Kurvenintegrale von Vektorfeldern; Existenz eines Potentials für ein Vektorfeld

1. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standard-SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $X : V \to V$ mit $X(x, y) = \left(x^2 y, xy^2\right)$. Siehe Fig. 1.

   (a) Ist X wirbelfrei? Hat X ein Potential?

   (b) Zeigen Sie für das Integral von X längs der Kurve $\gamma : [0, 1] \to V$ mit $\gamma(t) = \left(1 - t, t^2\right)$

   $$\int_\gamma X := \int_0^1 \langle (X \circ \gamma)(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \frac{1}{70}.$$

   Skizzieren Sie die Bahn von γ, also die Punktmenge $\gamma([0, 1]) = \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}$.

   (c) Zeigen Sie für das Integral von X längs der Kurve $\mu : [0, 1] \to V$ mit $\mu(t) = (1 - t, t)$

   $$\int_\mu X := \int_0^1 \langle (X \circ \mu)(t), \dot{\mu}(t) \rangle \, dt = 0.$$

   Skizzieren Sie die Bahn von μ.

2. Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V mit zugehöriger Norm $r := |\cdot|$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Das Vektorfeld $X : V \setminus 0 \to V$ erfülle $X(p) = f\left(|p|^2\right) p$. Hat X ein Potential? *Hinweis:* Suchen Sie ein Potential für X unter den Skalarfeldern des Typs $\phi = G \circ r^2$.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Standardnorm $|\cdot| = r$. Die Standardkoordinatenfunktionen werden mit x und y bezeichnet. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.

   (a) Ist das auf ganz V definierte Vektorfeld $L = (-y, x)$ wirbelfrei?

   (b) Berechnen Sie das Wegintegral von L längs des Randes eines Quadrats der Seitenlänge s, das den Nullpunkt als Mittelpunkt hat. *Lösung:* $\pm 2s^2$.

   (c) Für welche Funktionen f ist das Vektorfeld $X : V \setminus 0 \to V$ mit $X = \left(f \circ r^2\right) \cdot L$ wirbelfrei? *Lösung:* Für $f(x) = C/x$ mit $C \in \mathbb{R}$.

   (d) Berechnen Sie das Wegintegral von $X : V \setminus 0 \to V$ mit $X = \frac{1}{r^2} L$ längs des Weges von Teilaufgabe b). *Lösung:* $\pm 2\pi$. Ist X wirbelfrei? Hat X ein Potential?

4. Berechnen Sie das Wegintegral I von $X : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $X = \frac{1}{r} L$ längs des Weges von Teilaufgabe 3b). Ist X wirbelfrei? Hat X ein Potential? *Lösung:* $I = \pm 4s \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

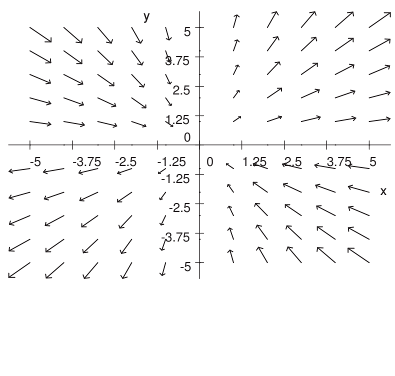

Figure 1: Das Vektorfeld $\left(x^2 y, xy^2\right)$

5. *Freiwillig:* Wird das Quadrat in Beispiel **3b)** verschoben, ändert sich der Wert des dort berechneten Wegintegrals nicht. Warum ist das so? (*Hinweis:* Satz von Green aus Analysis 2 anwenden.)