

Regelungstechnik

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 23. September 2016, 9:33



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Inhaltsverzeichnis

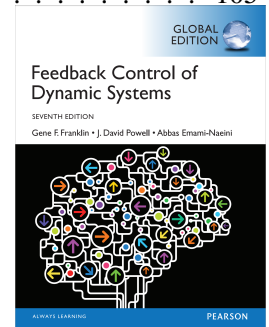
1	Einführung	5
1.1	Grundelemente in Regelsystemen	5
1.2	Steuerung vs Regelung am Beispiel Tempomat	6
1.2.1	Steuerung	6
1.2.2	Regelung	8
1.2.3	Grundsätze der Regelung	9
1.3	Zusammenfassung	9
2	Das dynamische Verhalten von Systemen	10
2.1	Einleitung	10
2.2	Systemantwort durch Faltung	10
2.3	Laplace-Transformation	12
2.4	Blockdiagramme als Modellierungswerkzeuge	15
3	Polstellenlage	16
3.1	Bedeutung der Polstellenlage in der s -Ebene	16
3.1.1	System 1. Ordnung (PT_1 -Glied)	16
3.1.2	System 2. Ordnung, PT_2 -Glied	17
3.1.3	Übersicht Impulsantworten abhängig von der Polstellenlage	20
3.2	Kenngrößen im Zeitbereich	20
4	Erste Analyse des Regelkreises	23
4.1	Die grundlegenden Regelungsgleichungen	23
4.1.1	Stabilität	24
4.1.2	Stationäres Verhalten	25
4.1.3	Festwertregelung	26
4.1.4	Folgeregelung	26
4.2	Der klassische PID-Regler	27
4.2.1	Proportionale Regelung (P-Regler)	27
4.2.2	Integrale Regelung (I-Regler)	28
4.2.3	Differenzierende Regelung (D-Regler)	30
4.2.4	Proportionale plus Integrale Regelung (PI-Regler)	31
4.2.5	PID-Regler	31
4.3	Stabilitätskriterium nach Routh / Hurwitz	32
5	Wurzelortskurve	35
5.1	Wurzelortskurve eines elementaren Regelungssystems	35
5.1.1	Beispiel: Wurzelortskurve für eine Motor-Positionsregelung bestimmen	37
5.1.2	Beispiel: Wurzelortskurve bezüglich eines Strecken-Pols	38
5.2	Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven	40

6	Bode-Diagramm	45
6.1	Frequenzgang	45
6.2	Vorzüge des Bode-Diagramms	46
6.3	Elementare Übertragungsglieder	47
6.3.1	PT ₁ -Glieder	47
6.3.2	PD ₁ -Glieder	49
6.3.3	PT ₂ -Glieder	49
6.3.4	Reine D- und I-Glieder	51
6.3.5	Totzeit-Glieder	51
6.4	Zusammenfassung der Bode-Diagramm-Regeln	52
6.5	Wichtige regelungstechnische Definitionen	54
6.5.1	Phasenminimumsystem und Allpass	54
6.5.2	Grenzstabilität	55
6.5.3	Betragsreserve und Phasenreserve	56
7	Zustandsraumdarstellung	59
7.1	Systembeschreibung im Zustandsraum	59
7.2	Blockdiagramme und Zustandsraum	60
7.3	Analyse der Zustandsgleichungen	62
7.3.1	Übertragungsfunktion	62
7.3.2	Regelungsnormform	65
7.3.3	Beobachtungsnormform	68
7.3.4	Modal- oder Jordanform	70
7.3.5	Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit	74
8	Regelung im Zustandsraum	76
8.1	Einen Regler bestimmen	76
8.1.1	Beispiel: Ungedämpfter Oszillator	76
8.1.2	Rückführmatrix für Systeme in Regelungsnormform	77
8.1.3	Einfluss von Nullstellen auf den Regler	78
8.2	Referenzsystem	80
8.2.1	Beispiel: Ungedämpfter Oszillator	82
8.3	Symmetrische Wurzelortskurve (SWOK)	84
8.3.1	Beispiel: SWOK für ein System 1. Ordnung	85
8.3.2	Beispiel: SWOK für Lageregelung eines Satelliten	86
9	Beobachter	88
9.1	Beispiel: Ungedämpfter Oszillator	89
9.2	Beobachter für Systeme in Beobachtungsnormform	90
9.3	Dualität	91
9.4	Beobachterentwurf	91
9.4.1	Beispiel: SWOK-Beobachterentwurf für ein einfaches Pendel	92
10	Kombination aus Regler und Beobachter	95
10.1	Kompensator	95
10.1.1	Beispiel: Kompensator-Entwurf für eine Satelliten-Lageregelung	96
10.1.2	Kompensatorentwurf für einen Gleichstrom-Servo	99

A Anhang	101
A.1 Tabellen	101
A.2 Asymptoten der Wurzelortskurve	104
A.3 Zustandstransformation	105

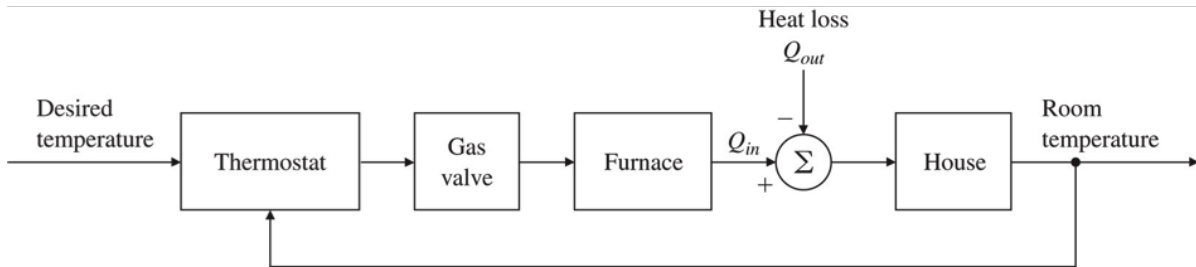
Literatur

[FPE15] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini.
Feedback Control of Dynamic Systems. 7th global edition.
 Pearson Prentice Hall, 2015.

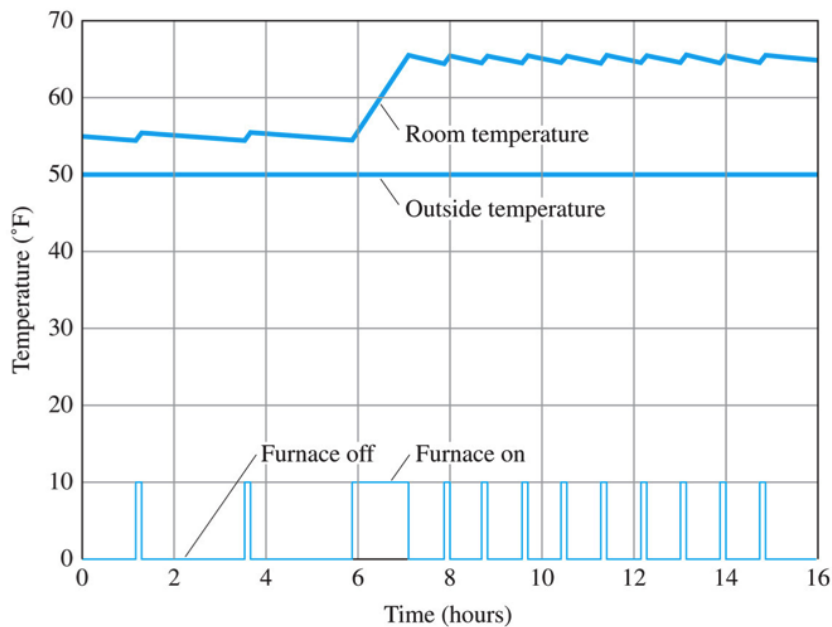


1 Einführung

1.1 Grundelemente in Regelsystemen



(a)



(b)

Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

Abbildung 1.1: Beispiel für ein Regelungssystem: (a) Blockdiagramm einer Raumtemperatur-Regelung; (b) Plot der Raumtemperatur und der Ofenansteuerung [FPE15, Figure 1.1]

Wichtige regelungstechnische Begriffe, siehe auch Abbildung 1.2.

