

**6. Übung Lineare Algebra II für M**  
– Lösungsvorschläge –

**Hausübungen**

(H10)

In dieser Aufgabe werden wir den polaren Körper eines 3-dimensionalen Würfels im 4-dimensionalen Raum ermitteln.

Gegeben Sei die Hyperebene  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$  im  $\mathbb{R}^4$ .

- a) Geben Sie die Ecken eines regulären 3-dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge 2 an, der in der Hyperebene liegt und den Mittelpunkt  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$  hat.

**Hinweis:** Betrachten Sie die 3 paarweise zueinander orthogonalen Vektoren zur Beschreibung der Kanten

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Jede quadratisch Seite des Würfels spannt einen konvexen, 3-dimensionalen Kegel auf. Die affine Hülle dieses Kegels ist ein 3-dimensionaler Vektorraum, der durch den äußeren Normalenvektor beschrieben werden kann. Geben sie die 6 äußeren Normalenvektoren zu den Würfelseiten an.

**Hinweis:** Der Normalenvektor muß auf den Ortsvektoren der Ecken senkrecht stehen.

- c) Betrachten Sie nun die Ursprungsgeraden mit den Normalenvektoren aus b) als Richtungsvektoren. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der Hyperebene  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ . Diese Schnittpunkte bilden die Ecken des zum Würfel polaren Körpers. Was für einen Körper bilden diese Punkte als konvexe Hülle?

- 
- a) Ausgehend vom Mittelpunkt  $p := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$  erhalten wir die Ecken des Würfels aus der Gleichung

$$p_i = p \pm \frac{v_1}{2} \pm \frac{v_2}{2} \pm \frac{v_3}{2},$$

indem wir alle  $2^3 = 8$  möglichen Vorzeichenkombinationen einsetzen. Wir erhalten so z.Bsp. die Ecke

$$p_1 = p - \frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2} - \frac{v_3}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gehen wir alle Vorzeichenkombinationen durch, so erhalten wir die Ecken

$$\begin{aligned} p_1 &= (2, 0, 0, 0)^t & p_2 &= (1, 1, 1, -1)^t \\ p_3 &= (0, 0, 2, 0)^t & p_4 &= (1, -1, 1, 1)^t \\ p_5 &= (1, 1, -1, 1)^t & p_6 &= (0, 2, 0, 0)^t \\ p_7 &= (-1, 1, 1, 1)^t & p_8 &= (0, 0, 0, 2)^t. \end{aligned}$$

b) So, wie die Punkte angegeben sind, bilden folgende Punkte eine Seitenfläche:

$$\begin{array}{ll} p_1 p_2 p_3 p_4 & p_1 p_2 p_5 p_6 \\ p_1 p_4 p_5 p_8 & p_2 p_3 p_6 p_7 \\ p_3 p_4 p_7 p_8 & p_5 p_6 p_7 p_8. \end{array}$$

Wir geben die Konstruktion der Normalen zur Würfelseite  $p_1 p_2 p_3 p_4$  an. Die Vektoren

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spannen einen Kegel auf. Wir suchen nun einen Normalenvektor  $n_{1234}$ , der auf allen 4 Vektoren senkrecht steht (dies geht, da die 4 Vektoren einen 3-dimensionalen Teilraum aufspannen). Aus den Skalarprodukten  $\langle p_i, n_{1234} \rangle = 0$  für  $i = 1, \dots, 4$  ergeben sich folgende Gleichungen:

$$2x_1 = 0 \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \tag{2}$$

$$2x_3 = 0 \tag{3}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{4}$$

Aus Gleichung (1) erhalten wir  $x_1 = 0$  und aus Gleichung (3) erhalten wir  $x_3 = 0$ . Einsetzen liefert den Normalenvektor

$$n_{1234} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Um nun zu entscheiden, welches der äußere Normalenvektor ist, bilden wir das Skalarprodukt mit einer Ecke, welche nicht in der Seitenfläche enthalten ist. Wir bestimmen also

$$\left\langle p_5, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 > 0,$$

d.h. diese Normale zeigt in den Würfel. Die äußere Normale ist somit

$$n_{1234} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man die Normalenvektoren

$$n_{1256} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n_{1458} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, n_{2367} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, n_{3478} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, n_{5678} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Der Schnittpunkt der Geraden mit dem Normalenvektor  $n_{1234}$  als Richtungsvektor ist der Punkt auf der Gerade  $\lambda(0, -1, 0, -1)^t$ , der als Summe der Koordinaten  $-2$  ergibt. In diesem Fall erhalten wir die Lösung für  $\lambda = 1$ . Genauso erhält man für die restlichen Schnittpunkte die Koordinaten

$$\begin{aligned} q_1 &= (0, -1, 0, -1)^t & q_2 &= (0, 0, -1, -1)^t \\ q_3 &= (0, -1, -1, 0)^t & q_4 &= (-1, 0, 0, -1)^t \\ q_5 &= (-1, -1, 0, 0)^t & q_6 &= (-1, 0, -1, 0)^t. \end{aligned}$$

Diese 6 Punkte bilden ein Oktaeder. Die folgende Skizze erläutert dies:

