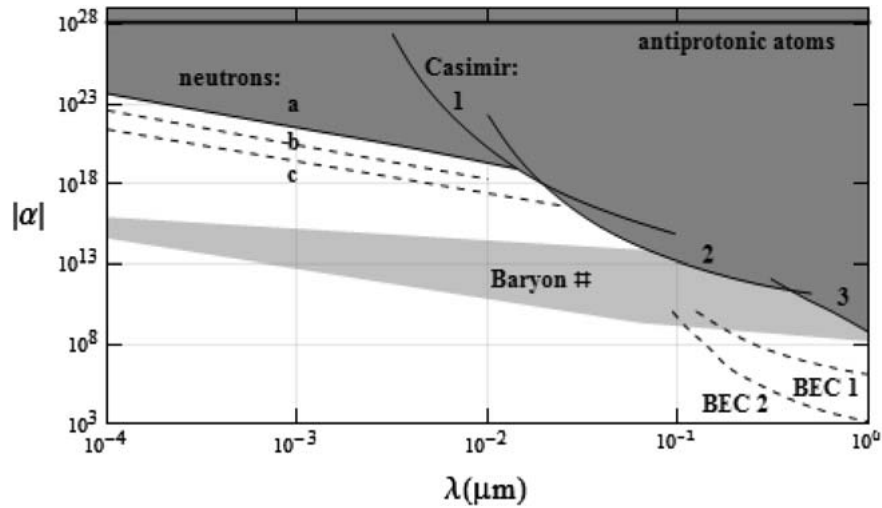


Abbildung 31: Beschränkungen unterhalb  $1 \mu\text{m}$  basierend auf Casimir-, Neutronen- und antiprotonischen Atom-Experimenten. Die Linien 1 und 2 basieren auf den Berechnungen von Mostepanenko et al. [43], die auf den Arbeiten [25] und [11] beruhen. Linie 3 basiert auf dem Experiment von Lamoreaux [36]. Die Quellen für die Linie a (Neutronenstreuung), antiprotonic atoms (antiprotonische Atomübergangsfrequenzen) und die Fläche Baryon # (in diesem Bereich könnte sich ein Baryon-Eichteilchen manifestieren) sind [48] zu entnehmen. Abbildung nach [48].

## 5. Mathematische Beschreibung verschiedener Testmassen-Konfigurationen

In der folgenden theoretischen Beschreibung werden newtonsche Gravitation, Casimir-Kräfte und die hypothetische Yukawa-Wechselwirkung berücksichtigt. Dies liefert eine vollständige Beschreibung der Wechselwirkung, insofern die Testkörper als elektrisch neutral und unmagnetisch angenommen werden. Die Beschreibung der Van-der-Waals-Kräfte wurde in dieser Arbeit abgedeckt, da sie als Limit kleiner Abstände in der in Abschnitt 3.3.3 behandelten Lifschitz-Theorie enthalten ist. Bei der Berechnung der Casimir-Kraft wird jeweils von idealen Metallen ausgegangen, da die Beschreibung realer Materialien ungleich schwieriger ist. Das heisst, der Bereich 1 – 10 nm ist in den Graphen sehr grob vereinfacht. Um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Casimir-Kraft bei realen Materialien gegenüber idealisierten geringer ist, wird sie in den abgebildeten Graphen pauschal um 20% verringert dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden alle Graphen mit der Dichte von Gold berechnet ( $\rho \approx 19000 \text{ kg/m}^3$ ).

Behandelt werden die Kugel-Platte-, die Kugel-Kugel- und die Platte-Platte-Konfiguration. Die Kräfte werden in folgender Notation geschrieben:  $F_{z,C}^{A,B}$ . Dabei sind die oberen Indizes die beteiligten Testkörper ( $A, B \in \{K, P, M\}$ ,  $K$ =Kugel,  $P$ =Platte,  $M$ =Massepunkt).

Die unteren Indizes geben an, dass es sich um die Kraft in  $z$ -Richtung handelt und welche Kraft beschrieben wird ( $C \in \{N, Yu, Ca\}$ ,  $N$  =newtonsche Gravitation,  $Yu$  =Yukawa-Wechselwirkung und  $Ca$  =Casimirkraft).

### 5.1. Kugel-Platte-Konfiguration

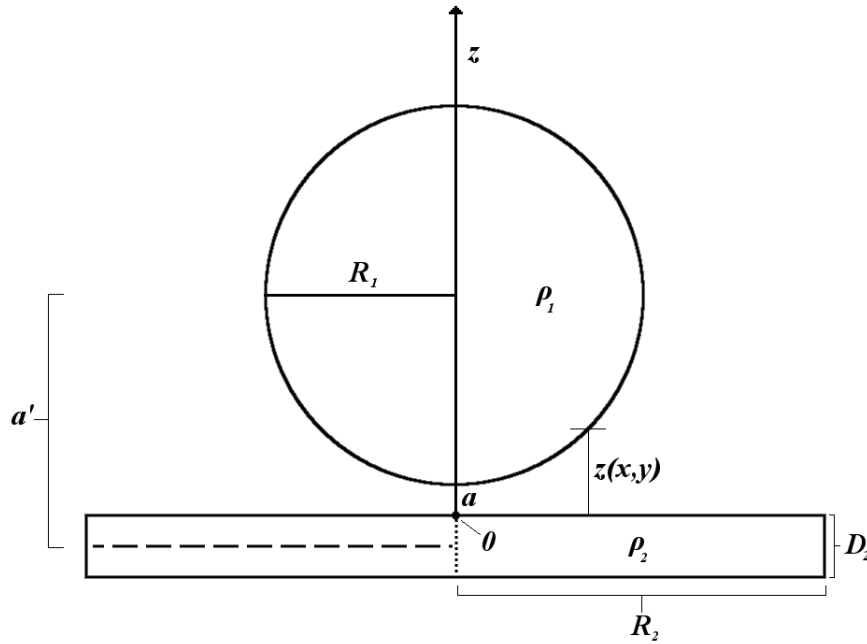


Abbildung 32: Kugel-Platte-Konfiguration: Gezeigt ist eine massive Kugel mit Radius  $R_1$  und Dichte  $\rho_1$  im Abstand  $a$  über einer Platte der Dicke  $D_2$ , dem Radius  $R_2$  und der Dichte  $\rho_2$ . Der Abstand zwischen Kugelmittelpunkt und halber Plattdicke in  $z$ -Richtung wird mit  $a'$  bezeichnet. Die Oberflächenabstansfunktion  $z(x, y)$  spielt nur für die Betrachtung der Casimir-Wechselwirkung eine Rolle. Der Koordinatenursprung ist mit  $\theta$  bezeichnet.

#### 5.1.1. Newtonsche Gravitation

Um die Gravitationskraft zwischen einer Kugel der Masse  $m_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$  und einer Platte mit Radius  $R_2$  und Dicke  $D_2$  im Abstand  $a$  zu berechnen, wurde wie folgt vorgegangen:

Vereinfachend wurde angenommen, dass die gesamte Masse der Platte ( $m_2 = \pi R_2^2 D_2 \rho_2 = \pi R_2^2 \sigma$ ) auf einer Fläche der Flächenmassendichte  $\sigma$  bei der halben Dicke der Platte  $D_2/2$  konzentriert ist (Abbildung 32). Die Approximation ist damit nur für den Fall  $D_2 \ll a' = a + R_1 + \frac{1}{2}D_2$  und  $D_2 \ll R_2$  zutreffend. Die Masse der Kugel wird gemäß Gaußschem Gesetz als in ih-

rem Mittelpunkt konzentriert angenommen. Damit ergibt sich die Kraft in  $z$ -Richtung in Zylinderkoordinaten nach Gleichung 2 zu

$$F_{z,N}^{K,P} \simeq -Gm_1\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_2} \frac{a'\rho d\rho}{(a'^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (43)$$

Integration über  $\varphi$  führt zu

$$F_{z,N}^{K,P} \simeq -2\pi Gm_1\sigma a' \int_0^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(a'^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (44)$$

Integration über  $\rho$  liefert nach Einsetzen von  $\sigma = \frac{m_2}{\pi R_2^2}$

$$F_{z,N}^{K,P} \simeq -\frac{2Gm_1m_2}{R_2^2} \left[ 1 - \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + R_2^2}} \right]. \quad (45)$$

Einsetzen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  und  $a'$  führt schließlich zu

$$F_{z,N}^{K,P} \simeq -\frac{8}{3}G\rho_1\rho_2\pi^2 R_1^3 D_2 \cdot \left[ 1 - \frac{(a + R_1 + \frac{D_2}{2})}{\sqrt{(a + R_1 + \frac{D_2}{2})^2 + R_2^2}} \right]. \quad (46)$$

Für große Abstände  $a' \gg R_2$  geht Gleichung 45 durch Entwicklung um  $R_2/a'$ :

$$F_{z,N}^{K,P} \simeq -\frac{2Gm_1m_2}{R_2^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R_2}{a'} \right)^2 + \dots \right) \right] \simeq -\frac{Gm_1m_2}{a'^2} \quad (47)$$

in das Gravitationsgesetz für Punktmassen über.

Für den Fall  $a' \ll R_2$  ergibt sich aus Gleichung 45 durch Entwicklung um  $a'/R_2$ :

$$\begin{aligned} F_{z,N}^{K,P} &\simeq -\frac{2Gm_1m_2}{R_2^2} \left[ 1 - \frac{a'}{R_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a'}{R_2} \right)^3 + \dots \right] \simeq -\frac{2Gm_1m_2}{R_2^2} \\ &= -\frac{8}{3}\pi^2 G\rho_1\rho_2 R_1^3 D_2 = const. \end{aligned} \quad (48)$$

Dies stimmt, wie zu erwarten mit dem Ergebnis von Decca et al. [10] für eine Platte der Dicke  $D_2$  mit  $R_2 \rightarrow \infty$  überein. Das heißt, für diesen Fall hängt die Gravitationskraft nicht vom Abstand ab. Ausgehend von Gleichung 2 mit  $R_2 \rightarrow \infty$  und  $\rho^2 = x^2 + y^2$  ergibt sich die Kraft auf einen Massepunkt  $m_1$  in der Höhe  $z_1$  über der Platte nach Integration über  $\varphi$  zu:

$$F_{z,N}^{M,P} = -2\pi G m_1 \rho_2 \int_{-D_2}^0 dz_2 \int_0^\infty \rho d\rho \frac{z_1 - z_2}{[\rho^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (49)$$

Mit der Substitution  $\omega = z_1 - z_2$  ergibt sich

$$F_{z,N}^{M,P} = -2\pi G m_1 \rho_2 \int_{z_1}^{z_1+D_2} d\omega \left[ \frac{-\omega}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2}} \right]_0^\infty = -2\pi G m_1 \rho_2 D_2. \quad (50)$$

Da diese Gleichung nicht von  $z$  abhängt, reduziert sich die Integration über das Kugelvolumen ( $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$ ) auf die Multiplikation mit diesem [10]. Damit ergibt sich die obige Gleichung 48:

$$F_{z,N}^{K,P} = -\frac{8}{3}\pi^2 G R_1^3 \rho_1 \rho_2 D_2. \quad (51)$$

### 5.1.2. Yukawa-artige Wechselwirkung

Das Yukawa-artige Wechselwirkungspotenzial zwischen zwei punktförmigen Masseteilchen ist nach Gleichung 13 für ein Masseteilchen  $m_1$  bei  $z_1$  auf der  $z$ -Achse und ein Masseteilchen  $m_2$  bei  $\vec{r} = [x, y, z_2]$  gegeben durch:

$$V_{z,Y_u}^{M,M}(|z_1 \hat{z} - \vec{r}|) = \frac{-G m_1 m_2}{|z_1 \hat{z} - \vec{r}|} \alpha e^{-\frac{|z_1 \hat{z} - \vec{r}|}{\lambda}}. \quad (52)$$

Da diese Wechselwirkung schwach und nicht von elektromagnetischem Ursprung ist, kann sie mit einem hohen Grad an Genauigkeit als additiv angesehen werden [10]. Nimmt man ein Masseteilchen  $m_1$  in einer Höhe von  $z_1$  über einer großen Platte der Dicke  $D_2$  und der Dichte  $\rho_2$ , so erhält man die Yukawa-Energie, indem man Gleichung 52 über das Volumen der Platte

integriert. Mit  $R_2 \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$E_{z,Yu}^{M,P}(z) = -Gm_1\rho_2\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-D_2}^0 dz_2 \underbrace{\int_0^\infty \rho d\rho \frac{e^{-|z_1\hat{z}-\vec{r}|/\lambda}}{|z_1\hat{z}-\vec{r}|}}_{(53)}, \quad (53)$$

dabei ist  $|z_1\hat{z}-\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + (z_1 - z_2)^2}$  mit  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Mit den Substitutionen  $\omega = \rho^2$  und  $A = (z_1 - z_2)^2$  ergibt sich der Ausdruck über der geschwungenen Klammer zu

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{\omega+A}/\lambda}}{\sqrt{\omega+A}} d\omega = \left[ -\lambda \cdot e^{-\sqrt{\omega+A}/\lambda} \right]_0^\infty = \lambda e^{-(z_1-z_2)/\lambda}. \quad (54)$$

Damit wird aus Gleichung 53 nach Integration über  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} E_{z,Yu}^{M,P} &= -2\pi G\alpha\lambda m_1\rho_2 e^{-z_1/\lambda} \int_{-D_2}^0 dz_2 e^{z_2/\lambda} \\ &= -2\pi G\alpha\lambda^2 m_1\rho_2 e^{-z_1/\lambda} \left( 1 - e^{-D_2/\lambda} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Die negative Ableitung nach  $z_1$

$$F_{z,Yu}^{M,P} = -\frac{\partial E_{z,Yu}^{M,P}}{\partial z_1} \quad (56)$$

liefert die Yukawa-Kraft zwischen einem Massenpunkt und einer Platte:

$$F_{z,Yu}^{M,P} = -2\pi G\alpha\lambda m_1\rho_2 e^{-z_1/\lambda} \left( 1 - e^{-D_2/\lambda} \right). \quad (57)$$

Durch Integration dieser Gleichung über das Volumen einer Kugel erhält man das Ergebnis für die Yukawa-Kraft der Kugel-Platte-Konfiguration [10]. Mit

$\rho^2 = x^2 + y^2$  und nach Integration über  $\varphi$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F_{z,Yu}^{K,P} &= -4\pi^2 G\alpha\lambda\rho_1\rho_2 e^{-\frac{z_1}{\lambda}} \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) \int_a^{2R_1+a} dz_1 \\
&\quad \times \int_0^{\sqrt{R_1^2 - (a+R_1-z_1)^2}} \rho \, d\rho e^{-\frac{z_1}{\lambda}}. \tag{58}
\end{aligned}$$

Integration über  $\rho$  und anschließend über  $z_1$  liefert:

$$\begin{aligned}
F_{z,Yu}^{K,P} &= -2\pi^2 G\alpha\lambda\rho_1\rho_2 \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) \int_a^{2R_1+a} dz_1 \\
&\quad \times [R_1^2 - (R_1 + a - z_1)^2] e^{-\frac{z_1}{\lambda}} \\
&= -4\pi^2 G\alpha\lambda^3\rho_1\rho_2 \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) R_1 e^{-\frac{a}{\lambda}} \\
&\quad \times \left(1 - \frac{\lambda}{R_1} + e^{-\frac{2R_1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{R_1} e^{-\frac{2R_1}{\lambda}}\right) \\
&= -8\pi^2 G\alpha\lambda^4\rho_1\rho_2 \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) e^{-\frac{(a+R_1)}{\lambda}} \\
&\quad \times \left\{ \frac{R_1}{\lambda} \cosh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) \right\}. \tag{59}
\end{aligned}$$

