Lineare Algebra II
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
28./29. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Man erhält

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & & \\ 0 & 4 & \\ 1 & 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von A.

(b) Berechnen Sie $(A-3E)^k$ und bestimmen Sie $\ker(A-3E)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) Berechnen Sie B^k und $\ker B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Rechnen.

Aufgabe G3
Die Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$ besitze nur die Eigenwerte 1 und -1. Geben Sie eine Jordansche Normalform von A an für den Fall, dass

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist.

(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische zwei ist.

(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 drei und die geometrische eins ist.

Lösung: Aus den Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich die folgenden Informationen über die Jordanblöcke ablesen:

- Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist gleich der Raumdimension.
- Die algebraische Vielfachheit ist die Summe der Größen der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.
- Die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.

Damit folgt:

(a) Eine Jordannormalform J von A besitzt zu jedem Eigenwert zwei Jordanblöcke der Größe eins, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und zwei Jordanblöcke zum Eigenwert -1 der Größe eins bzw. zwei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und einen Jordanblock zum Eigenwert -1 der Größe drei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4

Bestimmen Sie je eine Jordansche Normalform der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Berechnen Sie zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von B zunächst die Matrix B^3.

Lösung: Zuerst sind die Eigenwerte von A zu bestimmen. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\begin{aligned}
P_A(t) &= \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{4. Zeile}}}{=} (2-t)\det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-t & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-t)\left[(1-t)(3-t)((1-t)(3-t)+1) + ((1-t)(3-t)+1)\right] \\
&= (2-t)((1-t)(3-t)+1)^2 = (2-t)(t^2-4t+4)^2 = (2-t)(t-2)^4 \\
&= (2-t)^5
\end{aligned}$$

Folglich besitzt A nur einen Eigenwert und zwar $\lambda = 2$ (mit der algebraischen Vielfachheit fünf).

Die Matrix

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich Rang drei, d.h. die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist zwei. Die Jordansche Normalform besteht also aus zwei Jordanblöcken. D.h. es gibt (bis auf Vertauschen der Jordanblöcke) die zwei Möglichkeiten

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $(J_1 - 2E)^3 = 0$ und $(J_2 - 2E)^3 \neq 0$. Dasselbe gilt dann auch für alle ähnlichen Matrizen.

Wegen

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A - 2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kann A nicht ähnlich zu J_2 sein. D.h. eine Jordansche Normalform von A ist

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von B berechnet man zunächst

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Matrix B ist nilpotent, hat also nur den Eigenwert $\lambda = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 5).

Außerdem schließt man aus $B^3 = 0$ und $B^2 \neq 0$, dass der größte Jordanblock in der Jordannormalform von B die Größe drei hat.

Des Weiteren berechnet man den Rang von B, dieser ist drei. Also ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts Null gleich zwei und es gibt zwei Blöcke in der zugehörigen Jordanschen Normalform.

Zusammen heißt das

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordansche Normalform der Matrix B.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Seien $f_1, \dots, f_m \in K[t]$ Polynome. Zeigen Sie, dass dann

$$I := (f_1) + \dots + (f_m)$$

ein Ideal ist.

Lösung: Die Elemente aus I sind von der Form $r_1 f_1 + \dots + r_m f_m$ mit $r_i \in K[t]$.
Seien also $f = r_1 f_1 + \dots + r_m f_m, g = s_1 f_1 + \dots + s_m f_m \in I, \lambda, \mu \in K$ und $h \in K[t]$.
Dann gilt

$$\lambda f + \mu g = \underbrace{(\lambda r_1 + \mu s_1)}_{\in K[t]} f_1 + \dots + \underbrace{(\lambda r_m + \mu s_m)}_{\in K[t]} f_m \in I$$

und

$$hf = (\underbrace{hr_1}_{\in K[t]}) f_1 + \dots + (\underbrace{hr_m}_{\in K[t]}) f_m \in I.$$

Somit ist I ein Ideal.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und J ihre Jordansche Normalform. Außerdem sei λ ein Eigenwert von A.

