Technische Universität Berlin **Sommersemester 2008**
Fakultät II, Institut für Mathematik Prof. Dr. Stefan Felsner
Sekretariat MA 6-1 Andrea Hoffkamp
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/`

12. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 11. Juli 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Dies ist der letzte reguläre Übungszettel dieses Semesters. Die Übungsscheinklausur findet statt am Freitag, den 18. Juli 2008 von 8-10 Uhr in Raum H105 im Hauptgebäude. Bitte erscheinen Sie rechtzeitig. Mitzubringen sind: Studentenausweis, Schreibutensilien und leere DinA4-Blätter. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Alle weiteren Informationen zu Nachklausur und Modulprüfung entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungsseite im Internet! Beachten Sie auch unsere Änderung: Die Modulprüfungsklausur findet nun am Mi, den 8.10.08 von **8-10 Uhr** statt!

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonaler Abbildungen orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 2
Interpretieren Sie die folgende orthogonale Abbildung geometrisch, d.h. geben Sie ggf. Drehwinkel, Spiegelachsen an und bringen Sie die darstellende Matrix der Normalform:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3
Sei $F : K^n \to K^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.

Aufgabe 4
Seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen auf einem endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitären Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ selbstadjungiert ist genau dann, wenn $F \circ G = G \circ F$.

Aufgabe 5
Von einer symmetrischen reellen 3×3-Matrix A seien die Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ bekannt. Außerdem soll $\det A = \frac{1}{2}$ sein. Bestimmen Sie einen dritten von den beiden ersten linear unabhängigen Eigenvektor v_3 und den zugehörigen Eigenwert λ_3.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die orthogonale Abbildung $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie T geometrisch und geben Sie eine Orthonormalbasis an bzgl. derer die darstellende Matrix in Normalform ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V ein unitärer Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $F^2 = F$.
Zeigen Sie:

$$F \text{ ist selbstadjungiert} \iff \mathrm{Ker}(F) \perp \mathrm{Im}(F)$$

Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe: 4 Zusatzpunkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear und $f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ für ein $n \geq 1$ und $\det f < 0$. Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt gibt, für das f eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung ist.