Probeklausur LinA II SS 11

@Richard

Aufgabe 1

Definiere folgende Begriffe:

(a) Symmetrische Bilinearform

(b) Adjungierte, selbstadjungierte und normale **Abbildung**.

(c) Norm

Aufgabe 2

Wie lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?

Aufgabe 3

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$ und sei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ für alle $v \in V$.

(a) Beweise die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(b) Gibt es Normen die diese Gleichung nicht erfüllen? Wenn ja: Gib ein Beispiel an. Wenn nein: Warum?.

Aufgabe 4

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Beweise:

(a) Eigenwerte von selbstadjungierten Endomorphismen sind immer reell.

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten selbstadjungierter Endomorphismen stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 5

Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Basis

$$\mathfrak{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Bekanntlich gibt es einen basisabängigen Isomorphismus $\Phi_{\mathfrak{B}} : V \to V^*$, der dadurch definiert ist, dass er jedem Basisvektor seinen dualen Basisvektor zuordnet. Sei $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestimme $\Phi_{\mathfrak{B}}(v)$.

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A = -A^*$. Zeige:

(a) A ist normal.

(b) Alle Eigenwerte von A haben Realteil 0.

Aufgabe 7

Zeige: Jede Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ist darstellbar als Produkt $A = US$ einer orthogonalen Matrix $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ und einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Aufgabe 8

(a) Bestimme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, so dass

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1+3i & 0 \\ \alpha & 2 & 1-2i \\ \beta & \gamma & 4 \end{bmatrix}$$

eine normale Matrix ist.

(b) Beweise oder widerlege: Sei A eine reelle quadratische Matrix. Dann gibt es normale Matrizen B und C, so dass $A = B + C$.

Aufgabe 9

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Betrachte die Polarzerlegung $A = QP$ von A.

(a) Welche Eigenschaften erfüllen Q und P?

(b) Wann sind P und Q eindeutig bestimmt?

Aufgabe 10

Beweise oder widerlege:

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für zwei Untervektorräume $U, W \subset V$ gilt $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
(Erinnerung: $U^\perp := \{\phi \in V^* \mid \phi(u) = 0 \, \forall u \in U\}$)

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Es gilt: β ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ Die Gram-Matrix von β ist für jede Basis von V symmetrisch.

(c) Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $F \in L(V, V)$. Es gilt: F ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis von V, so dass die darstellende Matrix von F symmetrisch ist.