Funktionalanalysis
12. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
24./25. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G50 (Reelle und komplexe lineare Funktionale)
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für die *reell-linearen* Funktionale $f : V \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $x \in V$ ist $f(x) = g(x) - i\,g(i\,x)$.

(ii) Die Abbildung f ist $\mathbb{C}$-linear und $g = \Re f$.

Aufgabe G51 (Eigenschaften der Adjungierten eines Operators)
Seien E, F und G normierte Räume und $S, T \in \mathscr{L}(E, F)$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die Adjungierte $T' : F' \to E'$ von T ist stetig und $\left\|T'\right\|_{\mathrm{Op}} = \|T\|_{\mathrm{Op}}$.
Hinweis: Betrachten Sie $x \in E$, $\varphi \in F'$ mit $\|x\| = 1 = \left\|\varphi\right\|$ und $\varphi(Tx) = \|Tx\| = \|T\|_{\mathrm{Op}} - \varepsilon$.

(b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'$. (Vgl. Hilbertraum-Adjungierte!)

(c) Für die Einschränkung $T''|_E$ von $T'' : E'' \to F''$ auf E gilt $T''|_E = T$.

(d) Für $R \in \mathscr{L}(F, G)$ ist $(R \circ S)' = S' \circ R'$.

Aufgabe G52 (Adjungierte eines Funktionals)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ normiert. Interpretieren Sie $f \in E'$ als lineare Abbildung in $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Berechnen Sie die Adjungierte in $\mathscr{L}(\mathbb{K}, E')$.

Aufgabe G53 (Inklusionen der L^p-Räume für endliche Maße)
Sei (Ω, μ) ein *endlicher* Maßraum und $1 \le q \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^q(\Omega, \mu)$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $\left\{|f| \le 1\right\} \subseteq \Omega$ und $\left\{|f| > 1\right\} := \left\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > 1\right\} \subseteq \Omega$.

Aufgabe G54 (Fortsetzungen linearer Operatoren auf L^p für endliche Maße)
Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $2 \le p < \infty$ und q konjugiert zu p (d.h. $q \le p$). Sei $T : L^p(\Omega, \mu) \to L^p(\Omega, \mu)$ ein stetiger Operator und $T' : \left(L^p(\Omega, \mu)\right)' = L^q(\Omega, \mu) \to L^q(\Omega, \mu)$ dessen Adjungierte. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $L^p(\Omega, \mu)$ ist invariant unter T', d.h. $T'\left(L^p(\Omega, \mu)\right) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$.

(ii) Es existiert ein stetiger Operator $\tilde{T} : L^q(\Omega, \mu) \to L^q(\Omega, \mu)$ mit $\tilde{T}|_{L^p(\Omega,\mu)} = T$, d.h. T lässt sich auf $L^q(\Omega, \mu)$ fortsetzen.

Hinweis: Betrachten Sie die Adjungierte von $T'|_{L^p(\Omega,\mu)}$ und von $\tilde{T}$.

Hausübung

Aufgabe H32 (Nicht immer gibt es stetige lineare Funktionale) (1 Punkt)

Sei $0 < p < 1$ und sei wie üblich $\mathscr{L}^p([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < \infty\}$ und $L^p([0,1])$ der Quotient von $\mathscr{L}^p([0,1])$ nach den Funktionen, die λ-fast überall verschwinden. λ bezeichne das Lebesgue-Maß. Dann ist $L^p([0,1])$ immer noch ein Vektorraum, wie man leicht sieht. Zeigen Sie:

(a) Sei $d(f,g) := \int_0^1 |f-g|^p \, d\lambda$ für $f,g \in L^p([0,1])$, dann definiert d eine Metrik auf $L^p([0,1])$.

(b) Sei $C \subseteq L^p([0,1])$ eine offene konvexe Nullumgebung, dann ist $C = L^p([0,1])$.
Hinweis: Wählen Sie $\varepsilon > 0$, sodass $\{f \in L^p([0,1]) : d(f,0) < \varepsilon\} \subseteq C$ und zeigen Sie: Jedes $f \in L^p([0,1])$ liegt in der konvexen Hülle von $\{f \in L^p([0,1]) : d(f,0) < \varepsilon\}$. Zerlegen Sie dazu geeignet $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ und schreiben Sie f als Konvexkombination $f = \sum_i \frac{1}{n}(n \cdot \chi_{I_i} \cdot f)$.

(c) Das einzige stetige lineare Funktional auf $(L^p([0,1]), d)$ ist das Nullfunktional.

Aufgabe H33 (Banachlimiten) (1 Punkt)

Sei $S : \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N}) \to \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ der Linksshift auf den beschränkten reellwertigen Folgen, d.h. $S(x)(n) = x(n+1)$ für $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$. Ein lineares Funktional $\psi : \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit $\|\psi\| = 1$ heißt *Banachlimes*, falls ψ translationsinvariant und positiv ist, d.h. $\psi(x) = \psi(S(x))$ für alle $x \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ und $\psi(x) \geq 0$, falls $x \geq 0$ ist (d.h. $x(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass

- $\mathcal{M} := \overline{\left\{x - S(x) \,:\, x \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})\right\}}$ ein linearer Teilraum von $\ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ und
- $d(\mathbb{1}, \mathcal{M}) := \inf\left\{\|\mathbb{1} - y\| \,:\, y \in \mathcal{M}\right\} = 1$ ist und dass
- ein positives Funktional $\varphi : \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit $\|\varphi\| = 1$ existiert, das auf $\mathcal{M}$ verschwindet.

Folgern Sie daraus die Existenz eines Banachlimes.
Hinweis: Für $x \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ gilt wie bei reellen Zahlen: $0 \leq x \leq \mathbb{1} \iff \|\mathbb{1} - x\|_\infty \leq 1$.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Banachlimes $\psi : \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ und alle $x \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$ gilt:

$$\psi(\mathbb{1}) = \|\psi\| = 1 \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x(n) \leq \psi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x(n)$$

(für eine konvergente Folge $x \in c(\mathbb{N})$ ist also $\psi(x) = \lim_n x(n)$).
Hinweis: Betrachten Sie $S^N(x - \alpha\mathbb{1})$ und $S^N(\beta\mathbb{1} - x)$ für $\alpha < \liminf_n x(n)$, $\beta > \limsup_n x(n)$.

(c) Sei $\psi : \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes und $x = (a,b,a,b,\ldots) \in \ell^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{N})$. Bestimmen Sie $\psi(x)$.

Aufgabe H34 (Stetigkeit von Fortsetzungen linearer Funktionale) (1 Punkt)

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M} \subseteq \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Teilraum und $B_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ eine Hamel-Basis aus Einheitsvektoren. Weiter sei B eine Hamel-Basis von $\mathscr{H}$, die $B_\mathcal{M}$ und eine Folge von Einheitsvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H} \setminus \mathcal{M}$ enthält, so dass $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_0\rangle = 1$ ist für ein $y_0 \in B_\mathcal{M}$.

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für diese Situation an.

(b) Sei $f : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional und sei das Funktional $F : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ definiert durch $F(y) := f(y)$ für $y \in B_\mathcal{M}$ und $F(x) := 0$ für $x \in B \setminus B_\mathcal{M}$. Ist F eine stetige Fortsetzung von f? Begründen Sie Ihre Antwort.