### 5.1.3. Casimir-Kraft

Die Casimir-Kraft für die Kugel-Platte-Konfiguration wird gemäß [6] (S.97) mit der *Proximity Force Approximation* (PFA) hergeleitet, welche von Derjaguin (1934) eingeführt wurde. Die PFA erlaubt die Berechnung der Wechselwirkungsenergie zweier beliebig geformter Körper  $V_1$  und  $V_2$ . Die obere Oberfläche des unteren Körpers und die untere Oberfläche des oberen Körpers seien beschrieben durch die Gleichungen  $z_1 = z_1(x, y)$  und  $z_2 = z_2(x, y) > z_1(x, y)$  in einem geeigneten Koordinatensystem. Der Abstand dieser Oberflächen entlang der z-Achse ist gegeben durch

$$z(x, y) = z_2(x, y) - z_1(x, y). \tag{60}$$



Der kleinste Abstand wird mit  $a$  bezeichnet (Abbildung 32). Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt  $(x,y)$  und ersetzen die Elemente der gekrümmten Oberflächen  $dS_1$  und  $dS_2$  um die Punkte  $z_1(x,y)$  und  $z_2(x,y)$  jeweils durch die parallelen Oberflächenelemente  $dxdy$ . Dadurch wird die unbekannte Wechselwirkungsenergie durch die bekannte Energie  $E(z(x,y))$  pro Flächeneinheit von ebenen parallelen Oberflächenelementen mit dem Abstand  $z(x,y)$  dargestellt. Die Wechselwirkungsenergie erhält man durch Integration der Wechselwirkungsenergien zwischen ebenen Oberflächenelementen.

$$E_{PFA} = \iint dxdy E(z(x,y)) \quad (61)$$

Für ideale Metalle ergibt sich mit  $z_1 = 0$  und für die untere Halbkugel

$$z_2(x,y) = a + R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} \quad (62)$$

Unter Einführung von Polarkoordinaten  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , ergibt sich Gleichung 61 zu

$$E_{PFA} \equiv E_{z,Ca}^{K,P} = - \int_0^{R_1} 2\pi \rho d\rho \frac{\pi^2 \hbar c}{720 z_2^3(\rho)}, \quad (63)$$

$E(z_2) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 z_2^3}$  ist die Casimir-Energie pro Flächeneinheit für zwei parallele Platten aus idealem Metall.  $z_2(\rho)$  ist durch Gleichung 62 in Zylinderkoordinaten gegeben. Die Integration ergibt

$$E_{z,Ca}^{K,P} = -\frac{\pi^3 \hbar c}{720} \frac{R_1^2}{a^2(R_1 + a)} = -\frac{\pi^3 \hbar c R_1}{720 a^2} \left[ 1 + O\left(\frac{a}{R_1}\right) \right] \quad (64)$$

Die Korrektur der Ordnung  $\frac{a}{R_1}$  kann für  $a \ll R_1$  vernachlässigt werden. Die negative Ableitung nach  $a$  liefert die gesuchte Casimir-Kraft.

$$F_{PFA} \equiv F_{z,Ca}^{K,P} = -\frac{\pi^3 \hbar c R_1}{360 a^3} \quad (65)$$

Gleichung 65 erlaubt eine weitreichende Verallgemeinerung der Kugel-Platte-Konfiguration für echte Materialien bei Temperaturen ungleich Null.

Für den Fall wird die Kraft durch  $F_{z,Cas}^{K,P}(a, T) = 2\pi R_1 \mathcal{F}(a, T)$  ersetzt, mit  $\mathcal{F}(a, T)$  als freier Energie pro Flächeneinheit für die Konfiguration zweier paralleler Platten aus realem Dielektrikum beziehungsweise Metall (Kapitel 12-15 in [6]).

#### 5.1.4. Resultierende Kraftverläufe

Die aus den Gleichungen 46, 65 und 59 resultierenden Kraftverläufe sind in Abbildung 33 dargestellt. Welche Kräfte jeweils dargestellt sind, ist der Bildunterschrift beziehungsweise der Legende zu entnehmen.

## Kraft-Abstands-Kurven verschiedener Kugel-Platte-Konfigurationen

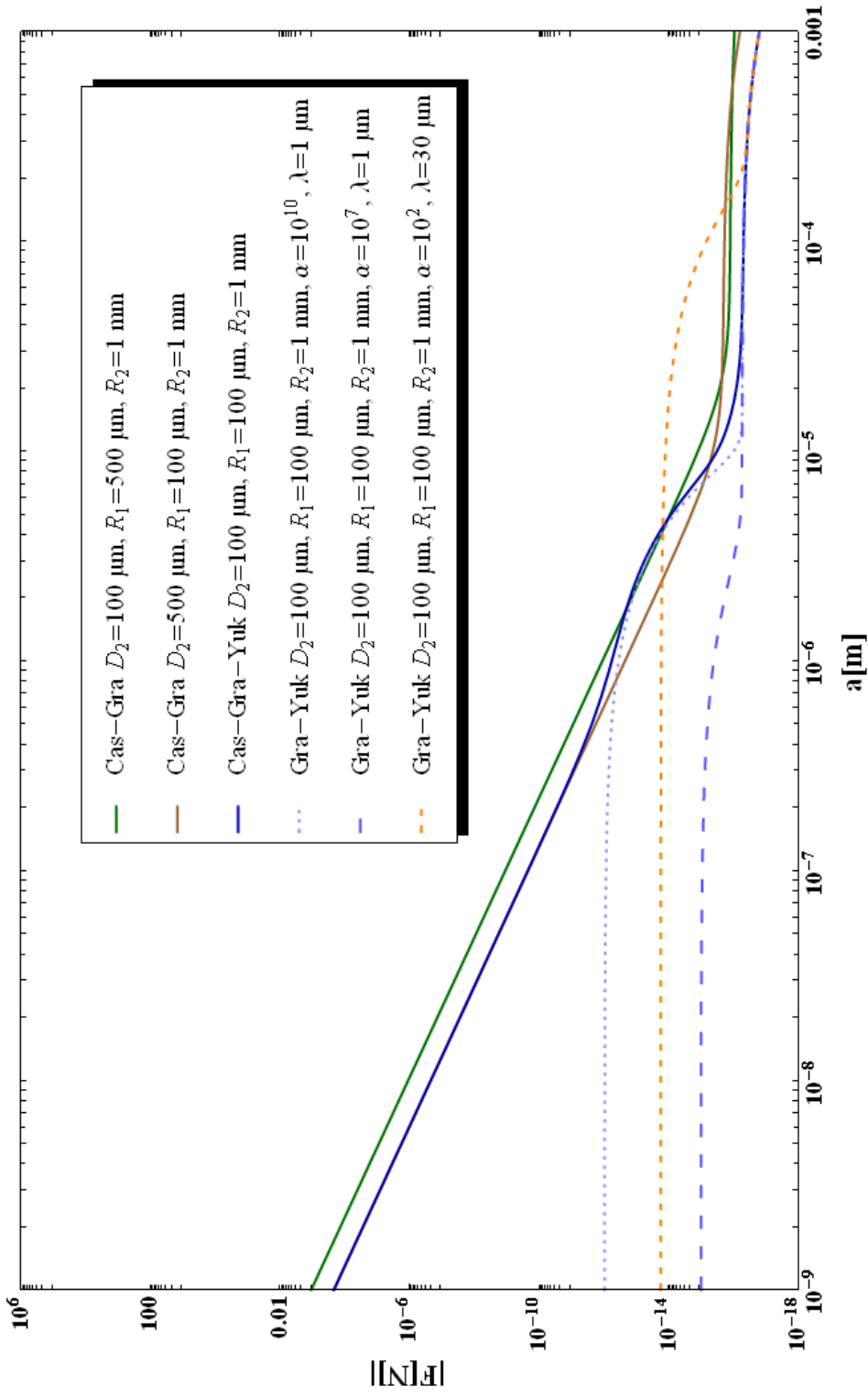


Abbildung 33: Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitations-Kraft (Gleichung 46 und 65) in doppelt logarithmischer Auftragung für eine Goldkugel und eine Goldplatte mit Radius  $100 \mu\text{m}$ . Die Gravitationskraft wird für die gezeigten Einstellungen bei einem Abstand von  $10\text{-}100 \mu\text{m}$  dominant und liegt dort im Bereich  $10^{-17} - 10^{-14} \text{N}$ . Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 59) bei verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe von Casimir- und Gravitationskraft auswirkt.

## 5.2. Kugel-Kugel-Konfiguration

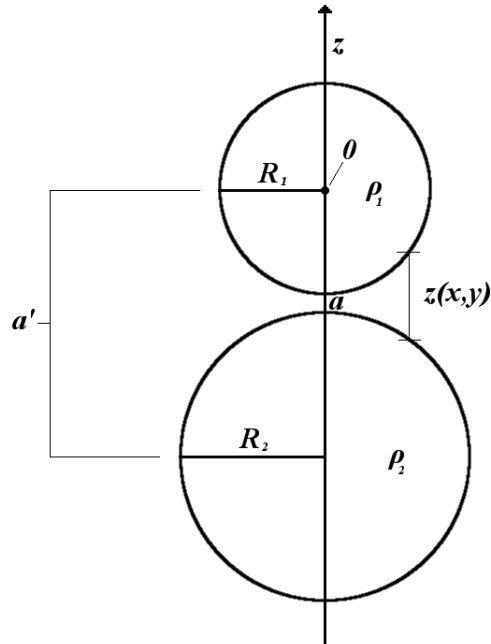


Abbildung 34: Kugel-Kugel-Konfiguration: Gezeigt sind zwei massive Kugeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  und den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , im Abstand  $a$  zueinander. Der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten ist  $a'$ . Die Oberflächenabstandsfunktion  $z(x,y)$  wird zur Berechnung der Casimirwechselwirkung benötigt. Der Koordinatenursprung ist mit  $0$  bezeichnet.

### 5.2.1. Newtonsche Gravitation

Die newtonsche Gravitationskraft zweier Kugeln im Abstand  $a$  ist gemäß Gaußschem Gesetz der Kraft zweier Punktmassen im Mittelpunkt der Kugeln äquivalent (siehe Abbildung 34 und Gleichung 2):

$$F_{z,N}^{K,K} = -\frac{G \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 R_1^3 R_2^3 \rho_1 \rho_2}{(a + R_1 + R_2)^2} = -\frac{G \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 R_1^3 R_2^3 \rho_1 \rho_2}{a'^2}, \quad (66)$$

wobei  $a'$  der Abstand der Kugelmittelpunkte ist.

Aus Gleichung 66 ergibt sich ein entscheidendes Problem. Verkleinert man einen Versuchsaufbau zur Messung der Gravitation, so verringert sich die

Kraft aufgrund der mit jeweils  $r^3$  eingehenden Masse insgesamt um einen Faktor  $r^6$ . Der kleinere Abstand liefert einen Faktor  $r^{-2}$ . Damit geht die Gesamtkraft mit  $r^4$ . Bei einer Verkleinerung des Aufbaus um die Hälfte fällt somit der Betrag der Gravitationskraft auf  $1/16$ . Aus diesem Grund ist ein Versuchsaufbau mit zwei Kugeln im Vergleich zu anderen Konfigurationen eher unvorteilhaft für Messungen bei sehr kleinen Abständen.

### 5.2.2. Yukawa-artige Wechselwirkung

Zur Berechnung der Yukawa-artigen Wechselwirkung eines Massepunktes  $m_2$  im Abstand  $z$  von einer Kugel mit Radius  $R_1$  und Dichte  $\rho_1$  wird das Potential (Gleichung 13) über das Kugelvolumen in Polarkoordinaten integriert. Integration über  $\varphi$  liefert einen Faktor  $2\pi$ .

$$E_{z,Yu}^{M,K} = -2\pi G\alpha m_2 \rho_1 \int_0^{R_1} dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{e^{-|z\hat{z}-\vec{r}|/\lambda}}{|z\hat{z}-\vec{r}|} = -2\pi G\alpha m_2 \rho_1 \int_0^{R_1} dr r^2 f(r), \quad (67)$$

wobei

$$|z\hat{z}-\vec{r}| = \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta}. \quad (68)$$

Mit den Substitutionen  $A = z^2 + r^2$ ,  $B = 2zr$  und  $\mu = \cos\theta$  ergibt sich

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_{-1}^1 d\mu \frac{e^{-\sqrt{(A-B\mu)}/\lambda}}{\sqrt{(A-B\mu)}} = \left[ \frac{2\lambda}{B} e^{-\sqrt{A-B\mu}/\lambda} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\lambda}{zr} e^{-z/\lambda} (e^{r/\lambda} - e^{-r/\lambda}). \end{aligned} \quad (69)$$

Damit wird Gleichung 67 zu

$$\begin{aligned} E_{z,Yu}^{M,K} &= -2\pi G\alpha \lambda m_2 \rho_1 \frac{e^{-z/\lambda}}{z} \int_0^{R_1} dr r (e^{r/\lambda} - e^{-r/\lambda}) \\ &= -2\pi G\alpha \lambda m_2 \rho_1 \frac{e^{-z/\lambda}}{z} [\lambda r e^{r/\lambda} - \lambda^2 e^{r/\lambda} + \lambda r e^{-r/\lambda} + \lambda^2 e^{-r/\lambda}]_0^{R_1} \\ &= -4\pi G\alpha \lambda^3 m_2 \rho_1 \underbrace{\left\{ \frac{R_1}{\lambda} \cosh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) \right\}}_{\text{mit dem konstanten Ausdruck } \frac{C}{2\pi}} \frac{e^{-z/\lambda}}{z} \\ &= -\frac{C}{2\pi} \frac{e^{-z/\lambda}}{z}. \end{aligned} \quad (70)$$

Die Kraft ergibt sich als die negative Ableitung dieses Ausdrucks zu

$$F_{z,Yu}^{M,K} = -\frac{C}{2\pi} \frac{1}{z^2} e^{-z/\lambda} - \frac{C}{2\pi} \frac{1}{z\lambda} e^{-z/\lambda} = -\frac{C}{2\pi} \frac{e^{-z/\lambda}}{z} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{z} \right). \quad (71)$$

Integration über das Volumen der Kugel mit Radius  $R_2$  liefert die Kraft zwischen zwei Kugeln. Der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel mit Radius  $R_1$  zu einem Punkt  $P$  innerhalb der Kugel mit Radius  $R_2$  der zweiten Kugel wird gemäß Abbildung 35 mit  $z_1$  bezeichnet.

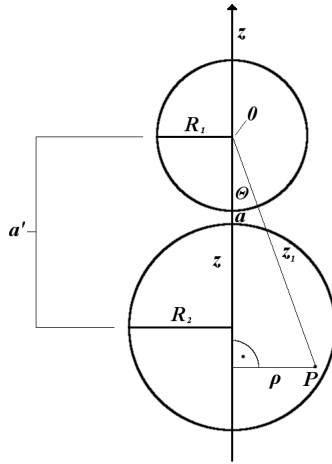


Abbildung 35: Der Abstand vom Mittelpunkt der ersten Kugel ( $R_1$ ) zu einem beliebigen Punkt  $P$  innerhalb der zweiten Kugel ( $R_2$ ) ist mit  $z_1$  bezeichnet. Dabei ist in Zylinderkoordinaten  $z_1 = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ . Die Kraft in  $z$ -Richtung ist damit  $F_z = F_{z_1} \cos\Theta = F_{z_1} \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$ . Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet.

In Zylinderkoordinaten ergibt sich  $z_1^2 = z^2 + \rho^2$ . Die  $z$ -Komponente der damit erhaltenen Kraft ergibt sich durch einen Faktor  $\cos\Theta = \frac{z}{z_1}$ , da nur die Kraft in  $z$ -Richtung relevant ist. Würde man diesen Umstand nicht einbeziehen, so würde Gleichung 71 für verschiedene Punkte, Kräfte in unterschiedliche Richtungen liefern. Aus diesem Grund muss vor der Integration das  $z$  in Gleichung 71 durch das oben genannte  $z_1$  ersetzt werden und jeweils die  $z$ -Komponente der Kraft berücksichtigt werden. Das Integral hat dann die Form:

$$\begin{aligned}
F_{z,Yu}^{K,K} &= -\frac{C'}{2\pi} \cdot \int_{a'-R_2}^{a'+R_2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R_2^2-(z-a')^2}} \rho d\rho \\
&\quad \times \left( \frac{1}{\rho^2+z^2} + \frac{1}{\lambda\sqrt{z^2+\rho^2}} \right) e^{-\sqrt{z^2+\rho^2}/\lambda} \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}, \quad (72)
\end{aligned}$$

wobei  $C'$  dem obigen  $C$  entspricht mit dem Unterschied, dass  $m_2$  durch  $\rho_2$  ersetzt wurde. Mit der Substitution  $x = \sqrt{z^2 + \rho^2}$  ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned}
F_{z,Yu}^{K,K} &= -C' \cdot \int_{a'-R_2}^{a'+R_2} z dz \int_z^{\sqrt{R_2^2-a'^2+2a'z}} dx \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\lambda x} \right) e^{-x/\lambda} \\
&= -C' \cdot \int_{a'-R_2}^{a'+R_2} z dz \left[ \left\{ -\frac{e^{-x/\lambda}}{x} - \frac{1}{\lambda} \text{Ei} \left( -\frac{x}{\lambda} \right) \right\} + \frac{1}{\lambda} \text{Ei} \left( -\frac{x}{\lambda} \right) \right]_z^{\sqrt{R_2^2-a'^2+2a'z}} \\
&= -C' \cdot \int_{a'-R_2}^{a'+R_2} dz \left\{ e^{-z/\lambda} - \frac{z \cdot e^{-\sqrt{R_2^2-a'^2+2a'z}/\lambda}}{\sqrt{R_2^2-a'^2+2a'z}} \right\}, \quad (73)
\end{aligned}$$

wobei Ei die Integraleponentialfunktion ist (siehe Anhang).

