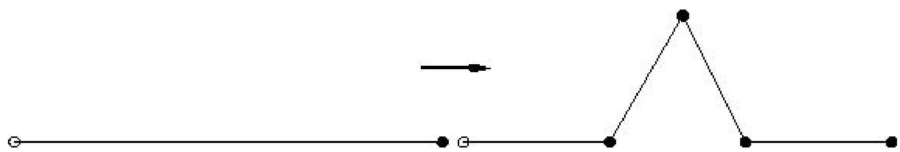
Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Christoph Zenger

Einführung in die Programmierung

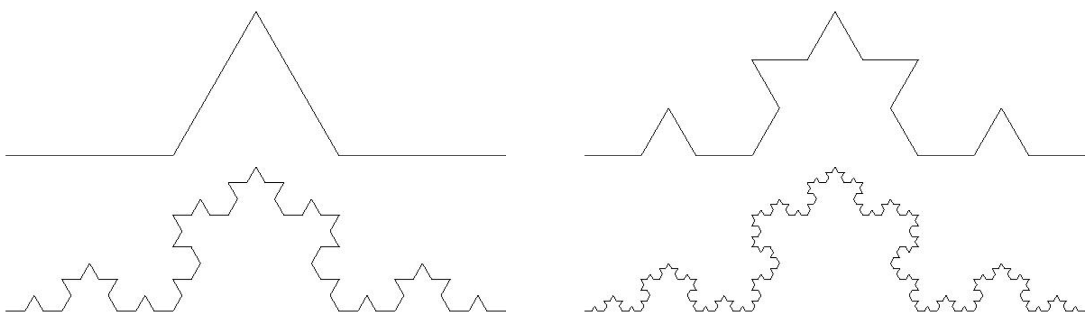
Aufgabe 7: Koch-Kurve

Die Koch-Kurve

In dieser Aufgabe zeichnen wir eine *Koch-Kurve*. Dazu beginnen wir mit einer beliebigen Strecke, und ersetzen diese zunächst durch vier Teilstrecken von je einem Drittel der Länge gemäß folgendem Muster:



Dies führen wir (rekursiv) fort, indem wir jedes Teilstück wieder durch vier Teilstrecken ersetzen. Schritt für Schritt entstehen folgende Kurven:



Die *Koch-Kurve* ist das *fraktale* Objekt, das im Grenzprozess unendlich vieler Iterationen entsteht. Im Weiteren wird jeder (Eck-)Punkt einer Approximation der Koch-Kurve dargestellt durch eine Liste mit zwei Elementen. Die Liste aller Eckpunkte übergeben wir dann `pointplot`.

Drehen von Punkten bzw. Strecken

Zu zwei Punkten $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ in der Ebene wird durch

$$(x_1, x_2) \to \begin{array}{c} (p_1 + x_1 \cdot (q_1 - p_1) - x_2 \cdot (q_2 - p_2), \\ p_2 + x_2 \cdot (q_1 - p_1) - x_1 \cdot (q_2 - p_2)) \end{array}$$

eine affine Abbildung der Ebene beschrieben, die die Strecke zwischen $(0, 0)$ und $(1, 0)$ auf die Strecke PQ abbildet. Schreiben Sie eine Funktion `drehe`, mit Paramtern `X, P` und `Q`, die das Bild von `X` als Ergebnis liefert.

Rekursives Bauen der Koch-Kurve

Wir bauen jetzt eine rekursive Funktion `kochkurve`, die eine Sequenz (erst einmal keine Liste, das ist bequemer) aller Punkte einer Kochkurve zwischen zwei gegebenen Punkten liefern soll. Als dritter Parameter wird die Zahl `t` der Verfeinerungsschritte benötigt.

Dies kann zum Beispiel so geschehen:

1. Die Punkte `[0,0]`, `[1/3,0]`, `[1/2,1/6*sqrt(3)]`, `[2/3,0]` und `[1,0]` sind die Eckpunkte der einfach verfeinerten Kochkurve auf dem Einheitsintervall.
2. Mit der Prozedur `drehe` erzeugen wir daraus die fünf Eckpunkte auf der Strecke `PQ`, am besten gleich als Sequenz mit Hilfe von `seq()`).
3. Falls `t=0` sind wir fertig und können diese Sequenz als Ergebnis zurückliefern.
4. Ansonsten rufen wir `kochkurve` rekursiv für die vier Teilstrecken zwischen den Eckpunkten auf (wobei `t` um 1 vermindert wird). Die Sequenzen von Punkten, die die vier Aufrufe zurückliefern, müssen wir nur noch aneinanderhängen. Recht elegant lassen sich beide Schritte in einem Aufruf von `seq()` vereinigen.

Eine Koch-Schneeflocke erhält man, wenn man drei Koch-Kurven auf einem gleichseitigen Dreieck aufsetzt: