Prof. Dr. Peter Bürgisser
Paul Breiding
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenzettel 6

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Galoiserweiterung mit $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{K})$. Seien $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ zwei Zwischenkörper mit $H := \mathrm{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{E})$ und $H' := \mathrm{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{E}')$. Zeige:

(1) $\mathbb{E} \cdot \mathbb{E}'$ ist der Fixkörper von $H \cap H'$.

(2) $\mathbb{E} \cap \mathbb{E}'$ ist der Fixkörper der von H und H' erzeugten Untergruppe von G.

Aufgabe 2 (14 Punkte). Wir betrachten die folgenden Matrizen über $\mathbb{F}_3$:

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad j := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad k := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

und definieren $Q := \{e, i, j, k, -e, -i, -j, -k\}$. Zeige:

(1) Q ist eine nicht kommutative Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

(2) Jede Untergruppe von Q ist ein Normalteiler in Q.

(3) Q ist nicht isomorph zur Diedergruppe $\mathfrak{D}_4$.

(4) Gebe eine Kompositionsreihe von Q an.

Aufgabe 3 (14 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Zeige:

(1) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\iota \colon G \to \mathfrak{S}_n$.

Hinweis: Es genügt, eine endliche Menge X mit $|X| = n$ zu bestimmen, welche mit einer treuen G-Wirkung versehen ist.

(2) Es gibt eine Galoiserweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ mit $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$.

Bemerkung: Wenn wir in (2) den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ vorschreiben wollen, so ist es eine offene Fragestellung, ob die Aussage gilt oder nicht (Inverses Problem der Galois-Theorie).

Aufgabe 4 (14 Punkte). Sei G die Galois-Gruppe von $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) Zeige, dass für $a = 0$ und b prim stets $G = \mathfrak{S}_3$ gilt.

(2) Finde $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $G = \mathfrak{A}_3$ gilt.

Hinweis: Man betrachte die Diskriminante von f.