Mit den Substitutionen  $x = \sqrt{R_2^2 - a'^2 + 2a'z}$  und  $z = \frac{1}{2a'} (x^2 + a'^2 - R_2^2)$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_{z,Yu}^{K,K} &= -C' \cdot \left\{ \lambda \left( e^{-(a'-R_2)/\lambda} - e^{-(a'+R_2)/\lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a'^2} \left[ e^{-x/\lambda} (\lambda x^2 + 2\lambda^2 x + 2\lambda^3) + (a'^2 - R_2^2) (\lambda e^{-x/\lambda}) \right]_{|R_2-a'|}^{|R_2+a'|} \right\} \\
&= -16\pi^2 G \rho_1 \rho_2 \alpha \lambda^6 \left( 1 + \frac{a'}{\lambda} \right) \frac{e^{-a'/\lambda}}{a'^2} \\
&\quad \times \left( \frac{R_1}{\lambda} \cosh \left( \frac{R_1}{\lambda} \right) - \sinh \left( \frac{R_1}{\lambda} \right) \right) \\
&\quad \times \left( \frac{R_2}{\lambda} \cosh \left( \frac{R_2}{\lambda} \right) - \sinh \left( \frac{R_2}{\lambda} \right) \right). \quad (74)
\end{aligned}$$



Dieses Resultat stimmt mit dem Ergebnis in [2] (S. 94) überein. Ersetzt man die beiden konstanten Terme in den letzten beiden Zeilen durch  $\Phi\left(\frac{R_{1/2}}{\lambda}\right) = \Phi(x) = x \cosh x - \sinh x$  und setzt  $a'$  ein, so erhält man:

$$F_{z,Yu}^{K,K} = -16\pi^2 G \rho_1 \rho_2 \alpha \lambda^6 \Phi\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) \Phi\left(\frac{R_2}{\lambda}\right) \times \left(1 + \frac{(a + R_1 + R_2)}{\lambda}\right) \frac{e^{-(a+R_1+R_2)/\lambda}}{(a + R_1 + R_2)^2}. \quad (75)$$

### 5.2.3. Casimir-Kraft

Die Casimir-Kraft zwischen zwei Kugeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  lässt sich mit Hilfe von Gleichung 61 berechnen [6]. Mit den Kugelmittelpunkten auf der  $z$ -Achse (Abbildung 34) lässt sich die Abstandsfunktion zwischen den Oberflächen der beiden Kugeln schreiben als

$$z(x, y) = z(\rho) = a + R_1 - \sqrt{R_1^2 - \rho^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - \rho^2}, \quad (76)$$

mit  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

Mit der Casimir-Energie pro Flächeneinheit für zwei parallele Platten aus idealem Metall (Gleichung 20) ergibt sich aus Gleichung 61:

$$E_{z,Ca}^{K,K} = -\frac{\pi^3 \hbar c}{360} \int_0^{R_2} \frac{\rho d\rho}{z^3(\rho)}. \quad (77)$$

Berechnet man dieses Integral unter der Bedingung  $a/R_2 \ll 1$  erhält man

$$E_{PFA} \equiv E_{z,Ca}^{K,K} = -\frac{\pi^3 \hbar c}{720a^2} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \left[1 + O\left(\frac{a}{R_2}\right)\right]. \quad (78)$$

Die Bildung der negativen Ableitung nach  $a$  unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $a/R_2$  liefert die Casimir-Kraft zwischen zwei Kugeln aus idealem Metall [6] (S. 101)

$$F_{PFA} \equiv F_{z,Ca}^{K,K} = -\frac{\pi^3 \hbar c}{360a^3} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}. \quad (79)$$

#### *5.2.4. Resultierende Kraftverläufe*

Die aus den Gleichungen 66, 79 und 75 resultierenden Kraftverläufe sind in Abbildung 36 dargestellt. Welche Kräfte jeweils dargestellt sind, ist der Bildunterschrift beziehungsweise der Legende zu entnehmen.

## Kraft-Abstands-Kurven verschiedener Kugel-Kugel-Konfigurationen

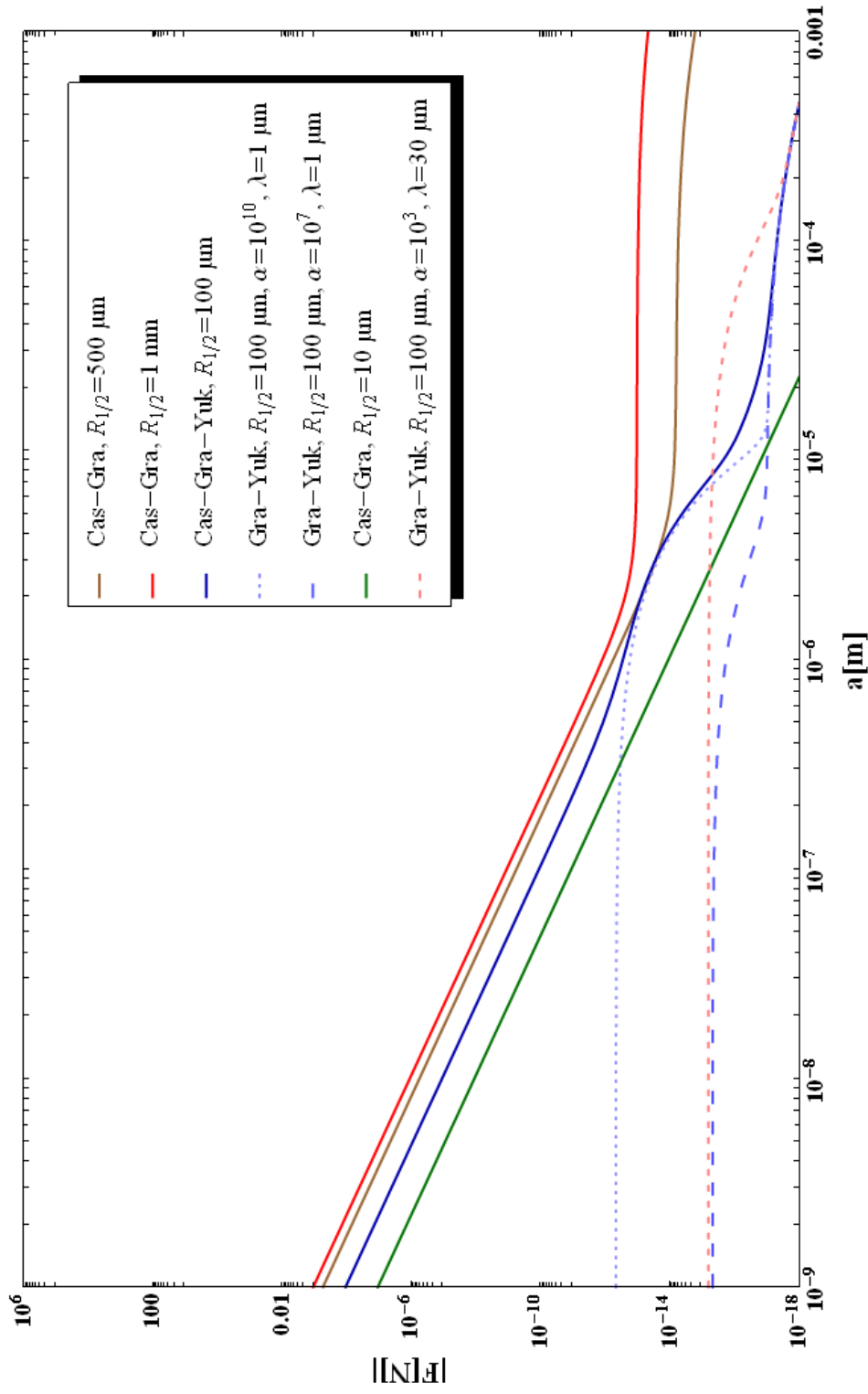


Abbildung 36: Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitations-Kraft (Gleichung 66 und 79) in doppelt logarithmischer Auftragung gegen den kleinsten Oberflächenabstand für zwei gleichgroße Kugeln (Radien sind in der Legende angegeben). Der Knick im Kraftverlauf zeigt jeweils die Dominanz der Gravitationskraft an und liegt bei den gezeigten Fällen im  $10 - 100 \text{ fN}$ -Bereich. Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 75) bei verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe aus Casimir- und Gravitationskraft auswirkt. Bei einem Kugelradius von  $10 \mu\text{m}$  liegt der Betrag, bei dem die Gravitationskraft dominant wird, unterhalb  $1 \text{ aN}$ .

### 5.3. Platte-Platte-Konfiguration

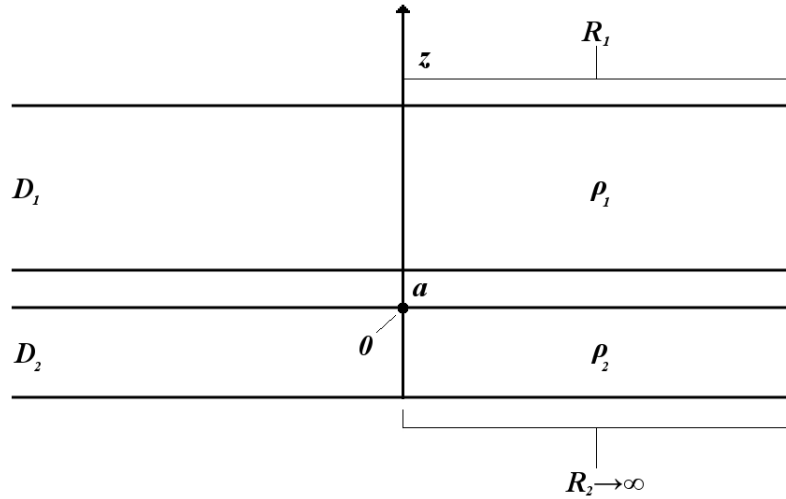


Abbildung 37: Platte-Platte-Konfiguration: Gezeigt sind zwei Platten mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$ , den Dicken  $D_1$  und  $D_2$  und den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Der Abstand der Oberflächen in  $z$ -Richtung ist durch  $a$  gegeben. Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet.

#### 5.3.1. Newtonsche Gravitation

Die gravitative Kraft zwischen zwei Platten mit den Radien  $R_1$  und einer Platte mit unendlichem Radius  $R_2 \rightarrow \infty$ , den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$  und den Dicken  $D_1$  und  $D_2$  (Abbildung 37) ergibt sich durch Integration von Gleichung 48, die die Kraft zwischen einer Punktmasse und einer Platte angibt, über das Volumen der Platte mit Radius  $R_1$ :

$$\begin{aligned}
 F_{z,N}^{P,P} &= -2\pi G \rho_1 \rho_2 D_2 \int_a^{a+D_1} dz \int_0^{R_1} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= -2\pi^2 G \rho_1 \rho_2 D_1 D_2 R_1^2.
 \end{aligned} \tag{80}$$

Umstellen liefert den auch von [10] angegebenen Druck für zwei Platten mit unendlichem Radius

$$P_{z,N}^{P,P} = \frac{F_{z,N}^{P,P}}{\pi R_1^2} = -2\pi G \rho_1 \rho_2 D_1 D_2. \quad (81)$$

Diese Kraft hängt explizit nicht vom Abstand der Platten ab. Um dynamische Messungen in der Platte-Platte-Konfiguration vorzunehmen, muss die Kraft variiert werden, indem die Quellmasse lateral bewegt wird.

### 5.3.2. Yukawa-artige Wechselwirkung

Die Kraft zwischen einer Platte mit dem Radius  $R_1$  und  $R_2 \rightarrow \infty$  im Abstand  $a$  ergibt sich durch Integration von Gleichung 57 über das Volumen der Platte mit Radius  $R_1$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} F_{z,Yu}^{P,P} &= -2\pi G \alpha \lambda \rho_1 \rho_2 \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) \int_0^{R_1} \rho d\rho \int_a^{a+D_1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-z/\lambda} \\ &= -2\pi^2 G \alpha \lambda^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 e^{-a/\lambda} \left(1 - e^{-D_1/\lambda}\right) \left(1 - e^{-D_2/\lambda}\right) \end{aligned} \quad (82)$$

Mit der Fläche der Platte ( $A = \pi R_1^2$ ) ergibt sich der in [10] angegebene Druck für zwei Platten unendlicher Größe.

$$P_{z,Yu}^{P,P} = \frac{F_{z,Yu}^{P,P}}{A} = -2\pi G \alpha \lambda^2 \rho_1 \rho_2 e^{-\frac{a}{\lambda}} \left(1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}}\right) \left(1 - e^{-\frac{D_1}{\lambda}}\right). \quad (83)$$

Für den Fall, dass  $D_1, D_2 \gg \lambda$  ergibt sich

$$P_{z,Yu}^{P,P} = -2\pi G \alpha \lambda^2 \rho_1 \rho_2 e^{-\frac{a}{\lambda}}. \quad (84)$$

### 5.3.3. Casimir-Kraft

Der Casimir-Druck für zwei ideale Metallplatten ist gegeben durch

$$P_{z,Ca}^{P,P} = -\frac{\partial E_{z,Ca}^{P,P}}{\partial a}. \quad (85)$$

Durch Einsetzen der in Abschnitt 3.3.1 hergeleiteten Gleichung 20 ergibt sich der Druck zu

$$P_{z,Ca}^{P,P} = \frac{F_{z,Ca}^{P,P}}{A} = \frac{-\pi^2 \hbar c}{240a^4}. \quad (86)$$

Daraus ergibt sich die Kraft zwischen zwei Platten mit Radius  $R_1$  zu:

$$F_{z,Ca}^{P,P} = \frac{-\pi^3 \hbar c R_1}{240 a^4} \quad (87)$$

Im Experiment stellt die parallele Ausrichtung der Platten ein entscheidendes Problem dar. Aus diesem Grund wird die direkte Messung der Casimir-Kraft zumeist in der Kugel-Platte-Konfiguration durchgeführt.

#### 5.3.4. Resultierende Kraftverläufe

Die aus den Gleichungen 80, 87 und 82 resultierenden Kraftverläufe sind in Abbildung 38 dargestellt. Welche Kräfte jeweils dargestellt sind, ist der Bildunterschrift beziehungsweise der Legende zu entnehmen.

Anders als bei der Kugel-Platte-Konfiguration lässt sich hier die Gravitationskraft durch Vergrößerung der Plattenflächen steigern. Für Abstände unterhalb der Dominanz der Gravitation muss die Casimirkraft entweder abgeschirmt oder herausgerechnet werden. Bei Abschirmung ist der kleinstmögliche Abstand durch die Dicke des Schildes begrenzt. Dieses sollte wiederum möglichst steif sein und kann somit nicht beliebig dünn gewählt werden. Eine andere Möglichkeit ist, eine periodische Struktur mit unterschiedlicher Dichte und glatter Oberfläche zu verwenden, so dass die Casimirkraft bei lateraler Bewegung idelaerweise konstant ist [70]. Möglicherweise lässt sie sich auch durch geschickte Wahl von Materialkonstellationen abschwächen beziehungsweise zugunsten des Experimentes manipulieren. Dies ist ein aktuelles Feld der Forschung beispielsweise läuft bei der DARPA<sup>17</sup> ein Programm mit dem Namen “*The Casimir Effect Enhancement program*” [57], siehe auch [34], [6] und [35].