STRECKE Die Strecke (*process* oder *plant*) besteht aus *Maschine* + *Stelleinrichtung* (*actuators*).

STEUERUNG Bei einer *Steuerung* (*Feedforward Control* oder *Open Loop Control*) erzeugt das Steuergerät (Controller) die Eingangsgröße (Control signal) - *unabhängig* vom aktuellen Verlauf

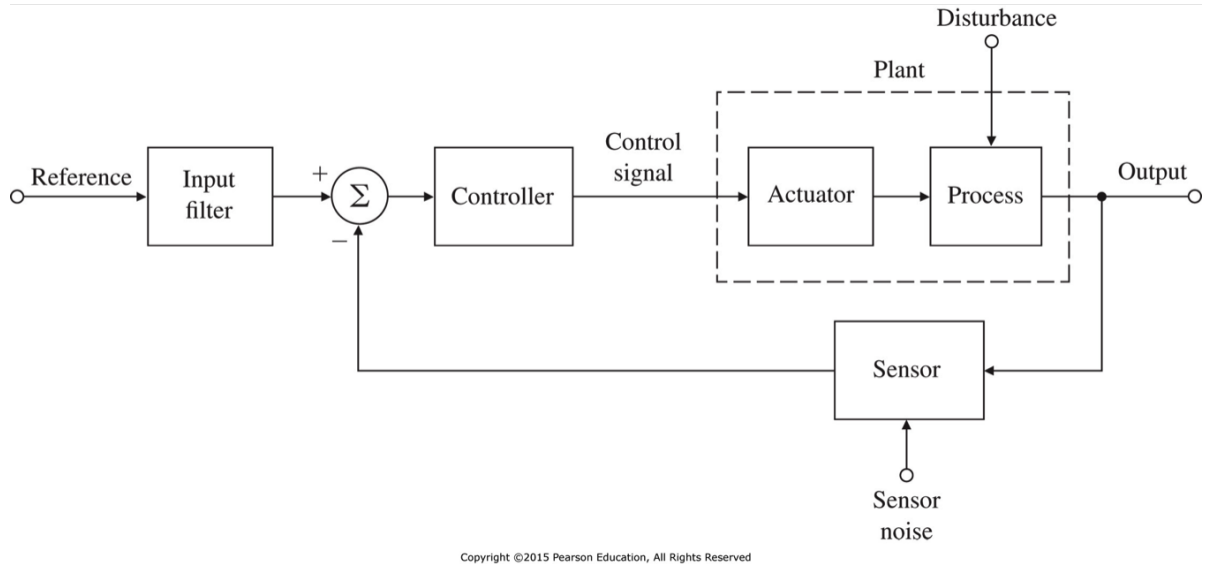


Abbildung 1.2: Blockdiagramm aller Komponenten eines grundlegenden Regelungssystems [FPE15, Figure 1.2]

des Ausgangs (Output) - aus dem Sollwert (Reference). Das bedeutet, es gibt *keinen* Rückwärtszweig wie in Abbildung 1.2.

REGELUNG Bei einer *Regelung (Feedback Control)* erzeugt der Regler die Eingangsgröße basierend auf

- der *Rückführung* des Ausgangs, das heißt des Istwerts der Regelgröße, und
- dem *Vergleich* mit dem Sollwert.

1.2 Steuerung vs Regelung am Beispiel Tempomat

Anhand eines Tempomaten lässt sich der Unterschied Steuerung versus Regelung veranschaulichen. Abbildung 1.3 zeigt das Blockdiagramm eines Tempomat-Reglers. Für den Vergleich brauchen wir ein einfaches Modell, siehe Abbildung 1.4: Eine Änderung des Drosselklappenwinkels bewirke eine Geschwindigkeitsänderung von $\frac{10 \text{ km/h}}{1^\circ}$ und die Straßenneigung bewirke $\frac{5 \text{ km/h}}{1 \%}$

1.2.1 Steuerung

Abbildung 1.5 zeigt das Blockdiagramm des *gesteuerten (open-loop)* Tempomaten. Für die Geschwindigkeit folgt dann

1.1															

1.2 Steuerung vs Regelung am Beispiel Tempomat

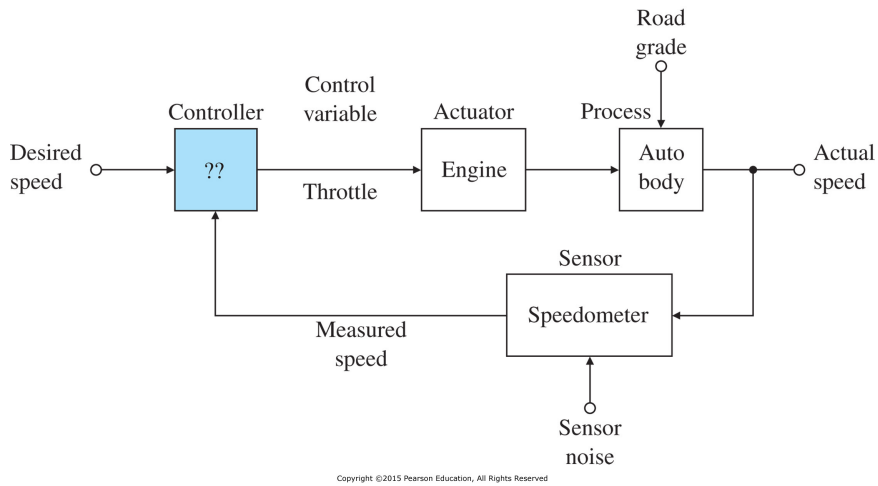


Abbildung 1.3: Tempomatregler aus [FPE15, Figure 1.3]

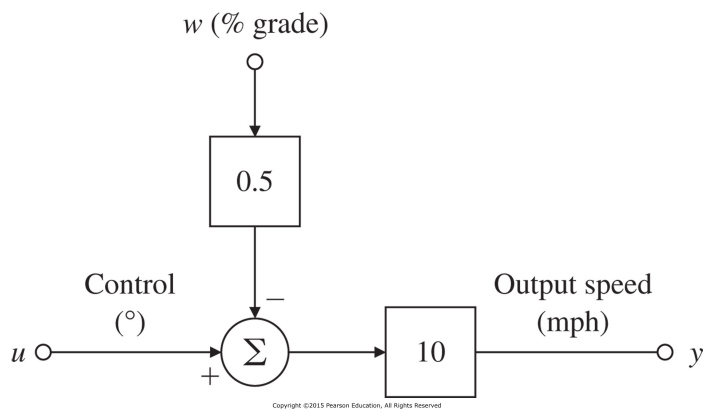


Abbildung 1.4: Einfaches Modell aus [FPE15, Figure 1.4].

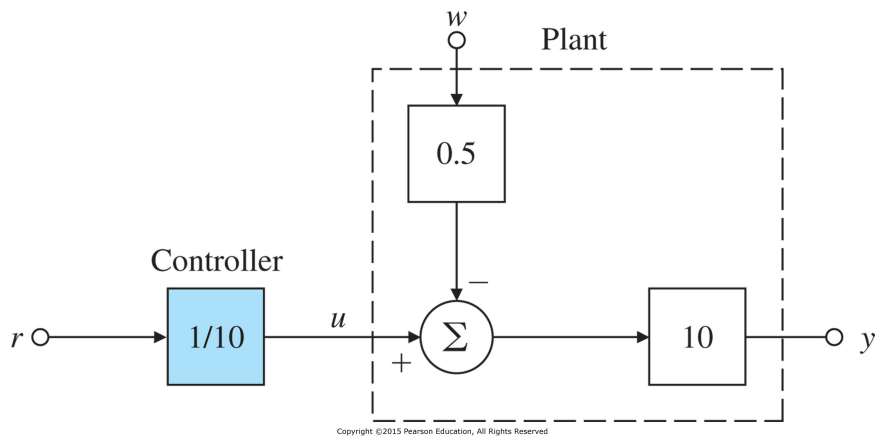


Abbildung 1.5: Gesteuerter (open-loop) Tempomat [FPE15, Figure 1.5]

1 Einführung

Somit ergibt sich bei ebener Straße ($w = 0^\circ$) mit $r = 55 \text{ km/h}$ 1.2

