**Technische Universität Berlin** **SS 2011**

**Fakultät II – Institut f. Mathematik**

Dozent: Prof. Dr. M. Scheutzow Ausgabe: Mi 04.05.2011

Assistent: M. Wilke Berenguer Abgabe: Mi 11.05.2011

# 4. Übungsblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie 1"

---

**Gesamtpunktzahl: 20 Punkte**

**1. Hausaufgabe:** geometrische Verteilung **3 Punkte**

Seien $X$,$Y$ und $Z$ unabhängige zum Parameter $1 > \lambda > 0$ geometrisch verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(i) $\mathbb{P}[X \geq 2Y]$

(ii) $\mathbb{P}[X \neq Y]$

(iii) $\mathbb{P}[X + Y \leq Z]$

**2. Hausaufgabe:** **4 Punkte**

Wir wählen zwei natürliche Zahlen $n$ und $k$ (mit $k \leq n$) sowie eine Folge $(r^{(N)} : N \in \mathbb{N})$, derart, dass

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$: $k \leq r^{(N)}$ und $n - k \leq N - r^{(N)} =: s^{(N)}$ und

(ii) $\lim_{N\to\infty} \frac{r^{(N)}}{N} =: p \in ]0, 1[$

gilt.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{r^{(N)}}{k}\binom{S^{(N)}}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Geben Sie außerdem eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation dieser Tatsache.

**3. Hausaufgabe:** Poisson Verteilung **6 Punkte**

Die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist eine diskrete Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ mit Einzelwahrscheinlichkeiten $\pi_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Seien $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poi}(\mu)$, sowie $X$ und $Y$ unabhängig.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

(i) Gilt dies auch, wenn man auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit von $X$ und $Y$ verzichtet? Beweisen Sie Ihre Aussage!

(ii) Bestimmen Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ die bedingte Verteilung $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$, $(\forall k \in \mathbb{N})$.

**4. Hausaufgabe:** Dichten **7 Punkte**

Seien $X$ und $Y$ unabhängige, identisch verteilte reelle Zufallsgrößen mit stetiger Dichte $f$. Man zeige, dass die Zufallsgrößen $Z := X \cdot Y$ und

$$W(\omega) := \begin{cases} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} & \text{falls } Y(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ebenfalls Dichten besitzten und berechne diese

(i) allgemein,

(ii) für die Gleichverteilung auf $[0, a]$, $a > 0$,

(iii) für eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.