---

<sup>17</sup>Defense Advanced Research Projects Agency

## Kraft-Abstands-Kurven verschiedener Platte-Platte-Konfigurationen

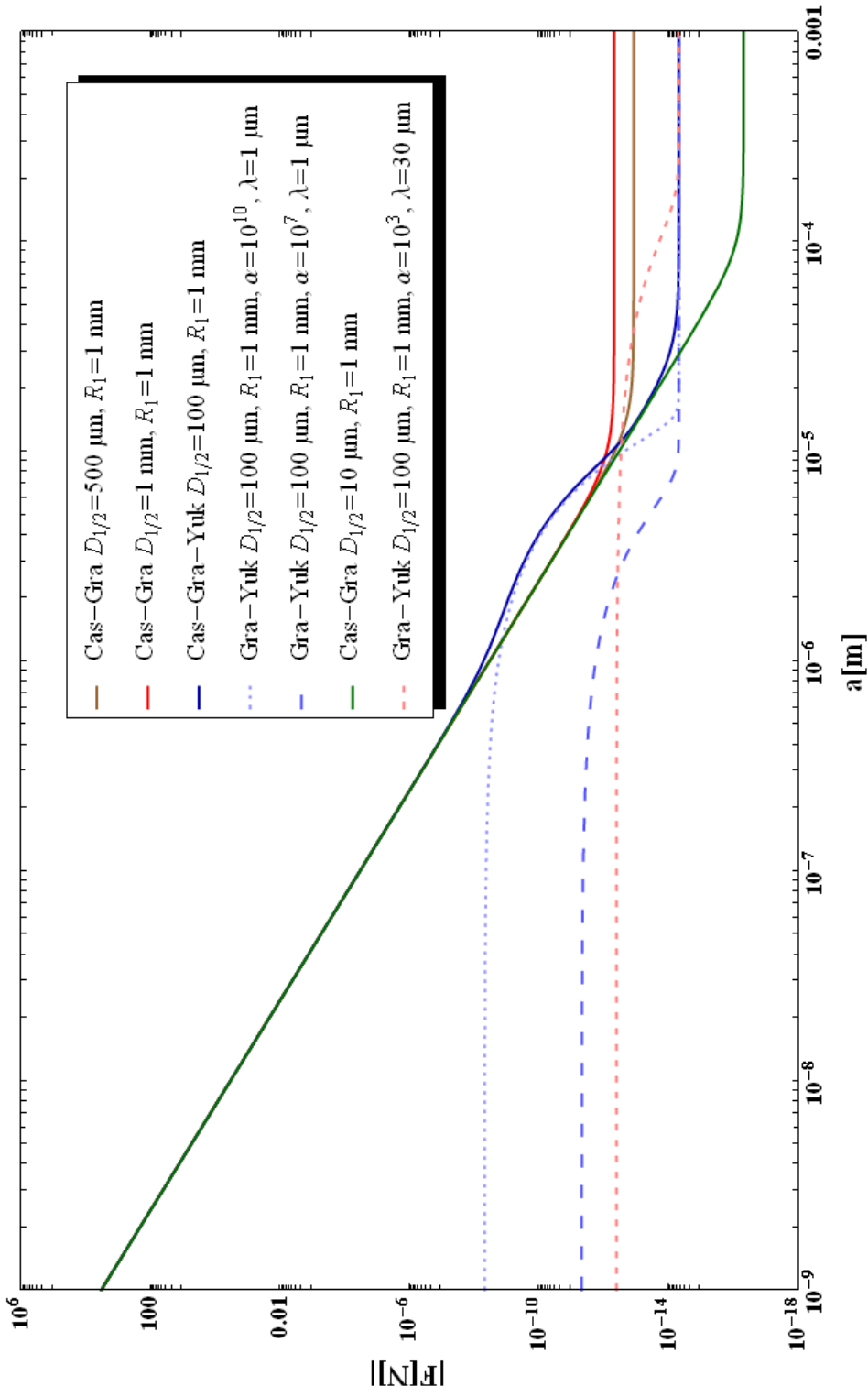


Abbildung 38: Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitationskraft (Gleichung 80 und 87) in doppelt logarithmischer Auftragung für zwei Goldplatten der Fläche  $1000 \mu\text{m} \times 1000 \mu\text{m}$  (restliche Werte sind in der Legende angegeben). Beim Übergang in den nahezu konstanten Wert der Gesamtkraft wird jeweils die Gravitationskraft dominant und liegt bei den gezeigten Fällen im  $10 - 100 \text{ fN}$ -Bereich. Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 82) bei verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe von Casimir- und Gravitationskraft auswirkt.

#### 5.4. Vergleich der drei Konfigurationen

Vergleicht man die drei Konfigurationen, so kommt man zu einer Einschätzung, welche Konfiguration für welche Art Experiment am besten geeignet ist. In Abbildung 39 sind Kraft-Abstands-Kurven in doppelt-logarithmischer Auftragung für die verschiedenen Konfigurationen gezeigt. Abgebildet sind die Platte-Platte-Konfiguration (Gleichungen 80, 87, 82, blau), die Kugel-Platte-Konfiguration (Gleichungen 46, 65, 59, grün) und die Kugel-Kugel-Konfiguration (66, 79, 75, rot). Die Formeln für die resultierenden Kräfte sind im Anhang zusammengefasst dargestellt. Deutlich ist, dass die Casimir-Kraft in der Platte-Platte-Konfiguration am stärksten ins Gewicht fällt. In dieser Konfiguration lässt sich jedoch durch Vergrößerung der Plattenfläche im Prinzip beliebig viel Masse in einen kleinen Abstandsbereich bringen, was einen entscheidenden Vorteil gegenüber den anderen Konfigurationen bedeutet. Für direkte Messungen der Casimir-Kraft ist es wichtig, diese möglichst exakt zu berechnen. Aus diesem Grund ist die Kugel-Platte-Konfiguration am besten geeignet, da keine zusätzliche Unsicherheit durch nicht perfekte Parallelität von Platten entsteht. Die Kugel-Kugel-Konfiguration liefert zwar die geringste Casimir-Kraft. Dafür ist gerade bei kleinen Apparaturen die Gravitationskraft sehr schwach und der Betrag an Masse welcher in die Reichweite möglicher Werte für  $\lambda$  gebracht werden kann stark begrenzt.



## Vergleich der drei Konfigurationen

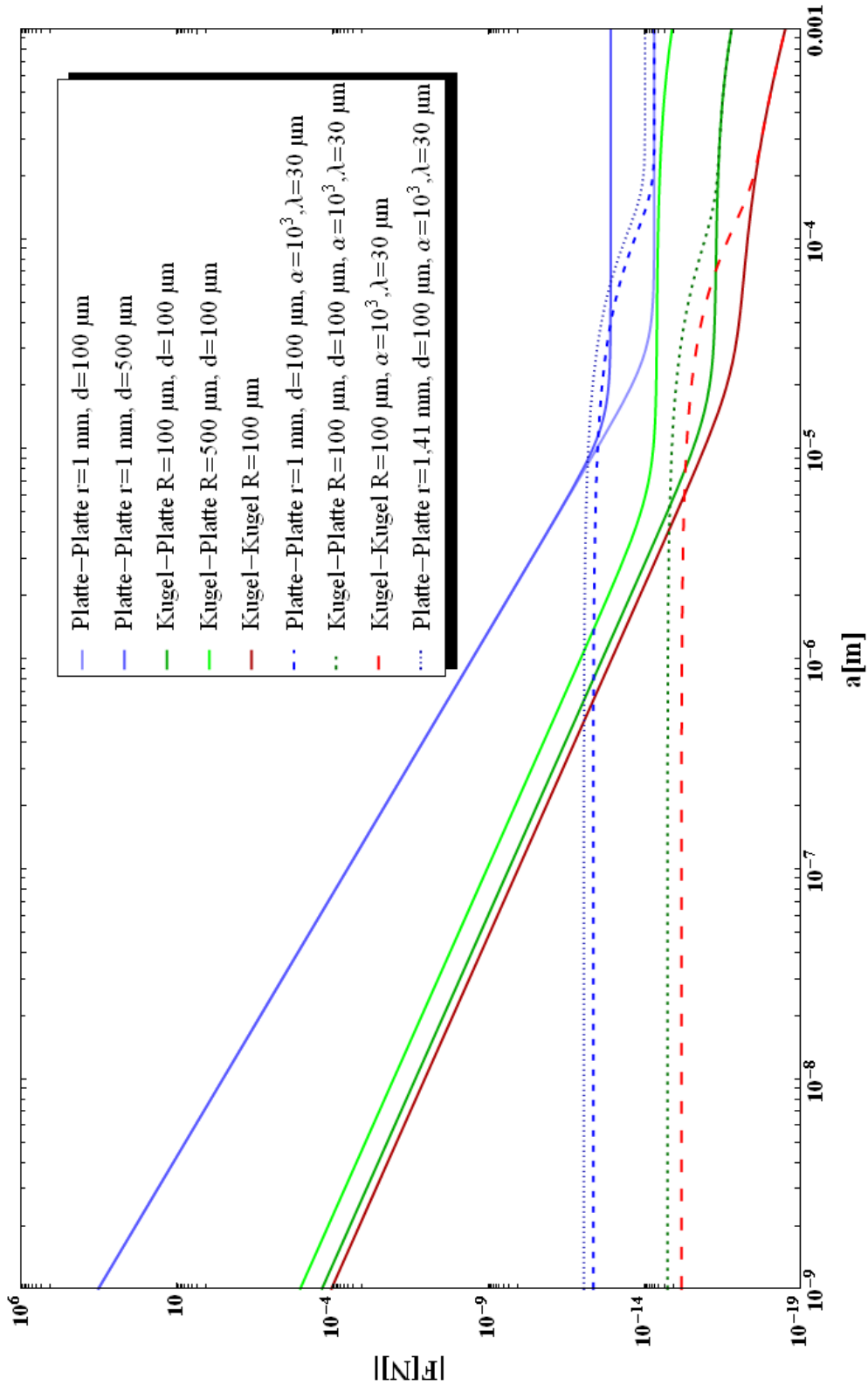


Abbildung 39: Kraft-Abstands-Kurven der unterschiedlichen Konfigurationen im Vergleich. Gezeigt sind die Platte-Platte-Konfiguration (Gleichungen 80, 87, 82, blau), die Kugel-Platte-Konfiguration (Gleichungen 46, 65, 59, grün) und die Kugel-Kugel-Konfiguration (66, 79, 75, rot).

## 6. SAMs und mikromechanischer Ansatz

Die Darstellung in den folgenden beiden Abschnitten orientiert sich eng an der Dissertation von Christoph T. Nottbohm [49].

### 6.1. SAMs

Dieser Abschnitt liefert eine Einführung zu selbstorganisierenden Monoschichten (engl. *Self-assembled Monolayers* im Folgenden SAMs genannt). SAMs sind zweidimensionale Systeme organischer Moleküle, die spontan hochgeordnete molekulare Filme auf einer Vielzahl fester Oberflächen bilden. Erstmals entdeckt wurde dieses Phänomen Anfang der 1980er, als J. Sagiv [58] sich mit Silanfilmen auf SiO<sub>2</sub> beschäftigte und R. Nuzzo und D. D. Allara [50] mit Thiolen auf Goldsubstraten. Seitdem waren SAMs Gegenstand intensiver Forschung in diversen Feldern wie molekularer Elektronik, Materialwissenschaften und Biologie [49].

Der Aufbau von SAMs bildenden Molekülen ist schematisch in Abbildung 40 dargestellt. Der SAM besteht aus drei Teilen: Einer Kopfgruppe, die ans Substrat bindet (head group), einem Zwischenteil (spacer) und einer Endgruppe (tail group).

Thiol-Kopfgruppen können an verschiedene Metalle binden, wobei Gold aufgrund seiner Reaktionsträgheit das meist verwendete ist. Mit einer Bindungsenergie von  $\approx 120$  kJ/mol wird die Wechselwirkung zwischen Thiol und Gold als Chemisorption bezeichnet. Eine Vielzahl von Metallen und Oxiden kann durch Wahl geeigneter Kopfgruppen funktionalisiert werden.

Die Wechselwirkung zwischen den Molekülen hängt von den Eigenschaften des Spacers ab. SAMs mit unpolaren Spacern wie Alkanketten oder Phenylringe werden durch Van-der-Waals-Kräfte stabilisiert. Für Alkanthiole wurde gefunden, dass die Geschwindigkeit der Selbstorganisation mit zunehmender Kettenlänge anwächst.

Die Endgruppe ist für die Oberflächeneigenschaften wie Benetzbarkeit, Adhäsion und Reibung verantwortlich. Zum Beispiel liefert eine Carbonsäure-Endgruppe eine hydrophile Oberfläche, wogegen eine Methyl-Endgruppe hydrophobe Beschichtung verursacht. Detaillierte Beschreibungen der Eigen-

schaften von SAMs sind gemäß [49] in den Reviews von A. Ulman [67, 68], F. Schreiber [59] und J. Love [41] zu finden.

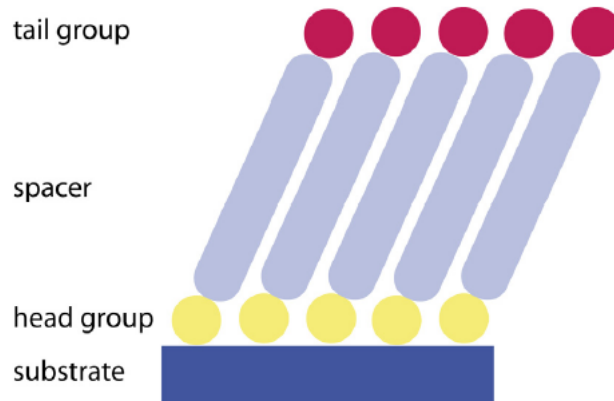


Abbildung 40: Schematisch lässt sich ein SAM durch drei Teile beschreiben: Die Kopfgruppe, die ans Substrat bindet (head group), der Zwischenteil (spacer) und die Endgruppe (tail group) [49].

### 6.2. Wechselwirkung von SAMs mit Elektronen

Bestrahlung von Alkanthiol-SAMs mit Elektronen führt zu ihrer Zerstörung wie in Abbildung 41 a schematisch dargestellt ist. Beteiligte Prozesse sind Wasserstoffabspaltung, Desorption und ein Verlust der Ordnung [44, 75, 76]. Diese Eigenschaften lassen sich mittels strukturierter Elektronenbestrahlung nutzen, um Schablonen zum Ätzen oder zur elektrochemischen Metalldeponierung herzustellen [63, 62, 30, 69].

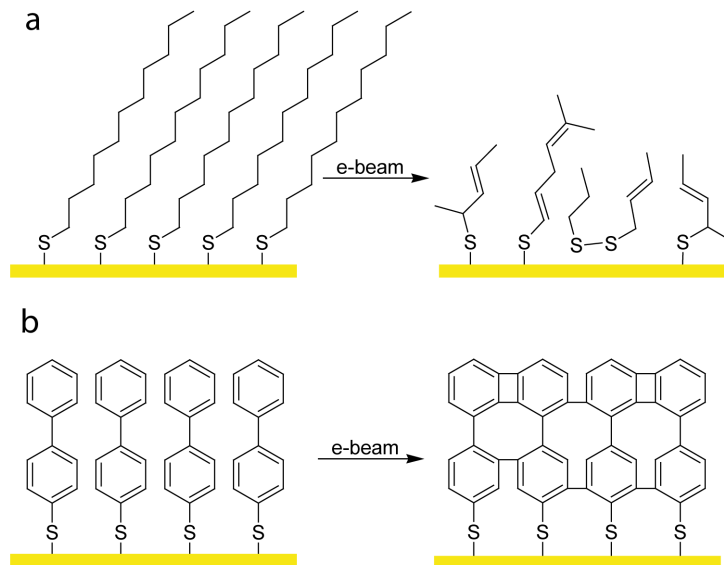


Abbildung 41: Auswirkung von Elektronenbestrahlung auf die Struktur von SAMs. Aliphatische SAMs werden durch die Bestrahlung zerstört (a), wogegen aromatische SAMs quervernetzt werden (b). Abbildung nach [49].

Aromatische SAMs reagieren gegensätzlich dazu auf die Bestrahlung mit Elektronen. Hier ist eine Quervernetzung zu beobachten die dem SAM mehr Stabilität verleiht [21, 20, 23]. Dieser Prozeß ist in Abbildung 41 b gezeigt. Tai et al. zufolge [65] ist die Quervernetzung inhomogen was die Eindringtiefe der quervernetzenden Bestrahlung angeht. Die Vernetzung ist demnach am stärksten an der äußeren Grenzfläche des SAMs. Desweiteren werden aufgrund der Loslösung von Wasserstoff während der Elektronenbestrahlung Nitro-Endgruppen zu Aminogruppen reduziert. Dieser Vorgang wird "chemische Lithografie" (*engl. chemical lithography*) genannt [15, 22].