Bei einer Steigung von $w = 1^\circ$ ergibt sich für $r = 55 \text{ km/h}$ 1.3

Das bedeutet somit 1.4

1.2.2 Regelung

Abbildung 1.6 zeigt das Blockdiagramm des *geregelten (closed-loop)* Tempomaten. Den Verstärkungs-

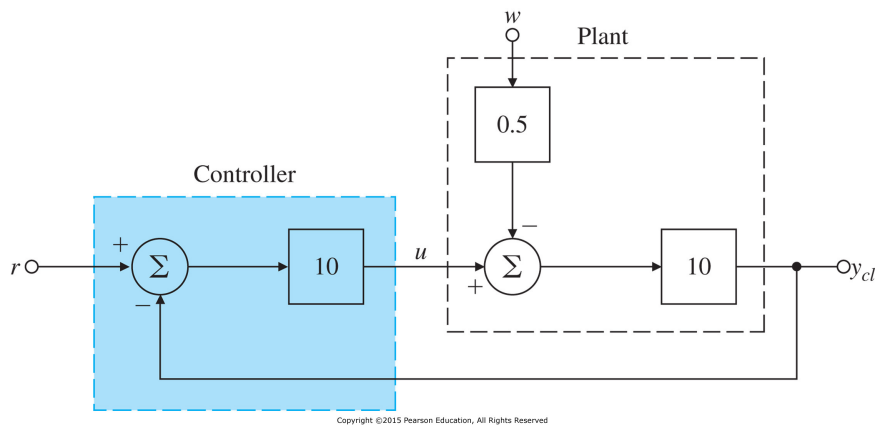


Abbildung 1.6: Geregelter (closed-loop) Tempomat [FPE15, Figure 1.6])

faktor (feedback gain) setzen wir hier willkürlich auf 10. Im *aufgeschnittenen* Regelkreis gilt zunächst:

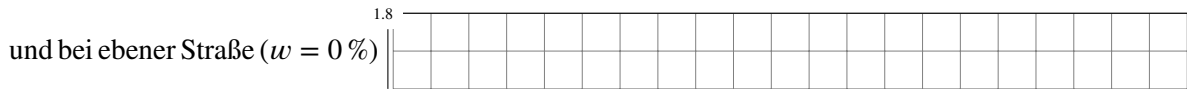
1.5

Wenn wir den Regelkreis schließen ergibt sich schließlich:

1.6

Bei einer Steigung von $w = 1\%$ ergibt sich für $r = 55 \text{ km/h}$

1.7



Das bedeutet

- In beiden Fällen ca. 1 % Fehler
- Fehler auch bei flacher Straße
- bleibende Regelabweichung (steady state error)

1.2.3 Grundsätze der Regelung

STABILITÄT Das Gesamtsystem muss jederzeit stabil sein.

TRACKING Der Systemausgang soll dem Vorgabe-Referenzsignal so eng wie möglich folgen.

STÖRUNGEN Der Systemausgang soll so unsensibel wie möglich auf Störungen reagieren.

ROBUSTHEIT Die genannten Ziele sollen auch dann erreicht werden, wenn das Modell ungenau ist oder die Strecke sich mit der Zeit verändert.

1.3 Zusammenfassung

Aus [FPE15, Seite 39]:

- Die *Regelung* ist der Prozess, eine Systemvariable einem bestimmten Wert, dem *Referenzwert*, folgen zu lassen. Ein System, das einem sich ändernden Referenzwert folgt heißt *Folgeregelung*. Ein System, dessen Ausgang unabhängig von Störungen konstant bleiben soll, heißt *Konstantregler* oder *Regulator*.
- Im Englischen werden Steuerung und Regelung unter dem Oberbegriff *control* zusammengefasst. Bei der *Steuerung* (*open-loop control*) misst das System *keine* Ausgänge und die Eingangs- oder Regelgröße wird *nicht* korrigiert, damit der Ausgang sich dem Referenzsignal anpasst. Bei der *Regelung* (*closed-loop control*) misst das System mit Hilfe eines Sensors den Ausgang und koppelt den gemessenen Wert zurück, um die Regelgröße zu beeinflussen.
- Ein einfaches Regelungssystem besteht aus der *Strecke* (*process*), deren Ausgang (output) beeinflusst werden soll, dem *Stellglied* (*actuator*), das den Ausgang der Strecke ändert, Ein- und Ausgangssensoren, und dem *Regler*, der das Signal für das Stellglied berechnet.
- *Blockdiagramme* helfen die Systemstruktur und den Informationsfluss in Regelungssystemen zu visualisieren.
- Ein gut entworfenes Regelungssystem ist stabil, folgt dem vorgegebenen Wert, gleicht Störungen aus und ist robust gegen Änderungen oder Abweichungen zum mathematischen Modell.
- Die Theorie und Designmethoden lassen sich in zwei Kategorien einteilen: *Klassische* Regelungsmethoden nutzen die Laplace-Transformation und dominierten bis etwa 1960. Ab 1960 starteten *moderne* Regelungs-Methoden, die auf gewöhnlichen Zustandsdifferentialgleichungen basieren. Es wurden viele Verbindungen zwischen diesen beiden Kategorieren entdeckt und der gut vorbereitete Ingenieur muss beide Techniken beherrschen.

2 Das dynamische Verhalten von Systemen

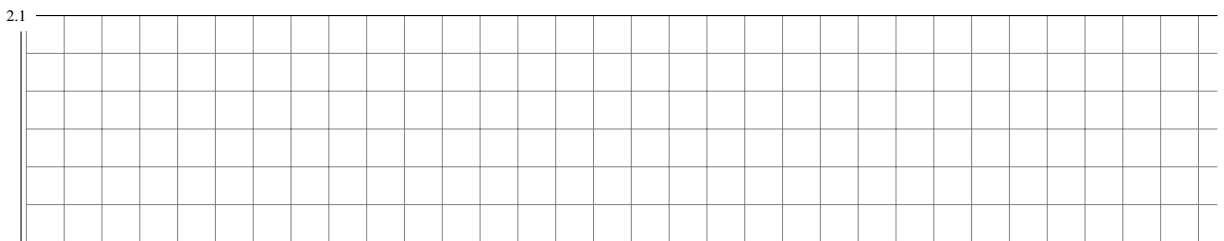
2.1 Einleitung

Das dynamische Verhalten von Systemen lässt sich auf zwei Arten beschreiben. Für eine schnelle, *approximative* Analyse nutzen wir *lineare* Analysemethoden. Die resultierende Approximation der Systemantwort beantwortet die Frage, warum eine Lösung bestimmte Eigenschaften hat und wie das System geändert werden könnte, um die Systemantwort in eine gewünschte Richtung zu lenken. Im Gegensatz dazu erfordert ein *präzises* Bild der Systemantwort typischerweise numerische Simulation der *nichtlinearen* Bewegungsgleichungen. Wir werden uns auf die lineare Analyse konzentrieren.

Es gibt drei Domänen, um das dynamische Systemverhalten zu untersuchen: die **s-Ebene**, den **Frequenzgang** und den **Zustandsraum**. Im Folgenden werden einige der grundlegenden mathematischen Werkzeuge besprochen, die für die Analyse in der s-Ebene und des Frequenzgangs notwendig sind.

