6. Iterationsverfahren

Fixpunktiteration

Beispiel: Ausbreitung eines Grippevirus in einem Kindergarten

Zeitpunkt	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Anteil kranker Kinder	0.1	0.18	0.30	0.42	0.49	0.5

t_i	diskrete Folge von Zeitpunkten
k_i	Anteil an kranken Kindern zum Zeitpunkt t_i
α	Infektionsrate

Annahmen

- Bei jedem Kontakt zweier Kinder Virusübertragung möglich
- k_{i+1} direkt proportional zu Begegnungen zwischen einem kranken ($= k_i$) und einem gesunden ($= 1 - k_i$) Kind
- Kranke Kinder werden nach einem Zeitschritt wieder gesund

$$\Rightarrow \boxed{\text{Model} : k_{i+1} = \alpha \cdot k_i \cdot (1 - k_i)}$$

Was ist ein Iterationsverfahren

Iterationsverfahren

Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$
for $k = 0, 1 \dots$ **do**
  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$
end for

mit der Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Das Iterationsverfahren erzeugt eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \Phi(x_0) \\
x_2 &= \Phi(x_1) \\
x_3 &= \Phi(x_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Was ist ein Iterationsverfahren

Anwendungen

- Nullstellensuche, z.B. Newtonverfahren: $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Lösen von großen linearen Gleichungssystemen, z.B. Richardson-Verfahren:

$$\Phi(x) = x + (b - Ax)$$

Was wollen wir über das Iterationsverfahren wissen?

- Gegen welchen Wert konvergiert es? $\rightarrow$ Fixpunkt
- Konvergiert das Verfahren überhaupt? $\rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz
- Wie schnell konvergiert das Verfahren? $\rightarrow$ Konvergenzordnung

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt $\overline{x}$. Dann ist $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ. Also:

$$\left[\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}\right] \Rightarrow \left[\Phi(\overline{x}) = \overline{x}\right]$$

Beweis:

$$\Phi(\overline{x}) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \overline{x}$$

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt $\overline{x}$. Dann ist $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ. Also:

$$\left[\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}\right] \Rightarrow \left[\Phi(\overline{x}) = \overline{x}\right]$$

Beweis:

$$\Phi(\overline{x}) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \overline{x}$$

Wie finde ich Fixpunkte?

rechnerisch $\Phi(x)$ mit x gleichsetzen, nach x auflösen

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunktiteration

Sei Φ *stetig* und konvergiere die Folge x_k eines Iterationsverfahrens gegen einen Punkt $\overline{x}$. Dann ist $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ. Also:

$$\left[\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}\right] \Rightarrow \left[\Phi(\overline{x}) = \overline{x}\right]$$

Beweis:

$$\Phi(\overline{x}) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \overline{x}$$

Wie finde ich Fixpunkte?

rechnerisch $\Phi(x)$ mit x gleichsetzen, nach x auflösen

graphisch Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte rechnerisch bestimmen

Kindergarten Model $k_{i+1} = \alpha \cdot k_i \cdot (1 - k_i) \Rightarrow \boxed{\Phi(x) = \alpha x(1-x)}$

Fixpunkte

$$\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$$

$$\Rightarrow \alpha\overline{x}(1-\overline{x}) = \overline{x} \quad \rightarrow \boxed{\overline{x}_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \alpha(1-\overline{x}) = 1 \quad \rightarrow \boxed{\overline{x}_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}}$$

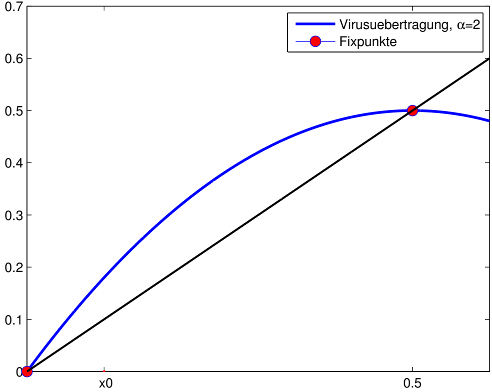
Beispiel mit $\alpha = 2$ gilt $\overline{x}_2 = 0.5$