Es konnte gezeigt werden, dass durch die Quervernetzung stabile Nanoblätter entstehen, die nach Aufbrechen der Schwefel-Gold-Bindung mittels Jod-Dampf-Exposition durch Beschallung mit Ultraschall auf der Oberfläche bewegt werden können [14]. Außerdem konnte gezeigt werden, dass durch Auflösung des Siliziumnitrid-Substrates ( $\text{SiN}_x$ ) mittels Flusssäure (HF) (Abbildung 42) freistehende Kohlenstoff-Nanoblätter erzeugt werden können [14].

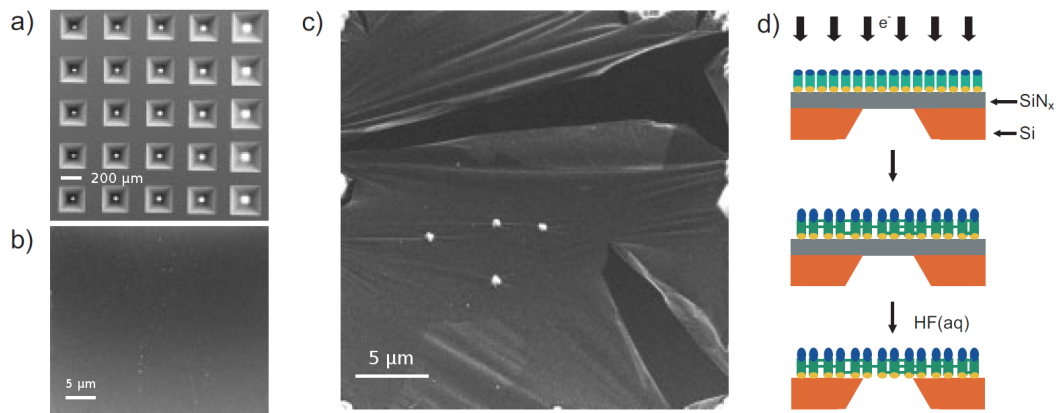


Abbildung 42: Elektronenmikroskopische (REM) Aufnahmen freistehender Nanoblätter, die durch Ätzen der 30 nm starken  $\text{SiN}_x$ -Schicht unterhalb des quervernetzten SAMs erzeugt wurden. a) zeigt die Fenster auf dem vorstrukturierten Substrat. b) zeigt ein intaktes Nanoblatt. c) zeigt ein gerissenes Nanoblatt. d) Schema des Herstellungsprozesses. Abbildung nach [14]

Eine alternative Methode zur Präparation freistehender Nanoblätter ist in Abbildung 43 gezeigt. Mit diesem Verfahren lassen sich auch Multilagen von Kohlenstoffnanoblättern erzeugen [72].

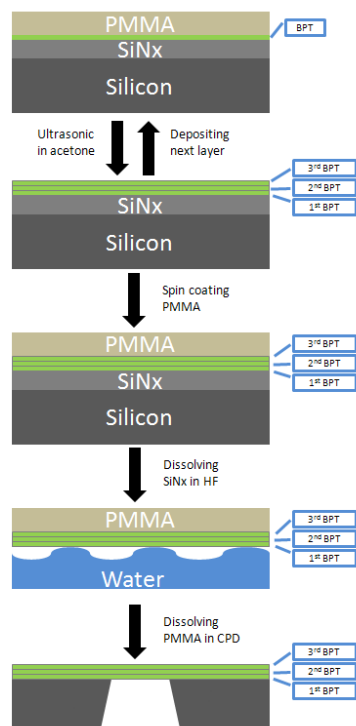


Abbildung 43: Schematische Darstellung der Präparation von Multilagen freistehender Nanoblätter aus 1,1'-Biphenyl-4-thiol (BPT). Die Nanoblätter werden mittels einer Schicht aus Polymethylmethacrylat (PMMA) aufeinander geschichtet und nach HF-Ätzung des Siliziumnitrit-Substrates und anschließender Spülung mit einer solchen auf ein Fenster transferiert. Abbildung nach [72]

Ein derartiger Aufbau erlaubt die Charakterisierung der Nanoblätter bezüglich ihrer mechanischen Eigenschaften [72]. Diese werden im nächsten Abschnitt behandelt.

### 6.3. Eigenschaften

Will man ein Kohlenstoff-Nanoblatt oder Multilagen von Nanoblättern verwenden, um einen Kraftsensor zu bauen (siehe nächster Abschnitt), so ist es notwendig, seine mechanischen Eigenschaften zu kennen. Die mechanischen Eigenschaften (Elastizitätsmodul, E-Modul) für große Drücke wurden von Xianghui Zhang [72] untersucht. Eine Methode, die dazu verwendet wurde, war der Bulge-Test (bulge engl. für ausbeulen) nach Beams [5] (Abbildung 44).

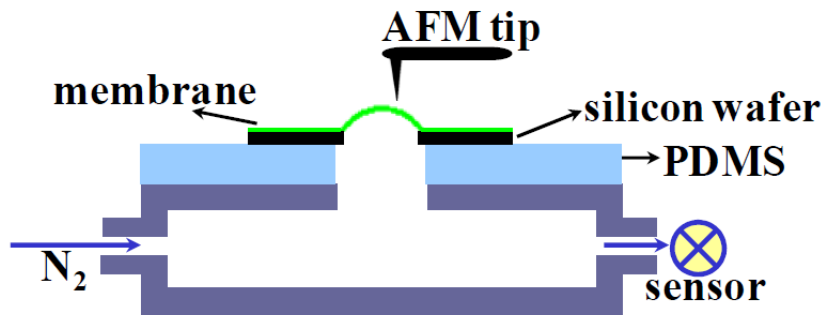


Abbildung 44: Schematische Darstellung der Druckzelle für den Bulge-Test zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls des Nanoblattes. Die Membran ist auf einem Silizium-Wafer aufgebracht und schließt eine Druckzelle ab. Der Druck wird über ein Stickstoffventil reguliert und über einen differentiellen Drucksensor gemessen. Die Auslenkung beziehungsweise Krümmung der Membran wird mittels Rasterkraftmikroskop (AFM) gemessen. Abbildung nach [72].

Bei diesem Test wird die Auslenkung der Membran bei verschiedenen Drücken (0-1 bar) mit dem Rasterkraftmikroskop (AFM) gemessen (Federkonstante 0,1 N/m). Das daraus abgeleiteten E-Modul liegt bei um die 10 GPa [72]. Aufgrund der Federkonstante des Cantilevers ist diese Methode nur für verhältnismäßig große Drücke sensitiv (im Verhältnis zu gravitativen Kräften und Drücken in möglichen ISLV-Experimenten). Ein System mit geringerer Federkonstante ließe sich nicht mit dem Cantilever charakterisieren. Zur Charakterisierung der Membran im Bereich kleiner Drücke und Kräfte müsste man auf andere Verfahren ausweichen. Möglicherweise könnten dabei piezoresistive Eigenschaften der Membran hilfreich sein, die sich in bisher unveröffentlichten Experimenten bereits angedeutet haben. Im Bezug auf Graphen wurden derartige Eigenschaften bereits demonstriert [37]. Der von Lee et al. [37] gemessene K-Faktor, wie er auch für Dehnungsmessstreifen angegeben wird (*engl. piezoresistance gauge factor*) wurde für Graphen zu  $\sim 6.1$  bestimmt.

In der Arbeitsgruppe von Prof. Armin Götzhäuser wird versucht eine ähnliche Charakterisierung für die Nanoblätter durchzuführen [73]. Abbildung 45 zeigt heliumionenmikroskopische (HIM) Aufnahmen eines Messaufbaus zu diesem Zweck.

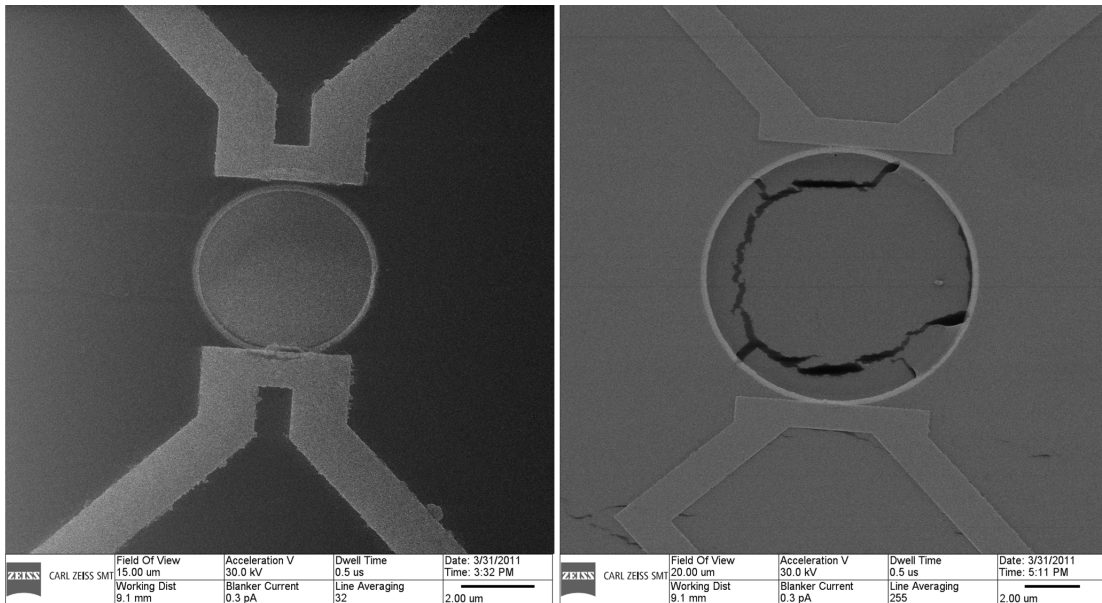


Abbildung 45: Heliumionenmikroskopische Aufnahmen von Mikrokontakten zur Ermittlung der piezoresistiven Eigenschaften von Nanoblättern. Im rechten Bild ist ein gerissenes Nanoblatt zu sehen, ein Problem, das bislang noch beim Trocknungsprozess auftritt und daher bislang verlässliche Messungen verhindert. Abbildung nach [73].

#### 6.4. Notwendige Vorarbeiten und denkbare Experimente

Um die Eignung von Nanoblättern für hochsensitive Kraftmessungen abschließend zu bewerten, sind einige Vorarbeiten nötig. Ein wichtiger Zwischenschritt wäre es, zunächst einen Kraftsensor zu bauen. Würde man zum Beispiel das Nanoblatt direkt als Feder verwenden müsste man zunächst eine Methode zur Detektion der Auslenkung auswählen. Denkbar wäre beispielsweise eine Detektion unter Ausnutzung piezoresistiver Eigenschaften des Nanoblattes oder mittels optischer Methoden (Mehrsegmentdetektor/Interferometrie). Weiter wäre es notwendig piezoresistive Eigenschaften und die Federkonstante des Systems genauer zu untersuchen (siehe oben). Ein beispielhafter Aufbau in dem ein Nanoblatt als Feder dienen könnte ist in Abbildung 46 gezeigt. Die Apparatur könnte um  $90^\circ$  gedreht werden, um Konkurrenz mit dem Schwerfeld der Erde zu verhindern.



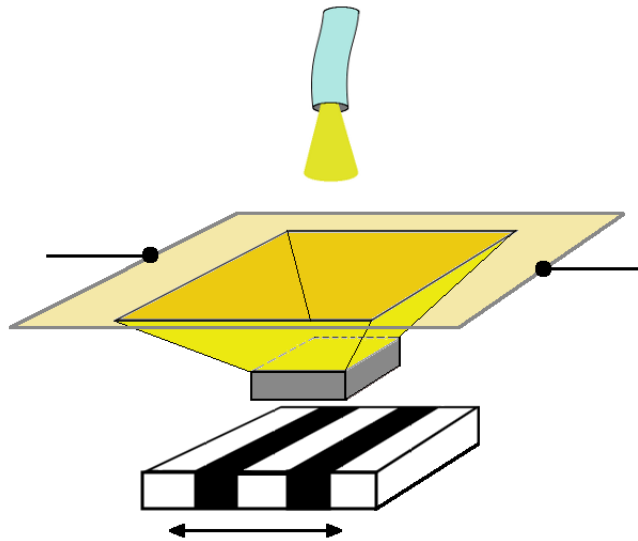


Abbildung 46: Die gelbe Fläche symbolisiert ein Nanoblatt, das auf einem Rahmen befestigt ist. Daran hängt eine Testmasse (grau). Unterhalb dieser ist eine Quellmasse abgebildet, bestehend aus zwei Materialien unterschiedlicher Dichte, wie sie beispielsweise für dynamische Messungen verwendet werden könnte (Pfeil in Bewegungsrichtung). Zur Detektion der Auslenkung könnten piezoresistive Eigenschaften eines Nanoblattes (durch Kontakte symbolisiert) oder aber optische Methoden (symbolisiert durch optische Faser) verwendet werden.

Eine weitere Möglichkeit eine Feder zu realisieren wäre, das Nanoblatt als eine Art "Bastelpapier" zu verwenden. Beispielsweise könnte man mittels eines fokussierten Ionenstrahls (*engl. focused ion beam, FIB*) eine Spirale in das Nanoblatt schneiden (Abbildung 47).

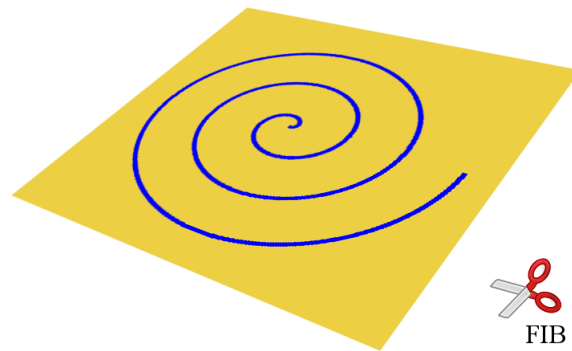


Abbildung 47: Schematische Darstellung eines Kohlenstoff-Nanoblattes, in das mittels FIB ein spiralförmiges Muster geschnitten wurde, um eine Spiralfeder zu erzeugen.

In seiner Mitte könnte man eine Testmasse befestigen, so dass diese bei Anheben der Konstruktion wiederum an einer Art Spiralfeder hängen würde. Es ließen sich so fast beliebige Formen der Nanoblätter erzeugen und miteinander kombinieren.

Alternativ könnte man ein Nanoblatt als Torsionspendel für einen Mikrotorsionsoszillator verwenden (Abbildung 48).

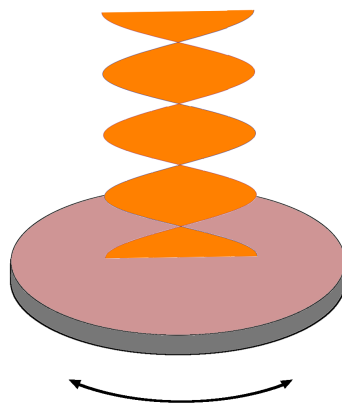


Abbildung 48: Ein Band aus einem Nanoblatt ließe sich möglicherweise als “Draht” für ein Mikrotorsionspendel verwenden. Der orangefarbene Bereich stellt hier ein verdrilltes Nanoblatt-Band dar. Die violette Platte symbolisiert eine rotierbare Testmasse.

Unabhängig davon welcher Ansatz gewählt wird, hängen die Eigenschaften von den für den SAM verwendeten Molekülen sowie von der Größe des

verwendeten Nanoblattes ab. Ein solcher Kraftsensor wäre zu charakterisieren und für die angestrebten Ziele zu optimieren.

Ein solcher Kraftsensor könnte sich auch als nützlich für andere Anwendungen erweisen, da er sich auf jeden Fall deutlich von Cantilevern unterscheiden wird.

Es wäre sinnvoll, seine Eigenschaften bezüglich Federkonstante, Gütefaktor, Reproduzierbarkeit von Messergebnissen und Verhalten bei tiefen Temperaturen mit denen eines Cantilevers (Federkonstante Stanford-Cantilever  $k \approx 10^{-2}$  N/m [19]) zu vergleichen, um beurteilen zu können, ob sich entscheidende Vorteile ergeben. Es gibt auch Cantilever mit etwas geringerer Federkonstante zum Beispiel den B lever von Olympus  $k \approx 0,6 \cdot 10^{-2}$  N/m [51]. Ein Kraftsensor mit deutlich kleinerer Federkonstante könnte für vielfältige Anwendungen nützlich sein. Denkbar wäre beispielsweise, dass sich ein Kraftsensor mit wesentlich geringerer Federkonstante (bedingt durch die hohe Flexibilität der Nanoblätter) realisieren lässt, wobei der Gütefaktor (besonders wichtig bei dynamischen Messungen) wesentlich geringer als beispielsweise eines Cantilevers sein sollte.