2.2 Systemantwort durch Faltung

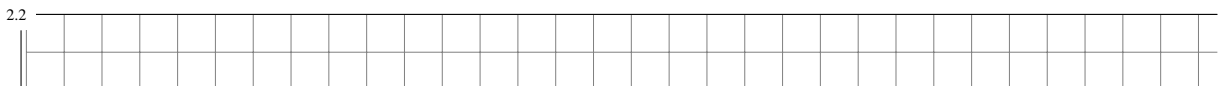
Das Superpositionsprinzip besagt, dass für ein System, dessen Eingang als eine Summe von Signalen dargestellt werden kann, die Systemantwort als die Summe der einzelnen Antworten zu den jeweiligen Signalen dargestellt werden kann. Beispiel:



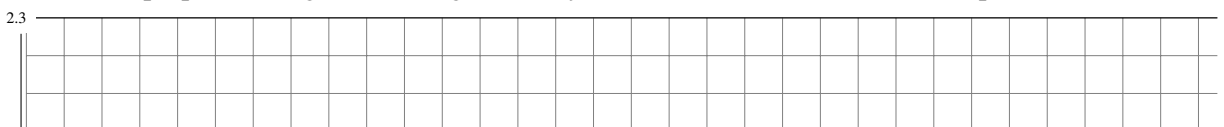
Die Systemantwort eines linearen Systems zu einem beliebigen Signal lässt sich also bestimmen, indem ein Signal in die Summe von elementaren Komponenten zerlegt wird und die jeweiligen Antworten wieder summiert werden. Die üblichen Kandidaten für elementare Signale sind der Impuls (siehe Beispiel in Abbildung 2.1) und die Exponentialfunktion. Der kurze Impuls

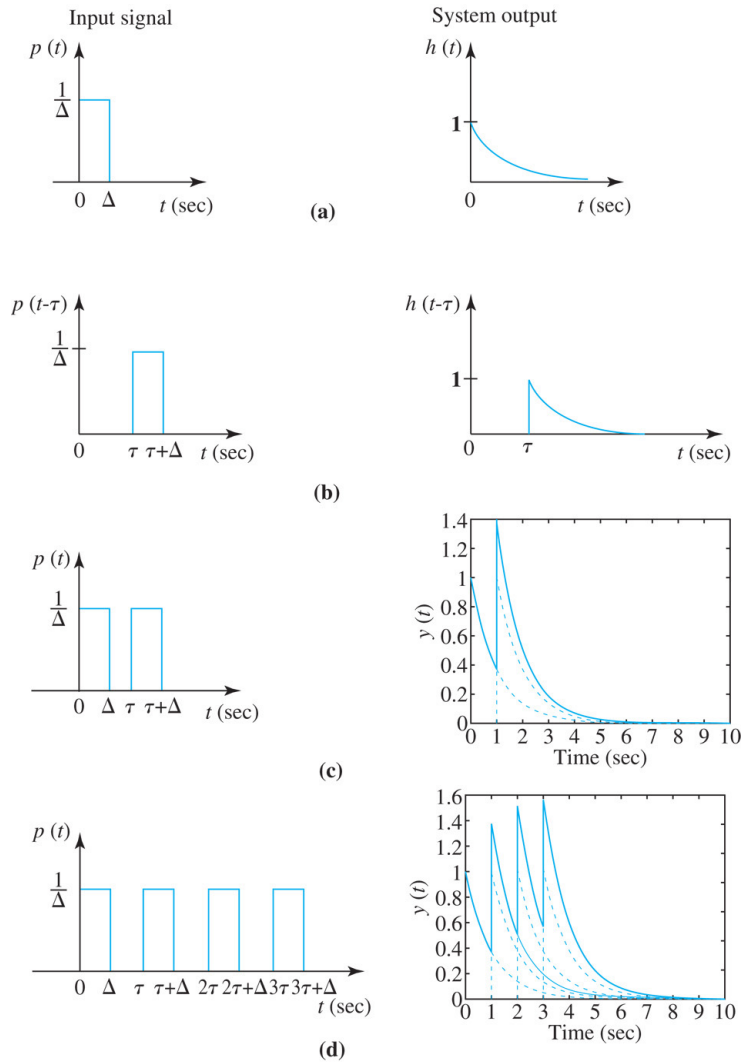
$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

führe zu der Systemantwort $h_p(t)$. Die Systemantwort zum Zeitpunkt $n\Delta$ zum Eingang $\Delta \cdot u(k\Delta) \cdot p(n\Delta - k\Delta)$ ist dann



Aus der Superposition ergibt sich die gesamte Systemantwort zu einer Serie von Impulsen zur Zeit t zu

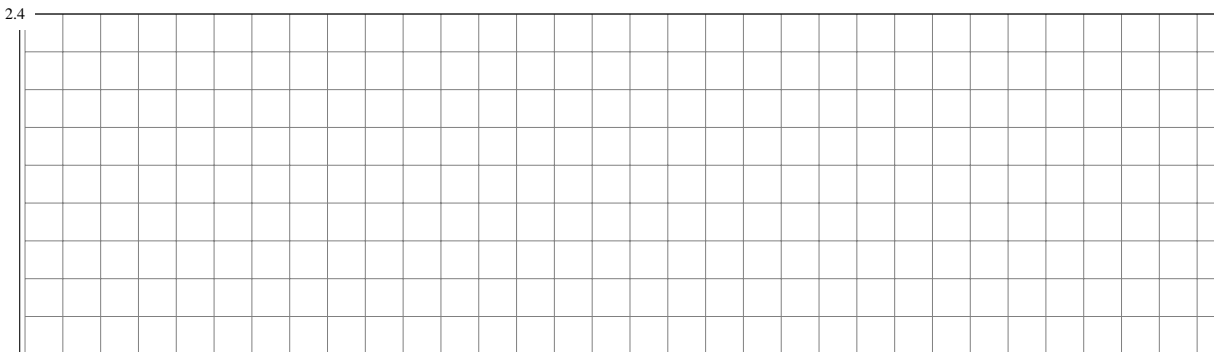




Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

Abbildung 2.1: Systemantwort auf eine Reihe von kurzen Impulsen, [FPE15, Fig. 3.1, Seite 96]

Für den Grenzübergang $\Delta \rightarrow 0$ wird der kurze Impuls immer kürzer und höher, wobei die Fläche konstant bleibt. Wir haben dann das Konzept des **Impulssignals** $\delta(t)$, das uns erlaubt, kontinuierliche Signale zu behandeln. Es gilt also



2 Das dynamische Verhalten von Systemen

Der (Dirac'sche) Impuls $\delta(t)$ hat folgende Eigenschaften:

2.5

Falls $f(t)$ kontinuierlich ist, dann wirkt der Impuls als „Sieb“:

2.6

Die Funktion f kann also als eine Summe von Impulsen dargestellt werden. Ersetzt man in obiger Gleichung f durch u , dann ist somit u eine Summe von Impulsen:

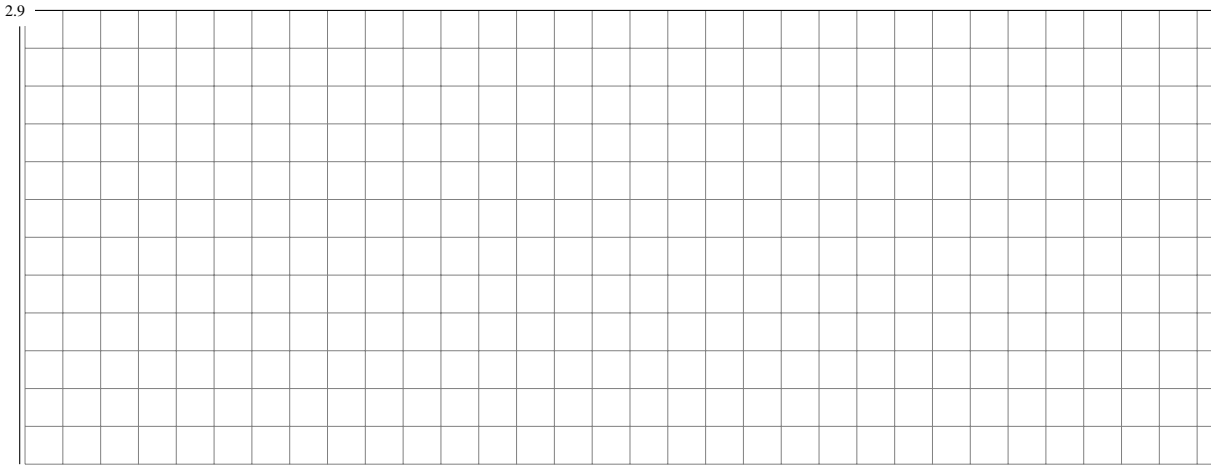
2.7

Daraus folgt, dass man die Antwort eines linearen Systems zu einem *beliebigen* Signal durch Superposition aus der Systemantwort zu einem Einheitsimpuls bestimmen kann. Falls das System zeitinvariant ist, dann ist die Impulsantwort durch $h(t - \tau)$ gegeben, weil die Antwort zum Zeitpunkt t zu einem Impuls zum früheren Zeitpunkt τ nur von der vergangenen Zeit $t - \tau$ abhängt. Für zeitinvariante Systeme ist die Antwort auf einen beliebigen Eingang gegeben durch das Faltungsintegral:

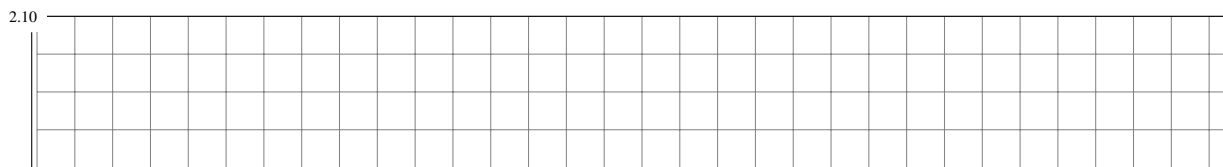
2.8

2.3 Laplace-Transformation

Setzt man in das allgemeine Faltungsintegral für den Eingang $u(t) = e^{st}$ ($s = a + jb$ komplex) ein, dann ergibt sich:



Die Funktion $H(s)$ nennt man *Übertragungsfunktion*. Sie ist das Verhältnis der Laplace-Transformierten des Ausgangs $Y(s)$ zur Laplace-Transformierten des Eingangs $U(s)$ mit der Bedingung, dass alle Anfangsbedingungen des Systems gleich Null sind, das heißt es gilt



$H(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Einheitsimpulsantwort $h(t)$, denn die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

Sie transformiert die Originalfunktion $f(t)$ im *Zeitbereich*¹ in die Bildfunktion $F(s)$ im *Bildbereich*². Weil die Laplace-Transformierte der Impulsfunktion

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} = e^0 = 1$$

ist, gilt also bei $u(t) = \delta(t)$: $Y(S) = H(S)$.

Beispiel

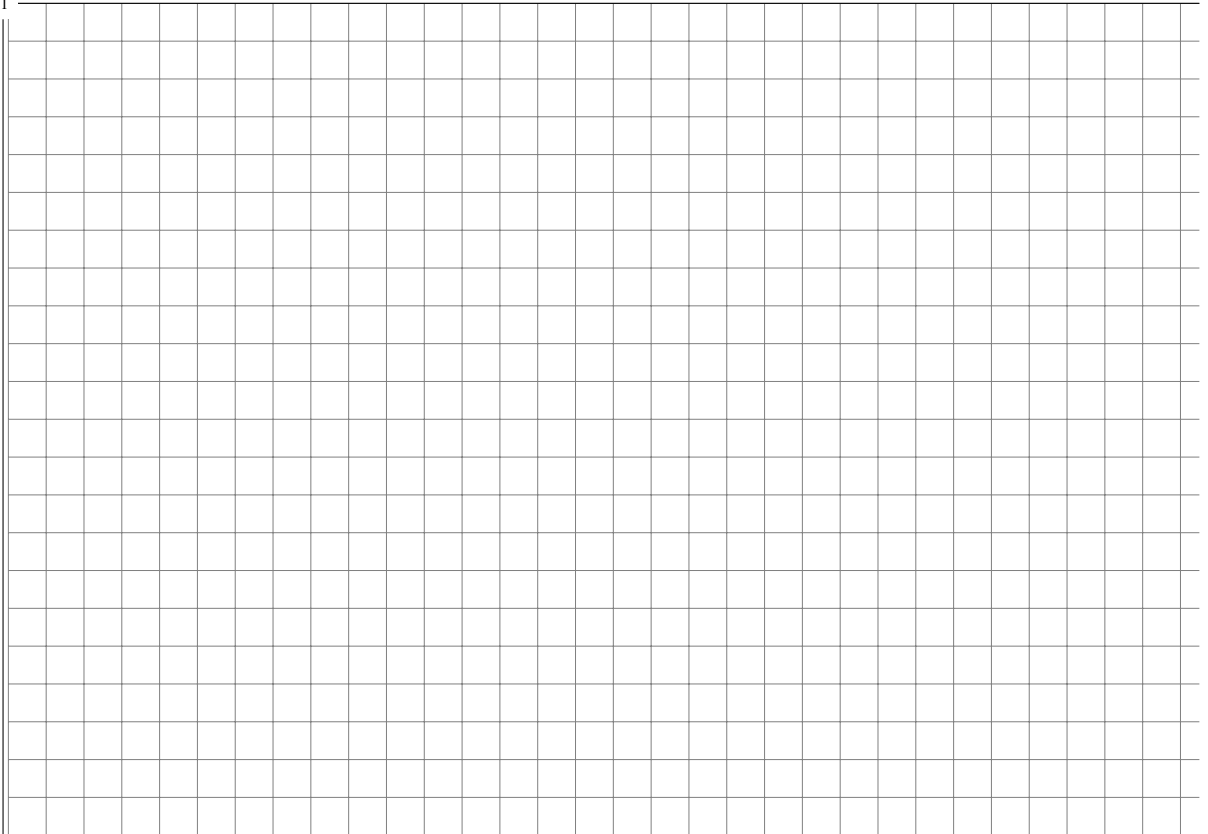
Um beispielsweise die Übertragungsfunktion des linearen Systems $\dot{y} + ky = u$ zu bestimmen, müssen wir die linke und rechte Seite der Differentialgleichung in den Bildbereich transformieren. Dazu brauchen wir zunächst die Laplace-Transformation von \dot{y} :

¹Zeitbereich: Die Funktionen sind abhängig von der Zeit t

²Bildbereich: Die Funktionen sind abhängig von der komplexen Variable s

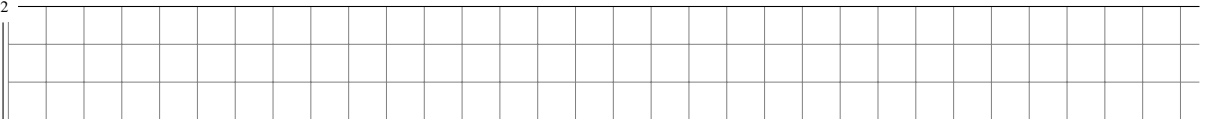
2 Das dynamische Verhalten von Systemen

2.11



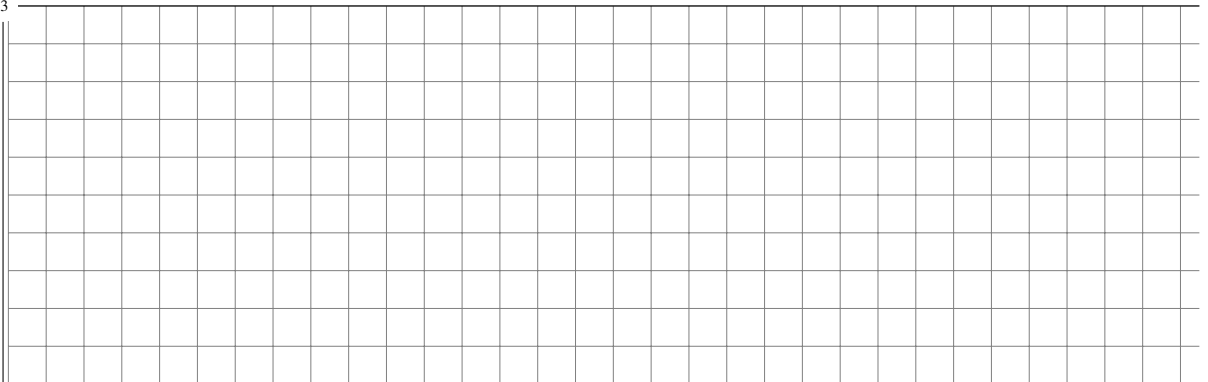
Für die rechte Seite schreiben wir $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$, so dass für die Übertragungsfunktion $H(s)$ folgt

