

6. Iterationsverfahren

Nullstellenbestimmung

Problemstellung

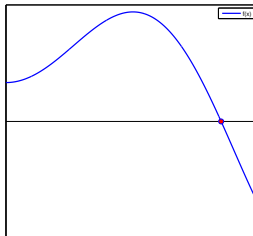
Problemstellung

Gesucht Nullstelle \bar{x} einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$

Problem Analytische Berechnung oft nicht möglich (Ausnahme z.B. Mitternachtsformel)

Mögliche Verfahren

- Newton-Verfahren
- Sekanten-Verfahren
- Bisektion
- Regula falsi



Newton-Verfahren

Newton-Iteration

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Herleitung über Taylorentwicklung

Mit der Taylorentwicklung gilt:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \underbrace{O((\bar{x} - x_k)^2)}_{\text{wird ignoriert}}$$

$$\Rightarrow 0 \approx f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k)$$

$$\Rightarrow \bar{x} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Newton-Verfahren

Geometrische Interpretation

Lege Tangente an $f(x)$ durch $f(x_k) \rightarrow x_{k+1} \hat{=}$ Schnitt mit x-Achse.

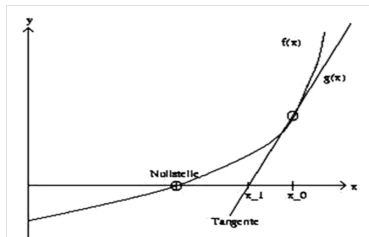
- Geradengleichung der Tangente:

$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

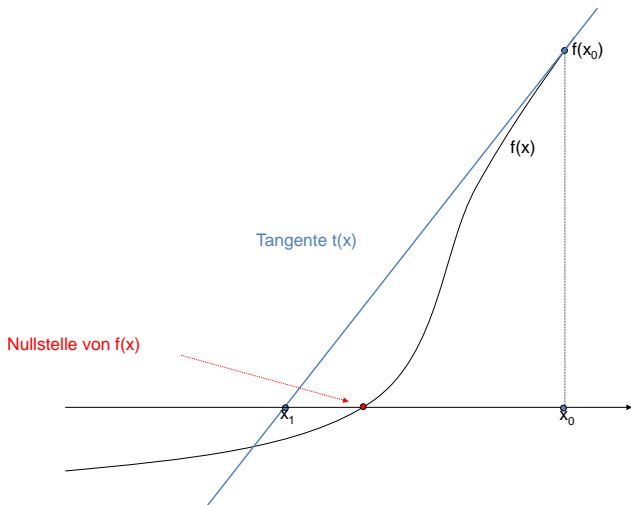
- Schnittpunkt mit x-Achse:

$$g(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \stackrel{!}{=} 0$$

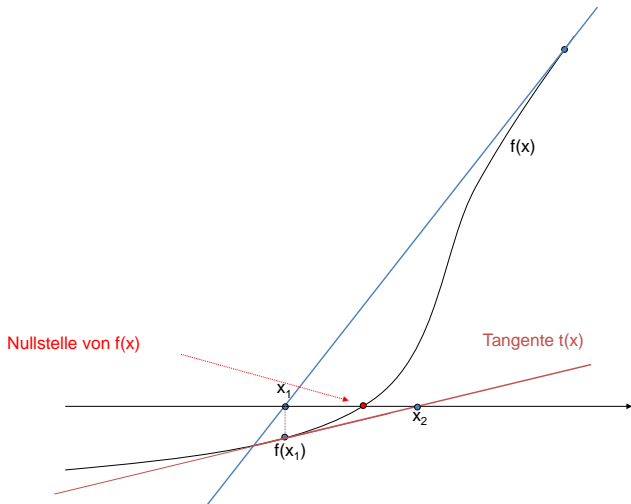
$$\Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



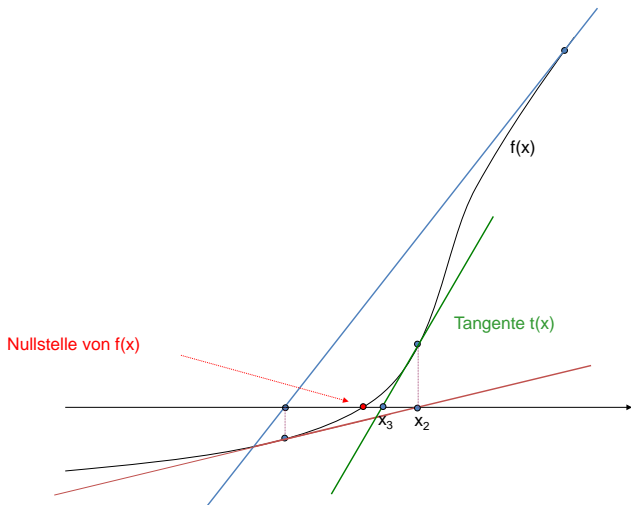
Newton-Verfahren



Newton-Verfahren



Newton-Verfahren



Newton-Verfahren

Newton-Verfahren als Fixpunktiteration

Die Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens lautet

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Damit gilt:

- \bar{x} ist *Nullstelle* von $f \Leftrightarrow \bar{x}$ ist *Fixpunkt* von Φ (falls $f'(\bar{x}) \neq 0$)

$$x = \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

- \bar{x} ist ein *anziehender* Fixpunkt (falls $f'(\bar{x}) \neq 0$)

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$|\Phi'(\bar{x})| = 0 < 1$$



Newton-Verfahren

Ist \bar{x} eine einfache Nullstelle, konvergiert das Newtonverfahren lokal quadratisch

- Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt lokal lineare Konvergenz.
- Mit der Taylorentwicklung folgt mit einer Zwischenstelle z :

$$\begin{aligned}
 0 &= f(\bar{x}) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{1}{2}f''(z)(\bar{x} - x_k)^2 \\
 \Rightarrow \bar{x} - (x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}) &= -\frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x_k)} (\bar{x} - x_k)^2 \\
 \Rightarrow |\bar{x} - x_{k+1}| &= \left| \frac{f''(z)}{2f'(x_k)} \right| \cdot |\bar{x} - x_k|^2
 \end{aligned}$$

Da $f'(\bar{x}) \neq 0$ gilt, lässt sich $\left| \frac{f''(z)}{2f'(x_k)} \right|$ lokal nach oben durch ein L beschränken.

$$\Rightarrow \boxed{|\bar{x} - x_{k+1}| \leq L \cdot |\bar{x} - x_k|^2}$$



Newton-Verfahren

Ist \bar{x} eine m -fache Nullstelle ($m > 1$),
 konvergiert das Newtonverfahren nur lokal linear

Sei \bar{x} eine m -fache Nullstelle, d.h. $f(x) = (x - \bar{x})^m g(x)$ mit $g(\bar{x}) \neq 0$. Damit lautet die Iterationsfunktion:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x - \bar{x})^m g(x)}{m(x - \bar{x})^{m-1} g(x) + (x - \bar{x})^m g'(x)} \\ &= x - \frac{(x - \bar{x})g(x)}{mg(x) + (x - \bar{x})g'(x)}\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ableitung:

$$\begin{aligned}|\Phi'(\bar{x})| &= \left| 1 - \frac{g(\bar{x})}{mg(\bar{x})} \right| = 1 - \frac{1}{m} < 1 \\ &\Rightarrow \text{Lokale lineare Konvergenz}\end{aligned}$$

Newton-Verfahren

Vorgehen bei m -facher Nullstelle

Wende das Newton-Verfahren an auf

- $(m - 1)$ -te Ableitung von f
- $\frac{f(x)}{f'(x)}$
- m -te Wurzel von $|f(x)|$

oder modifiziere die Newton-Formel zu

$$\Phi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{dann gilt wieder } \Phi'(\bar{x}) = 0)$$

Newton-Verfahren

Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n

Gesucht Nullstelle \bar{x} einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h.

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Newtonschrift $x_{k+1} = x_k - J^{-1} f(x_k)$ mit der Jacobi-Matrix J



Sekanten-Verfahren

Iterationsfunktion

$$x_{k+1} := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Geometrische Herleitung

Lege Gerade durch $f(x_{k-1})$ und $f(x_k) \rightarrow x_{k+1} \hat{=}$ Schnitt mit x-Achse.

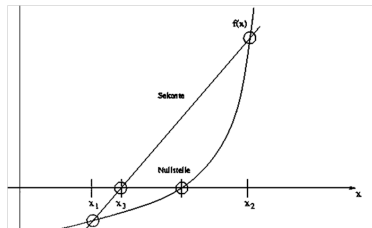
- Geradengleichung der Sekante:

$$g(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})$$

- Schnittpunkt mit x-Achse:

$$g(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



Sekanten-Verfahren

Iterationsfunktion

$$x_{k+1} := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Vergleich mit Newton-Verfahren

- Vorteile**
- keine Ableitung nötig
 - billiger (nur $f(x_k)$ ist pro Schritt neu zu berechnen)
- Nachteile**
- Probleme wenn Nenner ≈ 0
 - Konvergenzordnung nur $1 < p < 2$