Da aufgrund Brownscher Molekularbewegung ein erhebliches thermisches Rauschen die Messungen beeinflusst, ist es notwendig, dass ein Sensor die gewünschten Eigenschaften in einer Tieftemperaturumgebung zeigt. Auch dies wäre zu überprüfen.

Ein parallel zu verfolgender Ansatz ist sicher die Forschung im Gebiet der Casimirkraft aufmerksam zu beobachten, da direkte Messungen der Gravitationskraft bei kleinen Abständen ( $< 1 \mu\text{m}$ ) möglich würden, wäre man in der Lage durch die Wahl des Materials oder der Oberflächenstruktur die Casimirkraft "auszuschalten" oder umzukehren (siehe Abschnitt 3.3.5). Zumindest könnte sich die Dicke der Abschirmung verringern lassen. Hierbei würden die Methoden der Mikro- und Nanostrukturierung von Oberflächen sicher eine wichtige Rolle spielen.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, zu einer Einschätzung zu gelangen über die Machbarkeit eines ISLV-Experimentes mittels mikromechanischem Ansatz, im Speziellen mittels der Verwendung von Kohlenstoff-Nanoblättern. Zu diesem Zweck wurde zunächst ein Überblick gegeben über die theoretischen Konzepte mit zusätzlichen Raumdimensionen, die eine Verletzung des newtonschen Gravitationsgesetzes bei kleinen Abständen möglich machen.

Weiter wurden die Kräfte abgehandelt, die bei der mathematischen Beschreibung möglicher experimenteller Konfigurationen zu berücksichtigen sind, um zu einem möglichst exakten Verständnis der Kräfte bei kleinen Abständen zu gelangen. Dabei wurde ein besonderer Schwerpunkt auf die bei Abständen um wenige Mikrometer dominante Casimir-Kraft beziehungsweise Lifschitz-Theorie gelegt, da diese weit weniger bekannt sind als die übrigen angesprochenen Kräfte. Hier konnte gezeigt werden, dass die Beschreibung beliebiger Material- und Form-Kompositionen möglich ist sowie auch die Beschreibung für unterschiedliche Temperaturen, wenngleich die Genauigkeit der Berechnungen durch Rauigkeit der Oberflächen und Temperaturschwankungen begrenzt ist.

In der Folge wurde ein Überblick über bereits durchgeführte ISLV-Experimente gegeben mit Schwerpunkt auf den für diese Arbeit relevanten Abständen. Auch die damit erzielten Beschränkungen und in der Planung oder Durchführung befindlichen Experimente wurden behandelt. Dabei ist zu bemerken, dass immer noch ein großer interessanter Bereich im Parameterraum für eine mögliche Modifikation des Quadratabstandsgesetzes im Prinzip experimentell zugänglich ist.

Weiter wurde die mathematische Beschreibung für drei verschiedene Testmassen-Konfigurationen zusammengestellt und damit Kraft-Abstands-Kurven simuliert. Diese wurden diskutiert und interpretiert. Dabei wurde für direkte Messungen der Gravitationskraft beziehungsweise Yukawa-artiger Modifikationen die Platte-Platte-Konfiguration als beste Lösung identifiziert. Nur in dieser Konfiguration lässt sich der Betrag an Masse im interessanten Abstandsreich und mit ihm das Messsignal quasi beliebig variieren. Die Gra-

vitationskraft zwischen zwei Platten ist in guter Näherung konstant, das heißt nicht abstandsabhängig. Es ist in dieser Konfiguration also notwendig, durch laterale Bewegung der Quellmasse ein dynamisches Signal zu erzeugen.

Für direkte Messungen der Casimir-Kraft ist die Kugel-Platte-Konfiguration am besten geeignet, da sie sich für diese Konfiguration am exaktesten berechnen und herausrechnen lässt. In der Platte-Platte-Konfiguration ist die parallele Ausrichtung der Platten ein entscheidendes Problem, das zu zusätzlicher Rechenunsicherheit führt.

Die Kugel-Kugel-Konfiguration ist für Messungen bei sehr kleinen Abständen nicht geeignet, da durch die hohe Abhängigkeit des Kraftbetrages vom Kugelradius ( $r^6$ ) das Messsignal für kleine Kugeln zu gering würde.

Abschließend wurde eine Einführung zu SAMs und damit erzeugten Nanoblättern gegeben und ihre Eigenschaften diskutiert. An dieser Stelle schließen sich erste notwendige Vorarbeiten an. Zur abschließenden Bewertung der Eignung für den Bau eines Kraftsensors im richtigen Kraftbereich ist eine genauere Charakterisierung erforderlich. Diese betrifft Federkonstante, Resonanzfrequenz und Gütefaktor sowie piezoresistive Eigenschaften und kryogenes Verhalten.

Sobald es gelingt einen Kraftsensor zu bauen, der die Bearbeitung eines unerforschten Bereiches im Parameterraum denkbar werden lässt, schließen sich Design und Planung eines ISLV-Experiments an.

## Abkürzungsverzeichnis

ADD	.....	Arkani-Hamed, Dimopoulos und Dvali
AFM	.....	Atomic force microscope, Rasterkraftmikroskopie
ART	.....	Allgemeine Relativitätstheorie
BEC	.....	Bose-Einstein-Condensate, Bose-Einstein-Kondensat
BPT	.....	1,1'-Biphenyl-4-thiol
CERN	.....	Conseil Europeen pour la Recherche Nucleaire, Europäische Organisation für Kernforschung
DARPA	.....	Defense Advanced Research Projects Agency
E-Modul	.....	Elastizitätsmodul
Fermilab	.....	Fermi National Accelerator Laboratory
FIB	.....	focused ion beam, fokussierter Ionenstrahl
GUT	.....	Grand Unified Theory
GVT	.....	Große Vereinheitlichte Theorie
HF	.....	Hydrogenfluorid, Fluorwasserstoffsäure, Flusssäure
HIM	.....	Helium ion microscope, Heliumionenmikroskop
KK-Moden	...	Kaluza-Klein-Moden
KK-Teilchen	.	Kaluza-Klein-Teilchen
KK-Tower	....	Kaluza-Klein-Tower
PFA	.....	Proximity Force Approximation
PMMA	.....	Polymethylmethacrylat
PZT	.....	Plumbum Zirconate Titanat, Blei-Zirkonat-Titanat
REM	.....	Rasterelektronenmikroskop
SAM	.....	Self-assembled Monolayer, selbstaggregierende Monolagen
SLAC	.....	Stanford Linear Accelerator Center
SM	.....	Standardmodell der Teilchenphysik
SRT	.....	Spezielle Relativitätstheorie
ISLV	.....	inverse square law violation, Verletzung des Quadratabstands- gesetzes

## Abbildungsverzeichnis

- 1 Betrachtet man einen Gartenschlauch auf einem Sportplatz, wirkt er eindimensional. Erst bei näherer Betrachtung wird deutlich, dass seine Oberfläche zweidimensional und das eingeschlossene Volumen dreidimensional ist [56](S. 55). . . . . 7
- 2 Gezeigt ist eine Materiekugel im Raum. Der Raum um die Kugel herum ist verzerrt. Die Kugel drückt eine Delle in den Raum, deren Tiefe durch ihre Masse bestimmt wird. Der dreidimensionale Raum beziehungsweise die vierdimensionale Raumzeit ist hier zweidimensional wiedergegeben. Wäre die gezeigte Kugel die Erde, so könnte man sich den Mond als eine kleinere Kugel vorstellen, welche in der Delle um die Erde "rollt". Das die kleinere Kugel dabei ihrerseits die Raumzeit krümmen würde, wird hier aufgrund ihrer geringeren Masse vernachlässigt [56] (S.136). . . . . 8
- 3 Geht von einer Masse eine konstante Anzahl von Schwerfeldlinien aus, die sich radial ausbreiten, so schneidet dieselbe Anzahl Feldlinien eine Sphäre mit beliebigem Radius, wobei die Oberfläche der Sphäre sich quadratisch mit dem Radius vergrößert. Die Stärke der Anziehungskraft ist dabei der Dichte der Schnittpunkte auf der Sphärenoberfläche proportional und nimmt somit mit dem Abstand quadratisch ab [56](S.65). . . . 10
- 4 Das Wasser breitet sich zunächst in drei Dimensionen aus, ehe es dann nur noch entlang der einen Dimension des Schlauches weiterfließt [56](S. 67). . . . . 11
- 5 Die Gravitationsfeldlinien eines massiven Objektes breiten sich über kurze Entfernungen radial, über große Entfernungen nur entlang der unendlichen Dimensionen aus [56](S. 67). . . . . 11

6	Wir leben möglicherweise auf einer Brane. Das heisst, die Materie, Photonen und andere Teilchen des Standardmodells könnten auf diese Brane beschränkt sein. Nur die Gravitation könnte sich auch über die Brane hinaus in den Bulk ausbreiten, wie durch die geschlängelten Pfeile angedeutet ist [56](S. 80). . . .	14
7	Aufspaltung der vier Grundkräfte bei abnehmender Energie seit dem Urknall. <a href="http://www.weltderphysik.de/de/940.php">http://www.weltderphysik.de/de/940.php</a> Stand:23.05.2011 .	15
8	Das Hierarchieproblem ist die Frage, warum die Planck-Energieskala so viel größer (16 Größenordnungen) als die schwache Energieskala ist [56](S.292). . . . .	19
9	<a href="http://schools-wikipedia.org/images/702/70207.png">http://schools-wikipedia.org/images/702/70207.png</a> . . . . .	26
10	Zwei parallele ideale Metallplatten der Fläche $S$ im Abstand $a$ [6](S. 29) . . . . .	27
11	Die Permittivität von Gold entlang der imaginären Frequenzachse. Die durchgezogene Linie wurde mit dem allgemeinen <i>plasmalike model</i> erstellt. Dabei wurden optische Daten im Zusammenhang mit den Core-Elektronen verwendet. Die gestrichelte Linie wurde erhalten durch Extrapolation optischer Daten zu niedrigen Frequenzen mittels Drude-Theorie [34] (S.1843).	34
12	Die Permittivitäten entlang der imaginären Frequenzachse als Funktionen vom Logarithmus der Frequenz für (a) $Si$ und (b) $SiO_2$ . Die gestrichelten Linien zeigen die Position der ersten Matsubara-Frequenz bei $T = 300K$ [6]. . . . .	36
13	Logarithmus der (a) freien Casimirenergie pro Flächeneinheit und (b) des Casimirdrucks für eine Konfiguration von zwei Halbräumen aus $Si$ und $SiO_2$ bei $T=300K$ als Funktion vom Abstand [6](S. 313). . . . .	38
14	Vorrichtung des ersten Irvine ISLV-Experiments. Gezeigt ist eine Testmasse, die das Gravitationsfeld innerhalb einer 60 cm hohen Röhre ( $\varnothing$ innen 6 cm, $\varnothing$ außen 8 cm) sondiert. Der hier sondierte Bereich liegt etwa bei $\lambda \approx 10$ cm [64]. . . . .	42
15	Experimentelle Obergrenzen für Abstände größer 1 mm. Referenzen sind in [48] angegeben. . . . .	43



16	2 $\sigma$ -Beschränkungen für Verletzungen des inversen Quadratabstandsgesetzes der Yukawa-Form mit $\lambda > 1$ cm [2] (S. 104). Angaben zu den einzelnen Kurven sind in [17] enthalten. . . .	44
17	Maßstabsgerechte Zeichnung von Detektor und Attraktor des Experiments von Kapner et al. [32]. Die drei kleinen Kugeln am Kopfende des Detektors wurden zur kontinuierlichen Kalibrierung der Torsionswaage genutzt. Die vier rechtwinkligen Spiegel unterhalb der Kugeln dienen zur Detektion der Verdrehung mittels Autokollimator. Die elektrische Abschirmung ist nicht gezeigt. Getestet wurden Abstände bis hinunter zu 55 $\mu$ m. Die Größe möglicher Extradimensionen wurde damit auf $R \leq 44 \mu$ m beschränkt. . . . .	45
18	Experimentelle Drehmomente als Funktion des vertikalen Abstands s. Die horizontale Skala ist unterhalb von s=100 $\mu$ m gestreckt. Im oberen Kästchen sind die 21 $\omega$ - (schwarz) und 42 $\omega$ -Drehmomente (blau) gezeigt. Die Dreiecke (Karos) in rot, zeigen das 21 $\omega$ -Drehmoment von der oberen (unteren) Attraktorplatte allein. Im unteren Kästchen sind die restlichen 21 $\omega$ Beiträge gezeigt. Die durchgezogene und gestrichelte Linie zeigen die Residuen, die man bei $\alpha = 1$ , $\lambda = 80 \mu$ m beziehungsweise bei $\alpha = 10^5$ , $\lambda = 10 \mu$ m Yukawa-Wechselwirkungen erwarten würde. Beide werden durch die vorliegenden Ergebnisse ausgeschlossen [32]. . . . .	46

19	Schematische Darstellung des von Tu et al. verwendeten experimentellen Aufbaus. Er besteht aus vier Teilen. Gezeigt ist das Pendel mit Testmasse und Gegengewicht ( <b>I</b> ), ein Rahmen, der goldbeschichtete Membranen zur Abschirmung elektrostatischer Wechselwirkung trägt ( <b>II</b> ), ein PZT-getriebener bewegter Rahmen, der die Quellmasse und eine Masse trägt, um die newtonsche Wechselwirkung weitgehend zu kompensieren ( <b>III</b> ) und elektrostatisch kompensierende Platten, um die torsionale Verkipfung zu nullen ( <b>IV</b> ). Die Quellmasse bewegt sich in $z$ -Richtung. Ihre Translation und die Rotation des Pendels werden mit Interferometer und Autokollimator bestimmt [66]. . . . .	47
20	Schematische (a) und fotografische Darstellung (b) der von Hammond et al. [24] verwendeten Torsionswaage. . . . .	48
21	Prinzip des Maryland ISLV-Tieftemperaturinstruments. Die Quellmassenscheibe (source mass) wird bei der Frequenz $\omega$ wie eingezeichnet getrieben. Die gefederten Testmassen erfahren eine differentielle Kraft bei $2\omega$ , welche bei unendlicher Scheibengröße und rein newtonscher Wechselwirkung Null wäre. Die detektierte differentielle Kraft ist somit eine direkte Messung von ISLV. Die differentielle Verschiebung der Testmassen wird mit einer SQUID-basierten Technik gemessen, die bereits bei einem 1993 durchgeführten ISLV-Experiment [42] verwendet wurde [48]. . . . .	49

- 22 Prinzip der ISLV-Test-Apparatur von Josh Long [40]. Ein PZT-Biegeschwinger (Bimorph) lässt eine Wolfram Quellmasse bei  $\sim 1$  kHz schwingen, der Resonanzfrequenz eines doppelt drehbaren Wolframoszillators, der als Testmasse dient. Eine dünne Saphirplatte mit 100 nm Gold auf beiden Seiten wird zwischen Quell- und Testmasse gebracht. Ein kapazitiver Sensor misst die Amplitude der Torsionsschwingung. Die Quell- und Testmassensysteme sind unabhängig voneinander auf Vibrations-Isolations-Stapeln montiert, die die Vibration jeweils um einen Faktor  $10^{10}$  bei 1 kHz abschwächen [48]. . . . . 50
- 23 Nicht maßstabsgetreue schematische Abbildung der Stanford ISLV-Apparatur, die aufbauend auf die Arbeiten von Chia-verini et al. [9], Smullin et al. [61] und Geraci et al. [19] verwendet wurde. Es zeigt den Cantilever, Test- und Treibmasse sowie Abschirmung und piezoelektrischen Aktor. Zwischen optischer Faser und der Oberfläche der Testmasse wird eine Fabry-Perot-Kavität gebildet, um interferometrisch die Auslenkung des Cantilevers zu bestimmen. Oben rechts ist eine REM-Aufnahme der mit FIB hergestellten Testmasse gezeigt [19]. . . . . 51

