6.3 Kompakte Operatoren auf Hilberträumen

Im Folgenden sei X ein Hilbertraum.

Definition 6.3.1. Sei $T \in L(X)$ und sei $\Phi : X \to X'$ der kanonische Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz (Satz 3.4.4).

(1) Dann heißt

$$T^* = \Phi^{-1} \circ T' \circ \Phi$$

der Hilbertraum-Adjungierte zu T. T^* ist charakterisiert durch

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

(2) T heißt unitär, falls $TT^* = T^*T = I$ (d.h. $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X$).

(3) T heißt selbstadjungiert (oder hermitisch), falls $T = T^*$ (d.h. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in X$).

(4) T heißt normal, falls $TT^* = T^*T$ (d.h. $\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle, \quad \forall x, y \in X$).

Offensichtlich sind selbstadjungierte und unitäre Operatoren normal.

Satz 6.3.2 (Eigenschaften)**.** Sei $T, T_1, T_2 \in L(X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

(1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(2) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(3) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

(4) $\|T^*\| = \|T'\| = \|T\|$, also insbesondere $T^* \in L(X)$.

(5) $(T^*)^* = T$.

(6) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

(7) $\mathcal{N}(T) = (\mathcal{R}(T^*))^\perp$ und $\mathcal{N}(T^*) = (\mathcal{R}(T))^\perp$. Insbesondere ist T genau dann injektiv, wenn $\mathcal{R}(T^*)$ dicht liegt.

(8) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (a) T ist unitär.

   (b) T ist surjektiv und isometrisch.

   (c) T ist surjektiv und T ist winkelerhaltend, d.h.

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

(9) Ist T normal, dann ist auch T^n normal für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Ausrechnen! □

Satz 6.3.3 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** Sei $T : X \to X$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

Dann ist T stetig und insbesondere selbstadjungiert.

Beweis. Nach dem Satz vom abgeschlossen Graphen müssen wir zeigen:

$$x_n \to 0, Tx_n \to z \quad \Longrightarrow \quad z = 0.$$

Es gilt

$$\langle z, z \rangle = \langle \lim Tx_n, z \rangle = \lim \langle Tx_n, z \rangle = \lim \langle x_n, Tz \rangle = 0.$$

□

Satz 6.3.4. Sei $T \in L(X)$.

(1) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt:

$$T \text{ ist selbstadjungiert.} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X.$$

(2) Ist T selbstadjungiert, so gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

(3) Ist T selbstadjungiert und gilt $\langle Tx, x \rangle = 0$ für alle $x \in X$, so ist $T = 0$.

Beweis. Übung! □

Lemma 6.3.5. Sei $T \in L(X)$.

(1) $\lambda \in \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

(2) Ist T selbstadjungiert und kompakt, so ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(3) Ist T normal und x ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist x auch Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(4) Ist T normal, so haben verschiedene Eigenwerte orthogonale Eigenvektoren.

(5) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und T normal, so existiert $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$.

(6) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T selbstadjungiert und kompakt, so ist $\|T\|$ oder $-\|T\|$ Eigenwert von T.

Beweis.
(1): Folgt aus Lemma 6.1.13, beachte dabei

$$((\lambda I - T)^{-1})^* = ((\lambda I - T)^*)^{-1} = (\overline{\lambda} I^* - T^*)^{-1}.$$

(2): Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Nach Satz 6.2.5 ist λ ein Eigenwert von T. Für $x \neq 0$ gilt

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

(3): Das folgt aus der Tatsache, dass $(\lambda I - T)$ auch normal ist (Ausrechnen!), und dass $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$.
(4): Seien $Tx = \lambda x$ und $Ty = \beta y$ mit $\lambda \neq \beta$. Dann folgt aus (3)

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\beta} y\rangle = \beta\langle x, y\rangle,$$

also is $\langle x, y\rangle = 0$.
(5): Für einen normalen Operator T gilt $r(T) = \|T\|$. Dann liefert Satz 6.1.6 die Behauptung.
(6): Folgt aus Satz 6.3.4(2) und der Kompaktheit von T. □

Satz 6.3.6 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren)**.** Sei $T \in K(X)$ normal (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. selbstadjungiert (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dann existieren ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem $e_1, e_2, ...$ sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathrm{lin}\{e_1, e_2, ...\}}$$

und

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \forall x \in X.$$

Die λ_n sind die von 0 verschiedenen Eigenwerte und die e_n sind die zugehörigen Eigenvektoren zu λ_n. Weiterhin gilt $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$.

Beweis. Entfällt. □