2.12



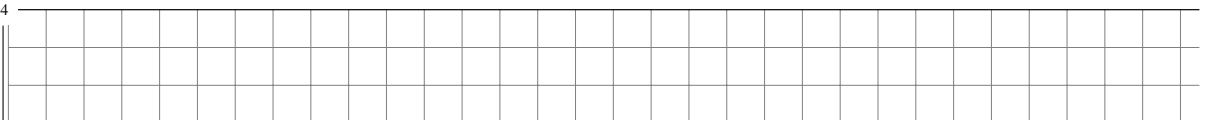
Möchte man die Lösung für eine bestimmte Eingangsfunktion, zum Beispiel für $u(t) = e^{-at}$ mit $a \neq k$ bestimmen, dann braucht man die Laplace-Transformierte dieser Funktion

2.13

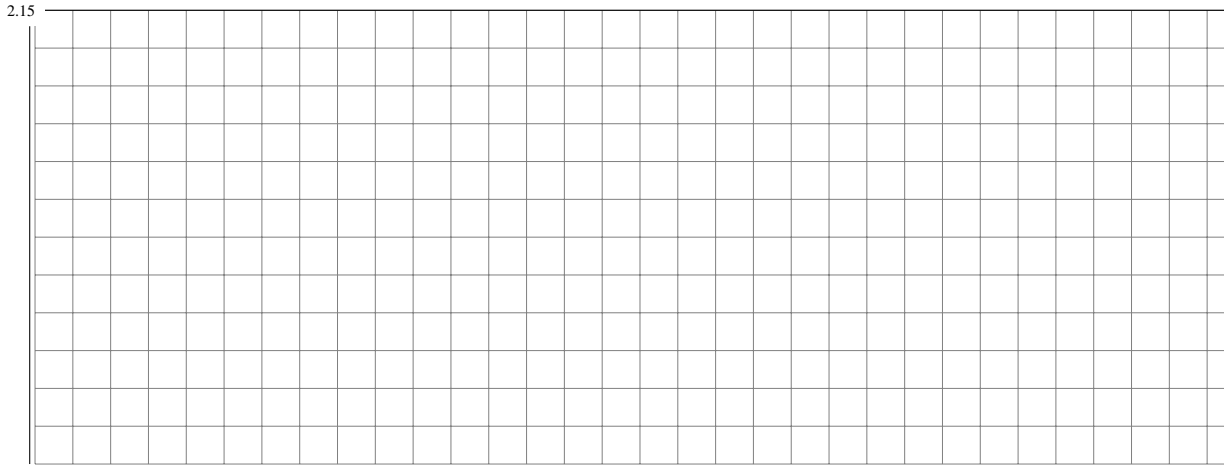


und löst dann nach $Y(S)$ auf:

2.14



Zur Rücktransformation in den Zeitbereich und auch für die Laplace-Transformation gängiger Funktionen nutzt man üblicherweise eine Korrespondenztabelle wie Tabelle A.2 zusammen mit den Rechenregeln in Tabelle A.1. In der Tabelle sind - bis auf Nr. 13, 14 und 15 - nur Partialbrüche aufgeführt, so dass zusammengesetzte Brüche, so wie in diesem Beispiel, erst in Partialbrüche zerlegt werden müssen, siehe Abbildung A.1:

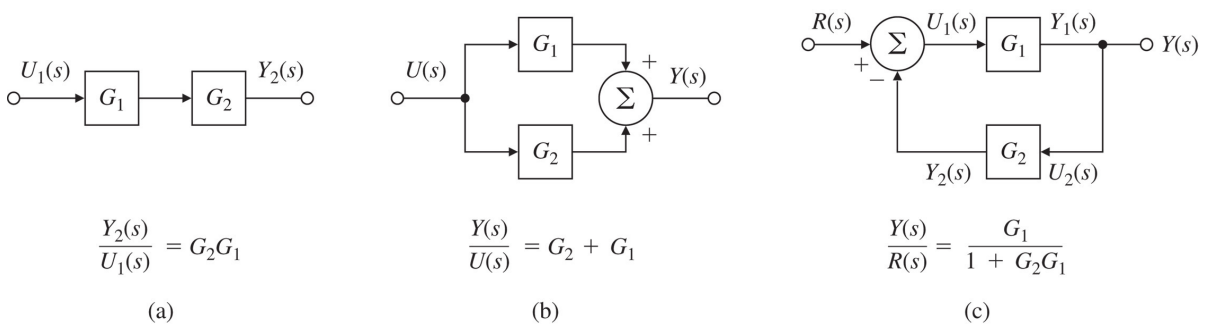


2.4 Blockdiagramme als Modellierungswerkzeuge

Unter der Annahme, dass die Anfangsbedingungen Null sind, beschreibt die Übertragungsfunktion die Beziehung zwischen Eingang und Ausgang:

$$\underbrace{Y(s)}_{\text{Ausgang}} = \underbrace{H(s)}_{\text{ÜF}} \underbrace{U(s)}_{\text{Eingang}} \quad \xrightarrow{U(s)} \boxed{H(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

Abbildung 2.2 zeigt, wie sich Blockdiagramme elementar kombinieren lassen. Die Übertragungsfunktion für eine komplexe Topologien lässt sich durch sukzessive Umformung und Nutzung der Formeln in Abbildung 2.2 bestimmen.



Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

Abbildung 2.2: Drei Beispiele elementarer Blockdiagramme: (a) in Serie; (b) parallel; (c) Rückführung, [FPE15, Figure 3.9]

3 Polstellenlage

3.1 Bedeutung der Polstellenlage in der s -Ebene

Sobald die Übertragungsfunktion mit einer der verfügbaren Methoden der Modellbildung¹ bestimmt ist, können wir mit der Analyse des dynamischen Verhaltens beginnen. Wenn die Systemgleichungen lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind, dann ist die resultierende Übertragungsfunktion gebrochenrational, das heißt sie hat die Form

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Der Bruch sei gekürzt, Zähler und Nenner haben somit keine gemeinsamen Nullstellen. Die Nullstellen des Nenners heißen *Pole*. Die *Nullstellen* und *Pole* beschreiben, bis auf einen konstanten Faktor, *vollständig* das Systemverhalten. Weil die Impulsantwort $h(t)$ die korrespondierende Zeitfunktion zur Übertragungsfunktion $H(s)$ ist, heißt sie auch *natürliche Antwort* des Systems. Wir können die Pole und Nullstellen nutzen, um das korrespondierende Zeitverhalten zu berechnen. Die Pole bestimmen die Klasse der Signale, die in der Impulsantwort enthalten sind. Für einen Pol erster Ordnung,

$$H(s) = \frac{1}{s + \sigma}$$

zeigt Tabelle A.2, dass die Impulsantwort eine Exponentialfunktion ist.

$$h(t) = e^{-\sigma t}$$

Bei $\sigma > 0$ liegt der Pol bei $s < 0$, die Exponentialfunktion klingt ab, und wir sagen die Impulsantwort ist *stabil*. Bei $\sigma < 0$ liegt der Pol rechts vom Ursprung. Weil die Exponentialfunktion mit der Zeit wächst, wird die Impulsantwort als *instabil* bezeichnet.

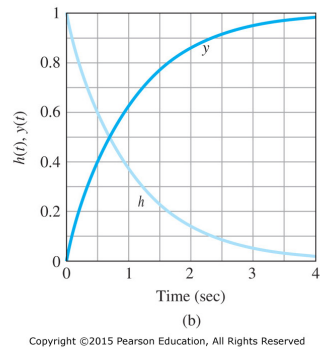
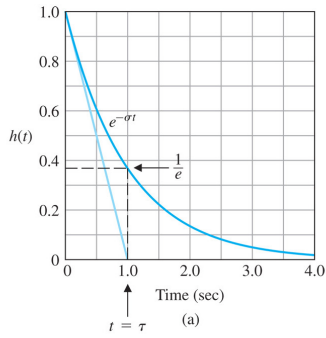
3.1.1 System 1. Ordnung (PT₁-Glied)

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{k}{s + \sigma} U(s)$$

mit k : Verstärkungsfaktor, $\tau = 1/\sigma$: Zeitkonstante

¹In dieser Vorlesung wird die Modellbildung *nicht* behandelt.