- 24 Nicht maßstabsgetreuer Querschnitt der Apparatur (a) von Weld et al. [70]. Als Teibmasse dient eine runde Scheibe geringer Dichte (Wolfram oder Messing), in welche Gräben eingearbeitet und mit einem weniger dichten Material zur Glättung der Oberfläche aufgefüllt wurden. So ergibt sich eine kreisförmige Anordnung von 100 “Quellmassen”. Die Treibmasse ist auf einer Quarzglas-Halbkugel ( $\varnothing = 5\text{cm}$ ) montiert, die auf Helium-Gas gelagert bei 3,5 Hz rotiert. Über der Treibmasse sind die Testmassen auf Cantilevern montiert, welche bei 350 Hz resonant sind. Die Auslenkung wird mit Faser-Interferometern ausgelesen. Die Oberfläche der Quellmassenscheibe ist mit einer glatten Lage Gold beschichtet. Eine goldbeschichtete Siliziumnitrit-Membran trennt die rotierende Anordnung von den Testmassen. Der Abstand zwischen Quell- und Testmasse liegt bei  $29\ \mu\text{m}$  und kann durch Regeln des Gasdrucks um etwa  $5\ \mu\text{m}$  variiert werden [48]. . . . . 51
- 25 Foto der Treibmassen auf dem Rotor im Gas-Lager. Die Oberfläche wurde noch nicht mit der Glättungsschicht versehen, so dass die Quellmassenanordnung (innerer Ring) noch zu sehen ist. Außerdem sichtbar ist das Goldmuster (äußerer Ring), das zur Detektion der Rotationsgeschwindigkeit dient [70]. . . . . 52

- 26 **(a)** Da die Apparatur 4 K heruntergekühlt wird, ist es wichtig, dass das Material, welches zur Glättung zwischen das Quellmassenmuster gegeben wird, einen ähnlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten hat. Wie hier gezeigt, wurden zwei Materialpaare gefunden, die diesbezüglich sehr gut zusammen passen. Es handelt sich um Wolfram und Indium Antimonid sowie gelben Messing (65Cu,35Zn) und Stycast 2850GT. Aufgetragen ist die totale lineare Kontraktion (definiert als  $\frac{L_{293}-L_T}{L_{293}}$ ) gegen die Temperatur. Die rote Linie zeigt das Verhalten von Quarzglas. **(b)** Profilometer-Scans dreier verschiedener Treibmassen. Die Gräben waren vor dem Befüllen jeweils 1 mm tief. Die großen Kuhlen sind auf Schrumpfung während des Aushärtens zurückzuführen (oberer Kasten). Weiter wurde versucht, die Gräben zu überfüllen und abzuschleifen. Hier entstehen wiederum Einwölbungen, da das Epoxid schneller entfernt wird als das Treibmassematerial (mittlerer Kasten). Die letztendlich zur Messung verwendete Treibmasse wurde zusätzlich planarisiert (unterer Kasten). Die Oberfläche gibt keinen Hinweis mehr auf die periodische Struktur darunter [70]. . . . . 53
- 27 Abbildung möglicher künftiger Empfindlichkeiten verschiedener Gruppen, für die Suche nach anomalen Wechselwirkungen der Yukawa-Form (Gleichung 14). Die Kurven BEC 1 und 2 sind von Dimopoulos and Geraci [12]. Die Kurve Stanford ist von Weld et al. [70]. Die restlichen Vorrausberechnungen sind aus unpublizierten Arbeiten abgeleitet [48]. Der graue Bereich markiert bereits ausgeschlossenen Parameterraum. Es ist zu betonen, dass die Limits unterhalb 10  $\mu\text{m}$  bislang sehr schwach sind, was diesen Abstandsbereich besonders interessant für künftige Experimente macht. . . . . 54

28	Schematische Darstellung der von Decca et al. [11] verwendeten Apparatur zur Messung der Casimirkraft. Im Abstand $z$ über der goldbeschichteten Oszillatorplatte wird eine goldbeschichtete Saphirkugel ( $\varnothing 0,3$ mm) harmonisch in der Zeit auf und ab bewegt. Sie übt dadurch eine Kraft aus, deren Gradient $\partial F/\partial z$ zur effektiven Torsionskonstante des Oszillators beiträgt. Der Torsionsoszillator wird mittel kapazitiver Platten bei Resonanz betrieben ( $\sim 700$ Hz). Die Kraft $F(z)$ (Vergleich: Gleichung 65) wird aus der Variation der Resonanzfrequenz als Funktion von $z$ abgeleitet. Der Kugel-Platte-Abstand wurde variiert von 160-750 nm, wobei die Kräfte mit unterschiedlichen relativen Fehlern von 0,19 % bei 160 nm bis 9,0 % bei 750 nm gemessen wurden. Abbildung nach [48]. . . . .	55
29	Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme (koloriert) des Mikrotorsionsoszillators. Die goldbeschichtete Kugel ist an einer optischen Faser befestigt, so dass ihre Höhe in $z$ -Richtung detektierbar ist. Oben links ist ein AFM-Profil des Oszillators gezeigt. Abbildung nach [11]. . . . .	55
30	Vorgeschlagener experimenteller Aufbau von Dimopoulos und Geraci [12]. Das Casimir-Schild aus Gold dient zur Bildung einer Kavität zur Ausbildung einer stehenden Welle. Damit werden die BEC-Atome in den zwei der periodischen Quellmassanordnung am nächsten liegenden Potentialmulden gefangen. Die BEC-Cluster wären gefangen in einem Abstand $\lambda/2$ voneinander in der stehenden Welle, die durch die Reflexion eines $\lambda=840$ nm-Lasers am Casimir-Schild erzeugt würde. Die einzelnen Cluster würden geladen mit einer wohldefinierten relativen Phase, deren Entwicklung mit der Zeit die unterschiedlichen Potentiale, in denen die Cluster sitzen, widerspiegelt [48]. Abbildung nach [12]. . . . .	56

- 31 Beschränkungen unterhalb  $1 \mu\text{m}$  basierend auf Casimir-, Neutronen- und antiprotonischen Atom-Experimenten. Die Linien 1 und 2 basieren auf den Berechnungen von Mostepanenko et al. [43], die auf den Arbeiten [25] und [11] beruhen. Linie 3 basiert auf dem Experiment von Lamoreaux [36]. Die Quellen für die Linie a (Neutronenstreuung), antiprotonic atoms (antiprotonische Atomübergangsfrequenzen) und die Fläche Baryon # (in diesem Bereich könnte sich ein Baryon-Eichteilchen manifestieren) sind [48] zu entnehmen. Abbildung nach [48]. . . . . 57
- 32 Kugel-Platte-Konfiguration: Gezeigt ist eine massive Kugel mit Radius  $R_1$  und Dichte  $\rho_1$  im Abstand  $a$  über einer Platte der Dicke  $D_2$ , dem Radius  $R_2$  und der Dichte  $\rho_2$ . Der Abstand zwischen Kugelmittelpunkt und halber Plattendicke in  $z$ -Richtung wird mit  $a'$  bezeichnet. Die Oberflächenabstandsfunktion  $z(x, y)$  spielt nur für die Betrachtung der Casimir-Wechselwirkung eine Rolle. Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet. . . . . 59
- 33 Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitationskraft (Gleichung 46 und 65) in doppelt logarithmischer Auftragung für eine Goldkugel und eine Goldplatte mit Radius  $100 \mu\text{m}$ . Die Gravitationskraft wird für die gezeigten Einstellungen bei einem Abstand von  $10\text{-}100 \mu\text{m}$  dominant und liegt dort im Bereich  $10^{-17} - 10^{-14}$  N. Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 59) bei verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe von Casimir- und Gravitationskraft auswirkt. . . . . 66

- 34 Kugel-Kugel-Konfiguration: Gezeigt sind zwei massive Kugeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  und den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , im Abstand  $a$  zueinander. Der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten ist  $a'$ . Die Oberflächenabstandsfunktion  $z(x, y)$  wird zur Berechnung der Casimirwechselwirkung benötigt. Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet. . . . . 67
- 35 Der Abstand vom Mittelpunkt der ersten Kugel ( $R_1$ ) zu einem beliebigen Punkt  $P$  innerhalb der zweiten Kugel ( $R_2$ ) ist mit  $z_1$  bezeichnet. Dabei ist in Zylinderkoordinaten  $z_1 = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ . Die Kraft in  $z$ -Richtung ist damit  $F_z = F_{z_1} \cos\Theta = F_{z_1} \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$ . Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet. . . . . 70
- 36 Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitationskraft (Gleichung 66 und 79) in doppelt logarithmischer Auftragung gegen den kleinsten Oberflächenabstand für zwei gleichgroße Kugeln (Radien sind in der Legende angegeben). Der Knick im Kraftverlauf zeigt jeweils die Dominanz der Gravitationskraft an und liegt bei den gezeigten Fällen im 10 - 100 fN-Bereich. Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 75) bei verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe aus Casimir- und Gravitationskraft auswirkt. Bei einem Kugelradius von  $10 \mu m$  liegt der Betrag, bei dem die Gravitationskraft dominant wird, unterhalb 1 aN. . . . . 74
- 37 Platte-Platte-Konfiguration: Gezeigt sind zwei Platten mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$ , den Dicken  $D_1$  und  $D_2$  und den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Der Abstand der Oberflächen in  $z$ -Richtung ist durch  $a$  gegeben. Der Koordinatenursprung ist mit 0 bezeichnet. . . . . 75



38	Beispielhafter Kraftverlauf der Summe aus Casimir- und Gravitationskraft (Gleichung 80 und 87) in doppelt logarithmischer Auftragung für zwei Goldplatten der Fläche $1000\mu m \times 1000\mu m$ (restliche Werte sind in der Legende angegeben). Beim Übergang in den nahezu konstanten Wert der Gesamtkraft wird jeweils die Gravitationskraft dominant und liegt bei den gezeigten Fällen im 10 - 100 fN-Bereich. Die gestrichelten Linien zeigen die Summe aus Gravitationskraft und möglicher Yukawa-Wechselwirkung (Gleichung 82) bei verschiedenen Werten für $\alpha$ und $\lambda$ . Die blaue durchgezogene Linie zeigt, wie sich ein Yukawa-Term auf die Summe von Casimir- und Gravitationskraft auswirkt. . . . .	78
39	Kraft-Abstands-Kurven der unterschiedlichen Konfigurationen im Vergleich. Gezeigt sind die Platte-Platte-Konfiguration (Gleichungen 80, 87, 82, blau), die Kugel-Platte-Konfiguration (Gleichungen 46, 65, 59, grün) und die Kugel-Kugel-Konfiguration (66, 79, 75, rot). . . . .	80
40	Schematisch lässt sich ein SAM durch drei Teile beschreiben: Die Kopfgruppe, die ans Substrat bindet (head group), der Zwischenteil (spacer) und die Endgruppe (tail group) [49]. . .	82
41	Auswirkung von Elektronenbestrahlung auf die Struktur von SAMs. Aliphatische SAMs werden durch die Bestrahlung zerstört (a), wogegen aromatische SAMs quervernetzt werden (b). Abbildung nach [49]. . . . .	83
42	Elektronenmikroskopische (REM) Aufnahmen freistehender Nanoblätter, die durch Ätzen der 30 nm starken $SiN_x$ -Schicht unterhalb des quervernetzten SAMs erzeugt wurden. a) zeigt die Fenster auf dem vorstrukturierten Substrat. b) zeigt ein intaktes Nanoblatt. c) zeigt ein gerissenes Nanoblatt. d) Schema des Herstellungsprozesses. Abbildung nach [14] . . . . .	84

43	Schematische Darstellung der Präparation von Multilagen freistehender Nanoblätter aus 1,1'-Biphenyl-4-thiol (BPT). Die Nanoblätter werden mittels einer Schicht aus Polymethylmethacrylat (PMMA) aufeinander geschichtet und nach HF-Ätzung des Siliziumnitrit-Substrates und anschließender Spülung mit einer solchen auf ein Fenster transferiert. Abbildung nach [72]	85
44	Schematische Darstellung der Druckzelle für den Bulge-Test zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls des Nanoblattes. Die Membran ist auf einem Silizium-Wafer aufgebracht und schließt eine Druckzelle ab. Der Druck wird über ein Stickstoffventil reguliert und über einen differentiellen Drucksensor gemessen. Die Auslenkung beziehungsweise Krümmung der Membran wird mittels Rasterkraftmikroskop (AFM) gemessen. Abbildung nach [72]. . . . .	86
45	Heliumionenmikroskopische Aufnahmen von Mikrokontakten zur Ermittlung der piezoresistiven Eigenschaften von Nanoblättern. Im rechten Bild ist ein gerissenes Nanoblatt zu sehen, ein Problem, das bislang noch beim Trocknungsprozess auftritt und daher bislang verlässliche Messungen verhindert. Abbildung nach [73]. . . . .	87
46	Die gelbe Fläche symbolisiert ein Nanoblatt, das auf einem Rahmen befestigt ist. Daran hängt eine Testmasse (grau). Unterhalb dieser ist eine Quellmasse abgebildet, bestehend aus zwei Materialien unterschiedlicher Dichte, wie sie beispielsweise für dynamische Messungen verwendet werden könnte (Pfeil in Bewegungsrichtung). Zur Detektion der Auslenkung könnten piezoresistive Eigenschaften eines Nanoblattes (durch Kontakte symbolisiert) oder aber optische Methoden (symbolisiert durch optische Faser) verwendet werden. . . . .	88
47	Schematische Darstellung eines Kohlenstoff-Nanoblattes, in das mittels FIB ein spiralförmiges Muster geschnitten wurde, um eine Spiralfeder zu erzeugen. . . . .	89

- 48 Ein Band aus einem Nanoblatt ließe sich möglicherweise als “Draht” für ein Mikrotorsionspendel verwenden. Der orange-farbene Bereich stellt hier ein verdilltes Nanoblatt-Band dar. Die violette Platte symbolisiert eine rotierbare Testmasse. . . 89

- [1] E. Adelberger, B. Heckel, S. Hoedl, Hoyle C., Kapner D., and Upadhye A. Particle-physics implications of a recent test of the gravitational inverse-square law. *Physical Review Letters*, 98(13), 2007.
- [2] E. Adelberger, B. Heckel, and A. Nelson. Tests of the gravitational inverse-square law. *Annual review of nuclear and particle science*, 53:77–121, 2003.
- [3] D. Anderson. Abel-plana formula: <http://mathworld.wolfram.com/abel-planaformula.html> zuletzt geprüft am 20.09.2011, 2011.
- [4] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, (429):263–272, 1998.
- [5] J.W Beams. Mechanical properties of thin films of gold and silver in: Structure and properties of thin films (neugebauer, c.a.). *John Wiley and Sons, New York*, page 183, 1959.
- [6] Michael Bordag. *Advances in the Casimir effect*. Oxford University Press, Oxford and , New York, 2009.
- [7] H. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 51(793), 1948.
- [8] H. Casimir and D. Polder. The influence of retardation on the london-vanderwaals forces. *Physical review*, 73(4):360–372, 1948.
- [9] J. Chiaverini, S. Smullin, A. Geraci, D. Weld, and A. Kapitulnik. New experimental constraints on non-newtonian forces below 100 microns. *Physical Review Letters*, 90(15):151101–(1–4), 2003.
- [10] R. Decca, E. Fischbach, G. Klimchitskaya, D. Krause, D. López, and V. Mostepanenko. Application of the proximity force approximation to gravitational and yukawa-type forces. *Physical Review D*, 79(12), 2009.