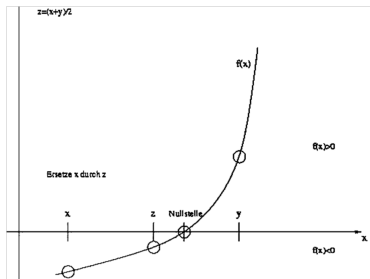
Bisektion

Ausgangspunkt

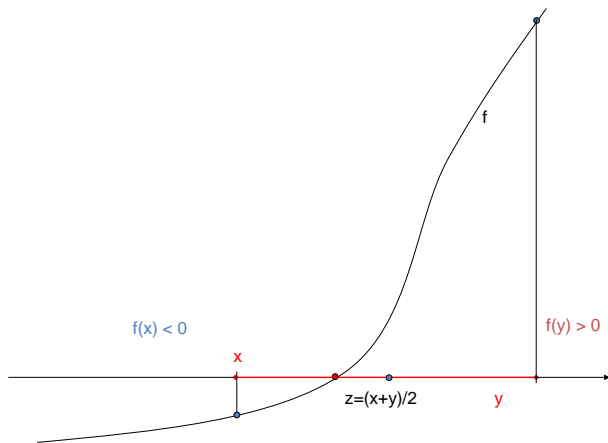
- Starte mit Intervall $[x, y]$, wobei gilt: $f(x)$ und $f(y)$ haben verschiedene Vorzeichen.
- Damit liegt für ein stetiges f eine Nullstelle in $[x, y]$

Iterationsschritt

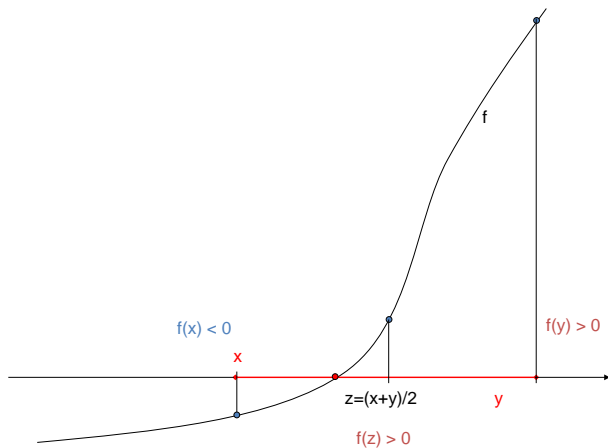
- Sei $z = \frac{x+y}{2}$ die Mitte des Intervalls. Berechne $f(z)$.
 - Gilt $f(z) = 0 \rightarrow$ fertig
 - Ist $f(x) \cdot f(z) > 0 \rightarrow x := z$
 - Ist $f(y) \cdot f(z) > 0 \rightarrow y := z$
- Im neuen Intervall $[x, y]$ liegt immer noch eine Nullstelle.
- Intervall wird in jeder Iteration halbiert \rightarrow lineare Konvergenz



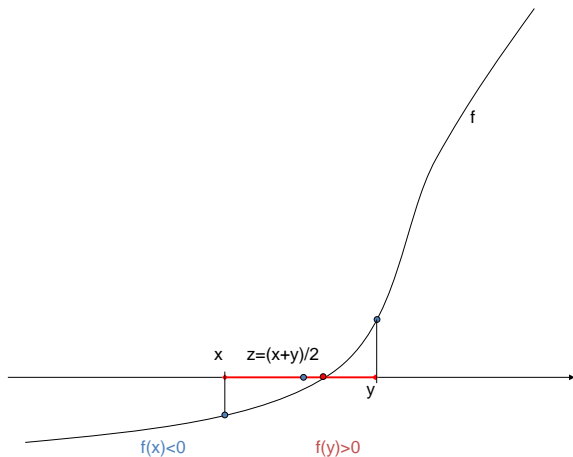
Bisektion



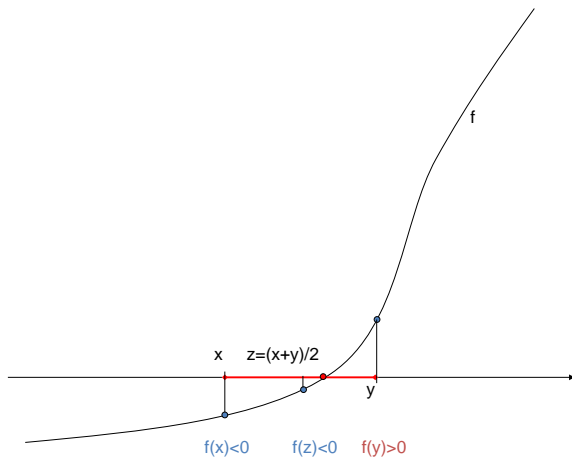
Bisektion



Bisektion



Bisektion



Bisektion