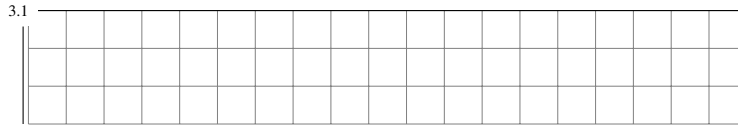
3.1 Bedeutung der Polstellenlage in der s-Ebene



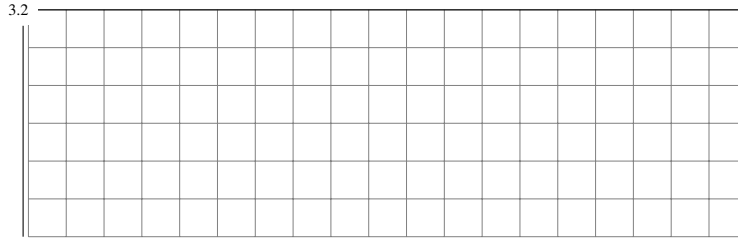
Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

Abbildung 3.1: System 1. Ordnung für $k = \tau = 1$, [FPE15, Fig. 3.14]:
 (a) Impulsantwort
 (b) Impuls-, Sprungantwort

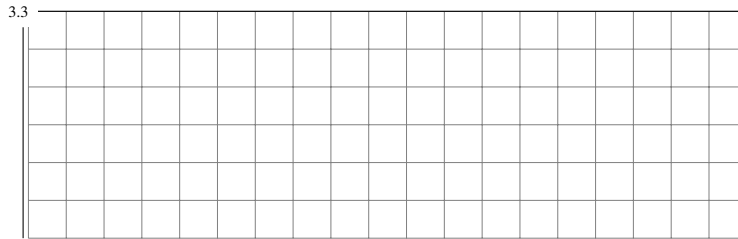
Impulsantwort:



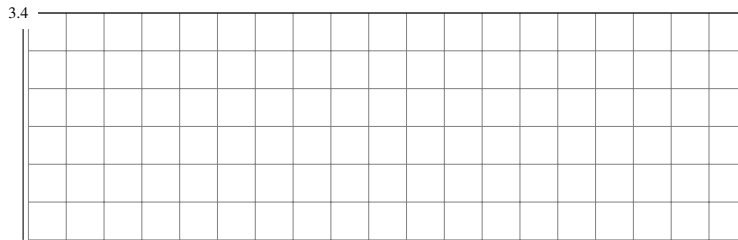
Anfangswert, Endwert, Anfangssteigung:



Sprungantwort:

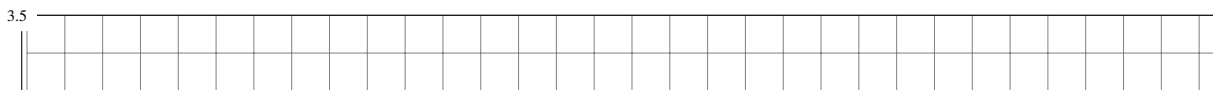


Anfangssteigung und Endwert:



3.1.2 System 2. Ordnung, PT₂-Glied

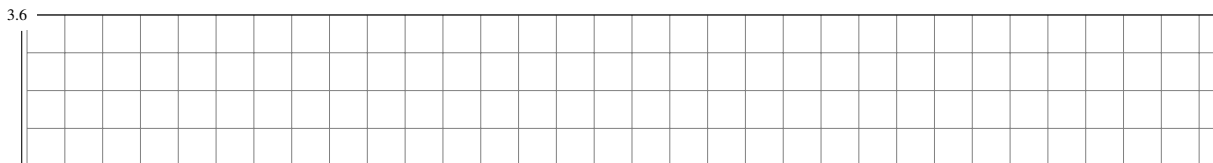
Komplexe Polpaare $s = -\sigma \pm j\omega_d$ korrespondieren zum Nenner



Übertragungsfunktionen mit komplexen Polen liegen häufig in der Form

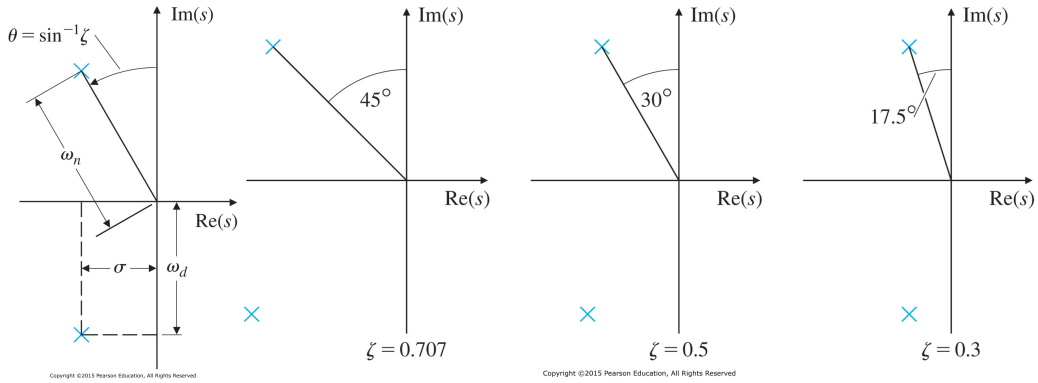
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

vor. Ein Koeffizientenvergleich ergibt



3 Polstellenlage

ζ : Dämpfungsfaktor, ω_n : natürliche, ungedämpfte Kreisfrequenz, ω_d : gedämpfte Eigenkreisfrequenz
 Die Pole dieser Übertragungsfunktion liegen somit auf einem Radius von ω_n in der s -Ebene mit einem Winkel von $\theta = \arcsin \zeta$. Je kleiner der Winkel θ ist, desto kleiner ist die Dämpfung. (Bilder aus ([FPE15, Figure 3.18 und 3.20]))



Mit Lücke 3.6 lässt sich die Übertragungsfunktion schreiben als

3.7

Für die Impulsantwort ergibt sich aus der Korrespondenztabelle somit

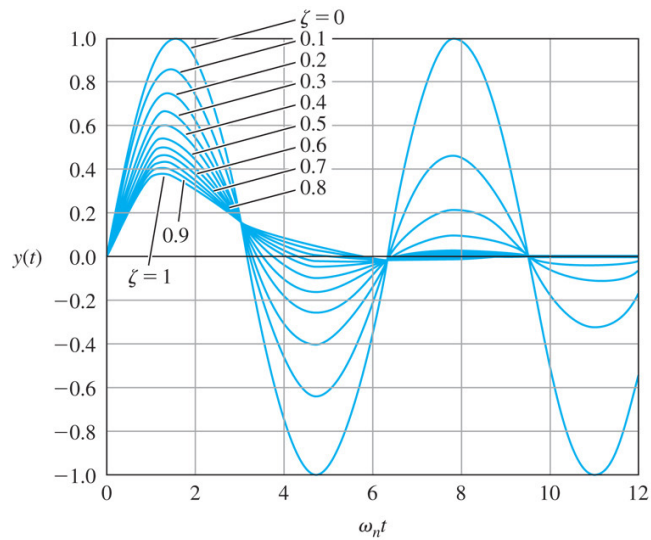
3.8

Die Sprungantwort lässt sich mit der Korrespondenz

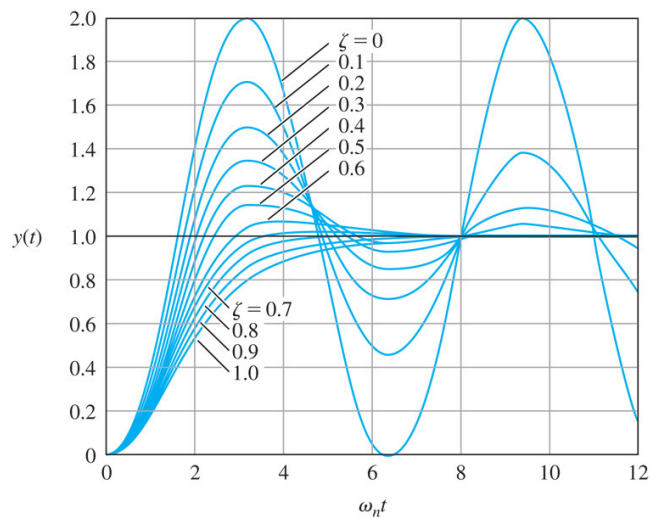
3.9

berechnen. Abbildung 3.2 zeigt die Impuls- und Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung mit komplexen Polen, wobei die Zeit auf die ungedämpfte Kreisfrequenz ω_n normalisiert wurde. Die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d nimmt ab bei wachsendem Dämpfungsmaß ζ .