- [11] R.S Decca, D. López, E. Fischbach, G.L Klimchitskaya, D.E Krause, and V.M Mostepanenko. Precise comparison of theory and new experiment for the casimir force leads to stronger constraints on thermal quantum effects and long-range interactions. *Annals of Physics*, 318(1):37–80, 2005.
- [12] Savas Dimopoulos and Andrew Geraci. Probing submicron forces by interferometry of bose-einstein condensed atoms. *Physical Review D*, 68(12), 2003.
- [13] E. Dzyaloshinskii, E.M Lifshitz, and L.P Pitaevskii. The general theory of vanderwaals forces. *Advances in physics*, 10(38):165–209, 1961.
- [14] W. Eck, A. Kuller, M. Grunze, B. Volkel, and A. Golzhauser. Freestanding nanosheets from crosslinked biphenyl self-assembled monolayers. *Advanced Materials*, 17(21):2583+, 2005.
- [15] W. Eck, V. Stadler, W. Geyer, M. Zharnikov, A. Golzhauser, and M. Grunze. Generation of surface amino groups on aromatic self-assembled monolayers by low energy electron beams - a first step towards chemical lithography. *Advanced Materials*, 12(11):805–808, 2000.
- [16] A. Einstein. The basics of general relativity theory. *Annalen der Physik*, 49(7):769–822, 1916.
- [17] Ephraim Fischbach and Carrick L. Talmadge. *The search for non-Newtonian gravity*. Springer, New York, 1999.
- [18] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Physical Review Letters*, 32(8):438–441, 1974.
- [19] Andrew Geraci, Sylvia Smullin, David Weld, John Chiaverini, and Aharon Kapitulnik. Improved constraints on non-newtonian forces at 10 microns. *Physical Review D*, 78(2), 2008.
- [20] W. Geyer. *Strukturierung selbstaggregierender Monolagen mit Elektronen*. PhD thesis, Universität Heidelberg, Heidelberg, 2001.

- [21] W. Geyer, V. Stadler, W. Eck, M. Zharnikov, A. Golzhauser, and M. Grunze. Electron-induced crosslinking of aromatic self-assembled monolayers: Negative resists for nanolithography. *Applied Physics Letters*, 75(16):2401–2403, 1999.
- [22] A. Golzhauser, W. Eck, W. Geyer, V. Stadler, T. Weimann, P. Hinze, and M. Grunze. Chemical nanolithography with electron beams. *Advanced Materials*, 13(11):806+, 2001.
- [23] A. Golzhauser, W. Geyer, V. Stadler, W. Eck, M. Grunze, K. Edinger, T. Weimann, and P. Hinze. Nanoscale patterning of self-assembled monolayers with electrons. *Journal of vacuum science & technology B*, 18(6):3414–3418, 2000.
- [24] G. Hammond, Speake C., A. Matthews, E. Rocco, and F. Pena Arellano. Development of a second generation torsion balance based on a spherical superconducting suspension. *Review of scientific instruments*, 79(2), 2008.
- [25] B. W. Harris, F. Chen, and U. Mohideen. Precision measurement of the casimir force using gold surfaces. *Physical Review A*, 62(5), 2000.
- [26] C. D. Hoyle, D. J. Kapner, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt, and H. E. Swanson. Submillimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Physical Review D*, 70(4), 2004.
- [27] C. D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner, and H. E. Swanson. Submillimeter test of the gravitational inverse-square law: A search for “large” extra dimensions. *Physical Review Letters*, 86(8):1418–1421, 2001.
- [28] Jacob N. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Elsevier Acad. Press, Amsterdam, 5 edition, 1995.
- [29] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, Hoboken, NY, 3. ed., [nachdr.] edition, 2009.

- [30] G. Kaltenpoth, B. Volke, C.T Nottbohm, A. Golzhauser, and M. Buck. Electrode modification by electron-induced patterning of self-assembled monolayers. *Journal of vacuum science & technology. B, Microelectronics and nanometer structures processing, measurement and phenomena*, 20(6):2734–2738, 2002.
- [31] T. Kaluza. The unity problem of physics. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*, (Part 2), 1921.
- [32] D. Kapner, T. Cook, E. Adelberger, J. Gundlach, B. Heckel, and C. Hoyle. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Physical Review Letters*, 98(2), 2007.
- [33] O. Klein. The quantum theory and five-dimensional relativity theory. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.
- [34] G. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. Mostepanenko. The casimir force between real materials: Experiment and theory. *Reviews of modern physics*, 81(4):1827–1885, 2009.
- [35] S. Lamoreaux. The casimir force: background, experiments, and applications. *Reports on progress in physics*, 68:201–236, 2005.
- [36] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range. *Physical Review Letters*, 78(1):5–8, 1997.
- [37] Youngbin Lee, Sukang Bae, Houk Jang, Sukjae Jang, Shou-En Zhu, Sung Hyun Sim, Young Il Song, Byung Hee Hong, and Jong-Hyun Ahn. Wafer-scale synthesis and transfer of graphene films. *Nano Letters*, 10(2):490–493, 2010.
- [38] E.M Lifschitz. *Sov. Phys. JETP*2, 29(2):73, 1956.
- [39] D. Long. Why do we believe newtonian gravitation at laboratory dimensions. *Physical review. D. Particles and fields*, 9(4):850–852, 1974.

- [40] Joshua C. Long, Hilton W. Chan, Allison B. Churnside, Eric A. Gulbis, Michael C. M. Varney, and Price John C. Upper limits to submillimetre-range forces from extra space-time dimensions. *Nature*, (421):922–925, 2003.
- [41] J. Love, L. Estroff, J. Kriebel, R. Nuzzo, and G. Whitesides. Self-assembled monolayers of thiolates on metals as a form of nanotechnology. *Chemical reviews*, 105(4):1103–1169, 2005.
- [42] M. Moody and H. Paik. Gauss law test of gravity at short-range. *Physical Review Letters*, 70(9):1195–1198, 1993.
- [43] V. M. Mostepanenko, R. S. Decca, E. Fischbach, G. L. Klimchitskaya, D. E. Krause, and D. Lopez. Stronger constraints on non-newtonian gravity from the casimir effect. *Journal of physics A*, 41(16), 2008.
- [44] H. U. Muller, M. Zharnikov, B. Volkel, A. Schertel, P. Harder, and M. Grunze. Low-energy electron-induced damage in hexadecanethiolate monolayers. *Journal of physical chemistry B*, 102(41):7949–7959, 1998.
- [45] J. N. Munday, Federico Capasso, and V. Adrian Parsegian. Measured long-range repulsive casimir–lifshitz forces. *Nature*, 457(7226):170–173, 2009.
- [46] K. Nakamura and et al. (particle data group): Neutrinomass, mixing, and oscillations. *JPG*, (37):075021, 2010.
- [47] K. Nakamura and et al. (particle data group). *JP G*, (37):075021, (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.
- [48] R. D. Newman, E. C. Berg, and P. E. Boynton. Tests of the gravitational inverse square law at short ranges. *Space Science Reviews*, 148(1-4):175–190, 2009.
- [49] C. Nottbohm. Carbon nanosheets and their applications. *Dissertation. Universität Bielefeld, Fakultät für Physik*, 2009.



- [50] R. Nuzzo and D. Allara. Adsorption of bifunctional organic disulfides on gold surfaces. *Journal of the American Chemical Society*, 105(13):4481–4483, 1983.
- [51] Olympus. Biolever, b lever: [http://probe.olympus-global.com/en/product/bl\\_rc150vb\\_hw/](http://probe.olympus-global.com/en/product/bl_rc150vb_hw/) zuletzt geprüft am: 20.09.2011, 2011.
- [52] Edward D. Palik. *Handbook of optical constants of solids*. Academic Press, Boston, 1985.
- [53] J. Polchinski. Dirichlet branes and ramond-ramond charges. *Physical Review Letters*, 75(26):4724–4727, 1995.
- [54] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690–4693, 1999.
- [55] L. Randall and R. Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370–3373, 1999.
- [56] Lisa Randall and Hartmut Schickert. *Verborgene Universen: Eine Reise in den extradimensionalen Raum*. Fischer Taschenbuch Verl, Frankfurt am Main, ungekürzte ausg. edition, 2008.
- [57] J. Rogers. Casimir effect enhancement (cee) program: [http://www.darpa.mil/our\\_work/mto/programs/casimir\\_effect\\_enhancement\\_%28cee%29.aspx](http://www.darpa.mil/our_work/mto/programs/casimir_effect_enhancement_%28cee%29.aspx) zuletzt geprüft am: 18.06.2011, 2011.
- [58] J. Sagiv. Organized monolayers by adsorption .1. formation and structure of oleophobic mixed monolayers on solid-surfaces. *Journal of the American Chemical Society*, 102(1):92–98, 1980.
- [59] F. Schreiber. Structure and growth of self-assembling monolayers. *Progress in Surface Science*, 65(5-8):151–256, 2000.
- [60] Dominik Schwarz. mündlich in besprechung, 27.06.2011.

- [61] S. Smullin, A. Geraci, D. Weld, J. Chiaverini, S. Holmes, and Kapitulin A. Constraints on yukawa-type deviations from newtonian gravity at 20 microns. *Physical review. D. Particles, fields, gravitation, and cosmology*, 72(12), 2005.
- [62] J. A.M. Sondaghuethorst and L. G.J. Fokkink. Galvanic copper deposition on thiol-modified gold electrodes. *Langmuir*, 11(12):4823–4831, 1995.
- [63] J. A.M. Sondaghuethorst, H. R.J. Vanhelleputte, and L. G.J. Fokkink. Generation of electrochemically deposited metal patterns by means of electron-beam (nano)lithography of self-assembled monolayer resists. *Applied Physics Letters*, 64(3):285–287, 1994.
- [64] R. Spero, J. Hoskins, R. Newman, J. Pellam, and J. Schultz. Test of the gravitational inverse-square law at laboratory distances. *Physical Review Letters*, 44(25):1645–1648, 1980.
- [65] Y. Tai, A. Shaporenko, W. Eck, M. Grunze, and M. Zharnikov. Depth distribution of irradiation-induced cross-linking in aromatic self-assembled monolayers. *Langmuir*, 20(17):7166–7170, 2004.
- [66] L. Tu, S. Guan, J. Luo, C. Shao, and L. Liu. Null test of newtonian inverse-square law at submillimeter range with a dual-modulation torsion pendulum. *Physical Review Letters*, 98(20), 2007.
- [67] A. Ulman. Formation and structure of self-assembled monolayers. *Chemical reviews*, 96(4):1533–1554, 1996.
- [68] A. Ulman, J. Kang, Y. Shnidman, S. Liao, R. Jordan, and G. Choi. Self-assembled monolayers of rigid thiols. *Journal of biotechnology*, 74(3):175–88, 2000.
- [69] B. Völkel, G. Kaltenpoth, M. Handrea, M. Sahre, C. T. Nottbohm, A. Kuller, A. Paul, W. Kautek, W. Eck, and A. Golzhauser. Electrodeposition of copper and cobalt nanostructures using self-assembled monolayer templates. *Surface Science*, 597(1-3):32–41, 2005.

- [70] David Weld, Jing Xia, Blas Cabrera, and Aharon Kapitulnik. New apparatus for detecting micron-scale deviations from newtonian gravity. *Physical Review D*, 77(6), 2008.
- [71] C. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Space science reviews*, 148(1-4):3–13, 2009.
- [72] Xianghui Zhang. Mechanical characterization of carbon nanosheets. *Dissertation. Universität Bielefeld, Fakultät für Physik*, 2010.
- [73] Xianghui Zhang and Armin Götzhäuser. Unveröffentlichte messergebnisse zur charakterisierung von nanoblättern, 2011.
- [74] R. Zhao, J. Zhou, Th Koschny, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis. Repulsive casimir force in chiral metamaterials. *Physical Review Letters*, 103(10), 2009.
- [75] M. Zharnikov, S. Frey, K. Heister, and M. Grunze. Modification of alkanethiolate monolayers by low energy electron irradiation: Dependence on the substrate material and on the length and isotopic composition of the alkyl chains. *Langmuir*, 16(6):2697–2705, 2000.
- [76] M. Zharnikov, W. Geyer, A. Götzhäuser, S. Frey, and M. Grunze. Modification of alkanethiolate monolayers on au-substrate by low energy electron irradiation: Alkyl chains and the s/au interface. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 1(13):3163–3171, 1999.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt zunächst meinen Betreuern Prof. Armin Gölhäuser und Prof. Dominik Schwarz, die in regelmäßigen Treffen für umfassende Diskussionen zur Verfügung standen. Mit nützlichen Ratschlägen und Kritik sowie zahlreichen Anregungen und Ideen haben sie diese Arbeit maßgeblich befruchtet. Die Treffen fanden stets in angenehmer Atmosphäre statt und waren für mich sehr lehrreich.

Besonders hervorzuheben ist auch, dass Dominik Schwarz mir bei den Berechnungen in Kapitel 5 eine wichtige Hilfe war. Ebenfalls besonders danken möchte ich Dr. Dominika Konikowska, die mir in mehreren Treffen eine große und geduldige Hilfe war bei den Berechnungen in und der Strukturierung von Kapitel 5 und 2 (insbesondere in Abschnitt 5.2.2).

Weiter gilt mein Dank Dr. Xianghui Zhang für die Einblicke in seine Arbeit und dafür, dass er mir Ergebnisse seiner Arbeit zur Verfügung gestellt hat. Er stand zudem stets sehr hilfsbereit für Fragen zur Verfügung.

Vielen Dank an Nils Mellech, der maßgeblich dazu beigetragen hat, dass das letzte Jahr so viel Spaß gemacht hat und jederzeit ein offenes Ohr für mich hatte und mir mit Rat und Tat zur Seite stand. Vielen Dank an Ursula Lorentzen für die nette Hilfe in verschiedenen Dingen. Dank auch an Dr. Berthold Völkel für die Hilfe bei EDV-Problemen.

Ferner möchte ich der ganzen Arbeitsgruppe *Physik supramolekularer Systeme und Oberflächen* danken für die nette Atmosphäre und Hilfsbereitschaft.

Meinem Vater gebührt Dank für das Korrekturlesen meiner Arbeit. Nils Flaschel möchte ich für den freundschaftlichen Wettkampf danken, der mich im ganzen Masterstudium zusätzlich motiviert hat.

## Anhang

### Abel-Plana Formel

Die Abel-Plana-Formel liefert gemäß [3] einen Ausdruck für die Differenz zwischen einer diskreten Summe und dem korrespondierenden Integral. Die Formel lässt sich aus dem Argumentprinzip ableiten

$$\oint_y f(z) \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \sum_n f(\mu_n) - \sum_m f(\nu_m),$$

wobei  $\mu_n$  die Nullstellen von  $g(z)$  und  $\nu_m$  die Polstellen innerhalb der Einhüllenden  $y$  sind. Eine geeignete Wahl von  $g$  und  $y$  liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [f(it) - f(-it)] [\cot(\pi it) + i] dt,$$

oder äquivalent

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Die Formel ist besonders nützlich bei Casimir-Effekt-Berechnungen, die Differenzen zwischen quantisierten Moden und freien Moden enthalten.

### Integralexponentialfunktion

Die Integralexponentialfunktion  $Ei(x)$  ist definiert als

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = C + \ln(x) + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot n} + \dots$$

( $-\infty < x < 0$ , für  $0 < x < \infty$  als Cauchyscher Hauptwert).

## Summe aus Gravitation Casimirkraft und Yukawa-artiger Wechselwirkung

Summe aus Gravitation Casimirkraft und Yukawa-artiger Wechselwirkung für die Kugel-Platte-Konfiguration:

$$F_{Ges}^{KP} = -\frac{8}{3}G\rho_1\rho_2\pi^2R_1^3D_2 \left[ 1 - \frac{(a + R_1 + \frac{D_2}{2})}{\sqrt{(a + R_1 + \frac{D_2}{2})^2 + R_2^2}} \right] - \frac{\pi^3\hbar c R_1}{360a^3} - 8\pi^2G\alpha\lambda^4\rho_1\rho_2 \left( 1 - e^{-\frac{D_2}{\lambda}} \right) e^{-\frac{(a+R_1)}{\lambda}} \left\{ \frac{R_1}{\lambda} \cosh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) \right\},$$

für die Kugel-Kugel-Konfiguration:

$$F_{Ges}^{KK} = -\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 R_1^3 R_2^3 \rho_1 \rho_2}{(a + R_1 + R_2)^2} - \frac{\pi^3 \hbar c}{360a^3} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} - 16\pi^2 G \rho_1 \rho_2 \alpha \lambda^6 \left( 1 + \frac{a'}{\lambda} \right) \frac{e^{-a'/\lambda}}{a'^2} \times \left( \frac{R_1}{\lambda} \cosh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{R_1}{\lambda}\right) \right) \times \left( \frac{R_2}{\lambda} \cosh\left(\frac{R_2}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{R_2}{\lambda}\right) \right),$$

und für die Platte-Platte-Konfiguration:

$$F_{Ges}^{PP} = -2\pi^2 G \rho_1 \rho_2 D_1 D_2 R_1^2 - \frac{\pi^3 \hbar c R_1}{240a^4} - 2\pi^2 G \alpha \lambda^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 e^{-a/\lambda} (1 - e^{-D_1/\lambda}) (1 - e^{-D_2/\lambda}).$$