Zeitpunkt	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
Anteil kranker Kinder	0.1	0.18	0.30	0.42	0.49

Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

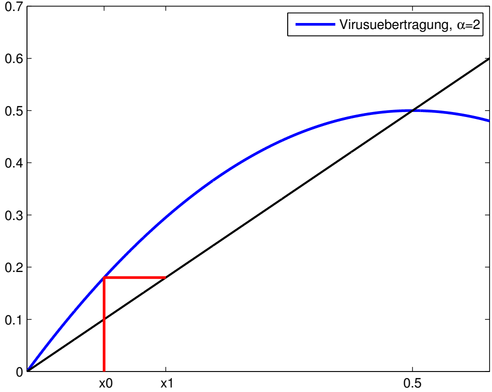
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

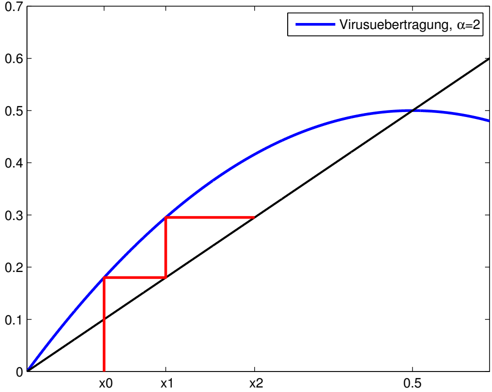
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

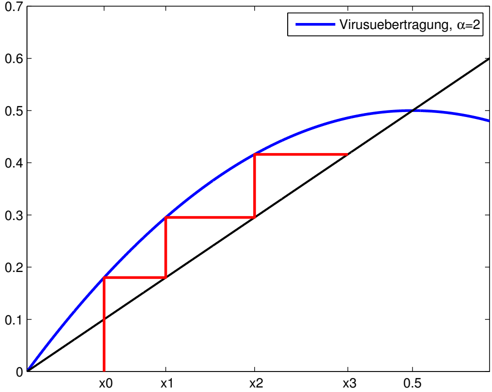
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

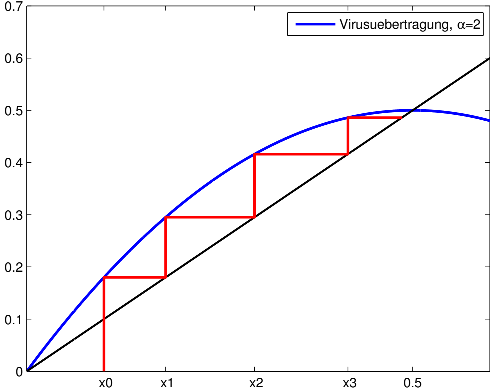
Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

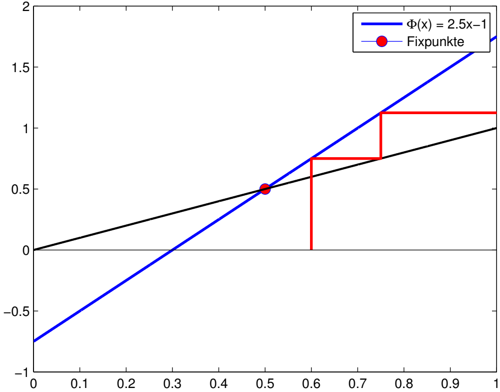
Fixpunkte und Iteration graphisch bestimmen

Die Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $\Phi(x)$ mit der Funktion $f(x) \equiv x$



Gegen was konvergiert das Iterationsverfahren?

Divergentes Verhalten



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- Φ sei eine Kontraktion, d.h.
  - $\Phi(I) \subseteq I$
  - $\exists$ Lipschitz-Konstante $L \in [0, 1)$ mit

$$\forall x, y \in I : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} \in I$.

Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (1)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die vom Iterationsverfahren erzeugte Folge.

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in I: \; |x-y| &\leq |x-\Phi(x)| + |\Phi(x)-\Phi(y)| + |\Phi(y)-y| && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\leq |x-\Phi(x)| + L\cdot|x-y| + |\Phi(y)-y| && \text{(Kontraktion)}\\
\Rightarrow |x-y| &\leq \frac{|x-\Phi(x)| + |\Phi(y)-y|}{1-L}
\end{aligned}$$

Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (1)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die vom Iterationsverfahren erzeugte Folge.

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in I: \ |x-y| &\leq |x-\Phi(x)| + |\Phi(x)-\Phi(y)| + |\Phi(y)-y| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&\leq |x-\Phi(x)| + L\cdot|x-y| + |\Phi(y)-y| && \text{(Kontraktion)} \\
\Rightarrow |x-y| &\leq \frac{|x-\Phi(x)| + |\Phi(y)-y|}{1-L}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Abstand zweier Iterierter x_k und x_m:

$$\begin{aligned}
|x_k - x_m| &\leq \frac{|x_k - x_{k+1}| + |x_{m+1} - x_m|}{1-L} \\
&\leq \frac{L^k|x_0 - x_1| + L^m|x_1 - x_0|}{1-L} \\
&= \frac{L^k + L^m}{1-L}|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (2)

$$|x_k - x_m| \leq \frac{L^k + L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

Damit lässt sich der Abstand zwischen zwei Iterierten für genügend große Indizes beliebig verkleinern.

$\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (2)

$$|x_k - x_m| \leq \frac{L^k + L^m}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Damit lässt sich der Abstand zwischen zwei Iterierten für genügend große Indizes beliebig verkleinern.

$\Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in I

- In $\mathbb{R}$ konvergieren Cauchy-Folgen $\rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert
- I ist abgeschlossen $\rightarrow$ der Grenzwert $\overline{x} := \lim_{k\to\infty} x_k$ liegt auch in I.

Banach'scher Fixpunktsatz: Beweis (3)

Der Grenzwert $\overline{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein eindeutiger Fixpunkt

- eine Kontraktion ist stetig $\rightarrow$ $\overline{x}$ ist ein Fixpunkt von Φ (siehe Folie 5)
- Sei $y \neq \overline{x}$ ein weiterer Fixpunkt in I. Dann gilt

$$|\overline{x} - y| = |\Phi(\overline{x}) - \Phi(y)| \leq L|\overline{x} - y| < |\overline{x} - y|.$$

Das ist ein Widerspruch $\rightarrow$ $\overline{x}$ ist eindeutig

Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz, vereinfacht

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- $\Phi(I) \subseteq I$
- Sei Φ in I differenzierbar.
- Gelte $\forall x \in I : |\Phi'(x)| < 1 \quad (L := \max_{x \in I} |\Phi'(x)|)$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} \in I$.

Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Banach'scher Fixpunktsatz, vereinfacht

- I sei ein abgeschlossenes Intervall
- $\Phi(I) \subseteq I$
- Sei Φ in I differenzierbar.
- Gelte $\forall x \in I : |\Phi'(x)| < 1 \quad (L := \max_{x \in I} |\Phi'(x)|)$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren für ein $x_0 \in I$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} \in I$.

Beweis

Mittelwertsatz:

$$\forall x, y \in I \; \exists z \in [x, y] : \quad \Phi'(z) = \frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{x - y}$$

Daraus folgt:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \max_{z \in I} |\Phi'(z)| \cdot |x - y| = L|x - y|$$

Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Folgerung aus Banach'schem Fixpunktsatz

Sei $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ.

- $|\Phi'(\overline{x})| < 1 \Rightarrow \overline{x}$ anziehend
  (d.h. es gibt eine abgeschlossene Umgebung I um $\overline{x}$, worin der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist)
- $|\Phi'(\overline{x})| > 1 \Rightarrow \overline{x}$ abstoßend
- $|\Phi'(\overline{x})| = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Folgerung aus Banach'schem Fixpunktsatz

Sei $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ.