(a) Zeigen Sie: Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von A ist gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ gleich $n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Da J die Jordansche Normalform von A ist, sind die beiden Matrizen ähnlich und J hat obere Dreiecksgestalt. Da das charakteristische Polynom ähnlicher Matrizen gleich ist, gilt das also auch für die algebraische Vielfachheit von λ. Da J eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von J gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind. Zusammen folgt die Aussage, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ von A gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von J, die gleich λ sind, ist.

(b) O.B.d.A. habe J die Blockgestalt

$$J = \begin{pmatrix} J_\lambda & 0 \\ 0 & \widetilde{J} \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonaleinträge von J_λ alle gleich λ und die von $\widetilde{J}$ alle ungleich λ sind.
Da J und A ähnlich sind, gilt das auch für $J - \lambda E$ und $A - \lambda E$. Da der Rang ähnlicher Matrizen gleich ist, folgt daraus

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \operatorname{rank}(J - \lambda E).$$

Die Matrix $J - \lambda E$ besteht aus zwei Blöcken. Der zweite Block $\widetilde{J} - \lambda E$ ist eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge alle ungleich Null sind. Sie hat also vollen Rang. Der erste Block $J_\lambda - \lambda E$ ist eine obere Dreiecksmatrix, die nur in der Nebendiagonalen einige Einträge hat. Ihr Rang ist also der volle Rang Minus die Anzahl der Nullspalten in $J_\lambda - \lambda E$. Jeder Jordanblock zum Eigenwert λ erzeugt in $J_\lambda - \lambda E$ genau eine Nullzeile. D.h. es gilt

$$\operatorname{rank}(A - \lambda E) = \operatorname{rank}(J - \lambda E) = n - \text{ Anzahl der Jordanblöcke in } J \text{ zum Eigenwert } \lambda.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(c) Die Matrix B hat Blockdiagonalgestalt, wobei der erste Block $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bereits Diagonalgestalt hat. D.h. man muss nur noch die Jordansche Normalform des zweiten Blocks berechnen. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2)\,.$$

D.h. die Eigenwerte sind 1 und 2. Wegen Aufgabenteil (a) besteht die Jordansche Normalform dieses Blockes also aus zwei Jordanblöcken der größe Eins zu den Eigenwerten Null bzw. Zwei.

Die Jordansche Normalform von B ist also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch direkt die Eigenwerte von B mit ihren algebraischen Vielfachheiten und den Rang von

$B - 2E$ ausrechnen und erhält mit Hilfe der Aufgabenteile (a) und (b) dieselbe Gestalt für die Jordansche Normalform von B.

Der Rang von C ist offensichtlich Eins, d.h. C hat einen zweidimensionalen Kern, welcher der Eigenraum zum Eigenwert Null ist. Außerdem ist offensichtlich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von C zum Eigenwert Drei. D.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von C. C ist also diagonalisierbar und die zugehörige Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Jordansche Normalform von C.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform und eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Eine Jordanbasis ist hier eine Basis des $\mathbb{R}^2$, bzgl. der die Matrix in Jordannormalform vorliegt.

(b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Das zur Matrix A gehörige charakteristische Polynom ist

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -4-t & 4 \\ -9 & 8-t \end{pmatrix} = (-4-t)(8-t) + 9 \cdot 4 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2\,.$$

D.h. der einzige Eigenwert von A ist $\lambda = 2$.

Offensichtlich ist der Rang von

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

gleich Eins, also ist die geometrische Vielfachheit von λ gleich Eins. D.h. die Jordansche Normalform von A ist

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert zwei ist offensichtlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Dies ist der erste Vektor der Jordanbasis. Der zweite Vektor v_2 dieser Basis muss die Gleichung $Av_2 = 2v_2 + v_1$ erfüllen. Dies gilt genau dann, wenn

$$(A - 2E)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Dies ist offensichtlich für

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

D.h. die gesuchte Jordanbasis ist

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) .$$

(b) Aus Aufgabenteil (a) folgt, dass für die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$S^{-1}AS = J .$$

Man errechnet leicht, dass

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt.

Damit ergibt sich

$$A^n = (SJS^{-1})^n = SJ^nS^{-1} .$$

Z.B. mit Hilfe einer einfachen Induktion erhält man

$$J^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^n &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-3n & 2+2n \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-6n & 4n \\ -9n & 2+6n \end{pmatrix} \; \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$