- $|\Phi'(\overline{x})| < 1 \Rightarrow \overline{x}$ anziehend
  (d.h. es gibt eine abgeschlossene Umgebung I um $\overline{x}$, worin der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist)
- $|\Phi'(\overline{x})| > 1 \Rightarrow \overline{x}$ abstoßend
- $|\Phi'(\overline{x})| = 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Beweis:

- Wähle $h > 0$ genügend klein, damit gilt: $L := \max\limits_{z \in I} |\Phi'(z)| < 1$ mit
  $I := [\overline{x} - h, \overline{x} + h]$
- Sei $x \in I \Rightarrow |\Phi(x) - \overline{x}| = |\Phi(x) - \Phi(\overline{x})| \leq L|x - \overline{x}| < h$
  $\Rightarrow \Phi(x) \in I \Rightarrow \Phi(I) \subseteq I$
- Damit ist der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar

Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: anziehender Fixpunkt

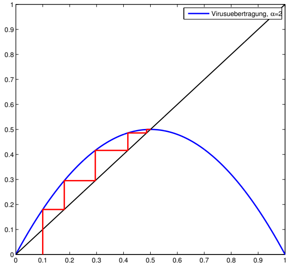
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1 - x)$

mit Fixpunkt $\overline{x} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\overline{x}) = \alpha - 2\alpha\overline{x} = 2 - \alpha$

$\overline{x}$ ist *anziehend* für $1 < \alpha < 3$

monotone Konvergenz für $\alpha = 1.9$:
(da $\Phi'(\overline{x}) > 0$)



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: anziehender Fixpunkt

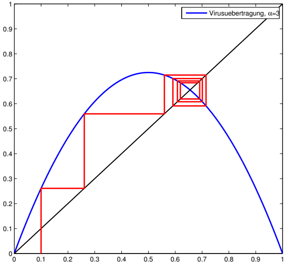
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1-x)$

mit Fixpunkt $\overline{x} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\overline{x}) = \alpha - 2\alpha\overline{x} = 2 - \alpha$

$\overline{x}$ ist *anziehend* für $1 < \alpha < 3$

alternierende Konvergenz für $\alpha = 2.9$:
(da $\Phi'(\overline{x}) < 0$)



Konvergiert das Verfahren überhaupt?

Beispiel: abstoßender Fixpunkt

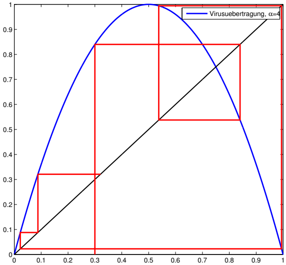
Beispiel Grippevirus: $\Phi(x) = \alpha x(1-x)$

mit Fixpunkt $\overline{x} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$

für die Ableitung gilt: $\Phi'(\overline{x}) = \alpha - 2\alpha\overline{x} = 2 - \alpha$

$\overline{x}$ ist *abstoßend* für $\alpha < 1$ und $\alpha > 3$

Divergenz für $\alpha = 4$:



Wie schnell konvergiert das Verfahren?

Konvergenzordnung

Ein Verfahren konvergiert

- linear $:\Leftrightarrow |x_{k+1} - \overline{x}| \leq L \cdot |x_k - \overline{x}|$ mit $L < 1$
- von Ordnung $p > 1 :\Leftrightarrow |x_{k+1} - \overline{x}| \leq L \cdot |x_k - \overline{x}|^p$

Beispiel: Abstand der Lösung in jedem Schritt

quadratisch (p=2)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}

Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz konvergiert das Iterationsverfahren linear

Mit den Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes gilt:

$$|x_{k+1} - \overline{x}| = |\Phi(x_k) - \Phi(\overline{x})| \leq L \cdot |x_k - \overline{x}|$$

und damit lineare Konvergenz.