3.1 Bedeutung der Polstellenlage in der s-Ebene



(a)



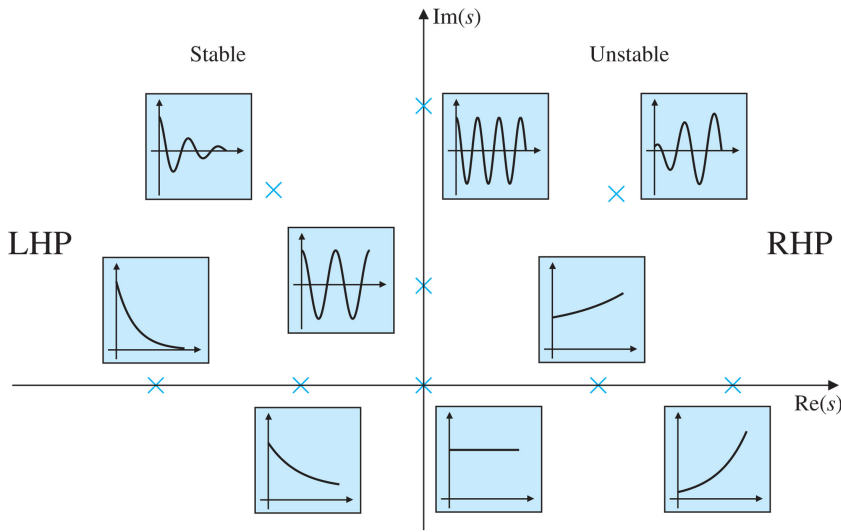
(b)

Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

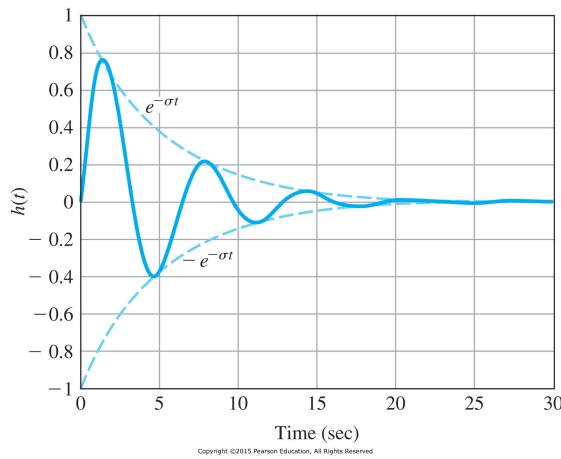
Abbildung 3.2: Zeitverhalten von Systemen 2. Ordnung in Abhängigkeit von ζ : (a) Impulsantwort; (b) Sprungantwort ([FPE15, Figure 3.19])

3 Polstellenlage

3.1.3 Übersicht Impulsantworten abhängig von der Polstellenlage



([FPE15, Fig. 3.16])



Exponentiell abklingende Impulsantwort eines Systems 2. Ordnung ([FPE15, Figure 3.21]). Das Abklingen ist bestimmt durch $\sigma = \omega_n \zeta$.

3.2 Kenngrößen im Zeitbereich

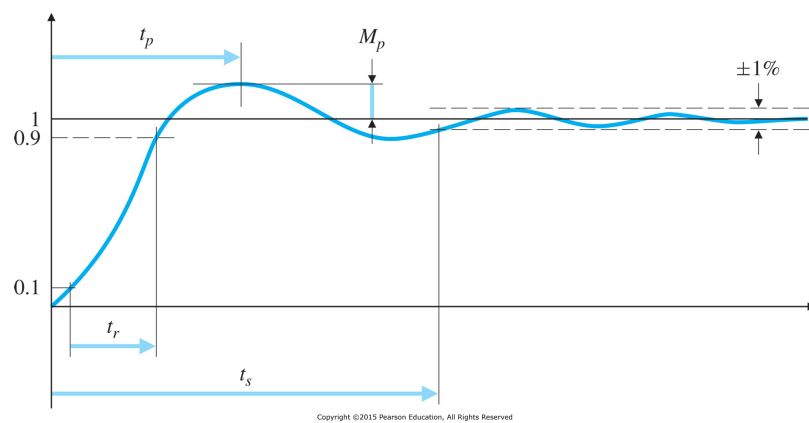


Abbildung 3.3: Kenngrößen im Zeitbereich, [FPE15, Figure 3.23]

t_r Steigzeit / Anregelzeit (rise time)

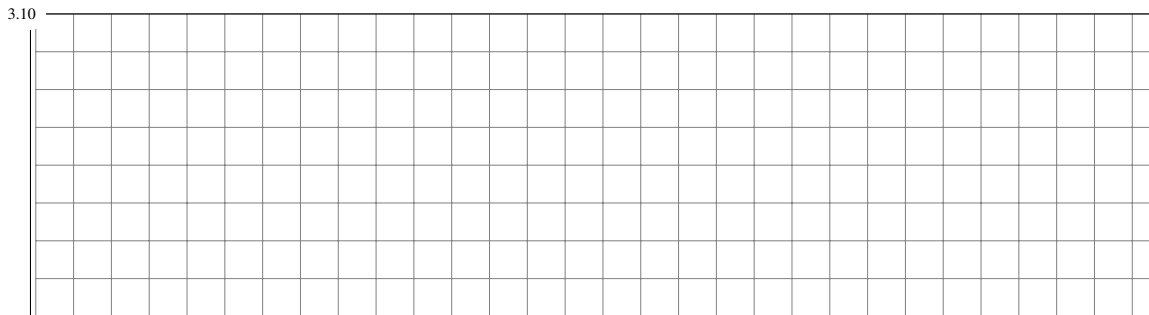
t_s Einschwingzeit (settling time)

M_p Überschwingweite (overshoot (peak - final value))

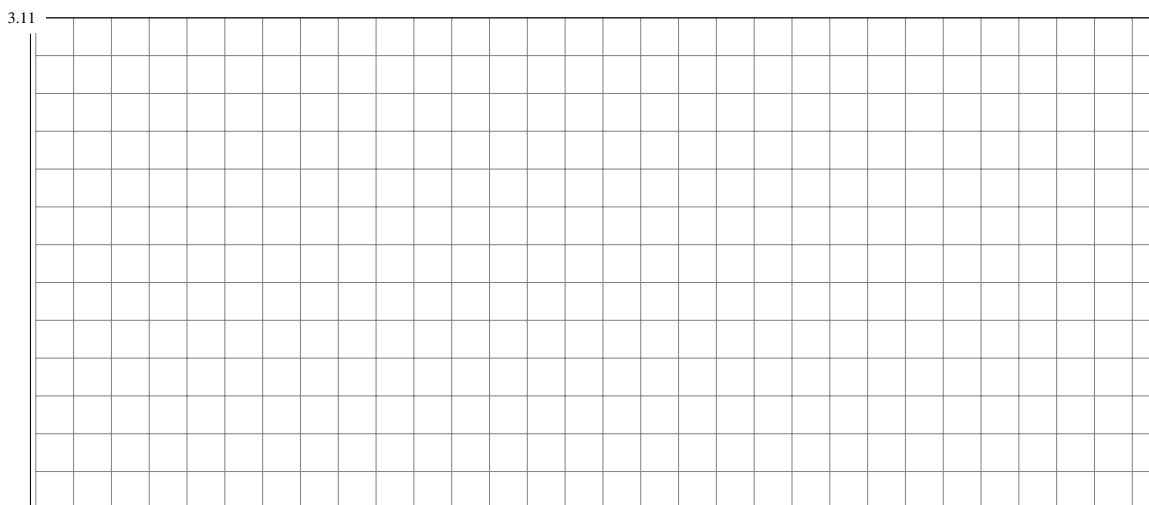
t_p Anstiegszeit (peak time)

Wir leiten im Folgenden die Zeitbereichsgrößen t_p , M_p und t_s her, siehe Abbildung 3.3.

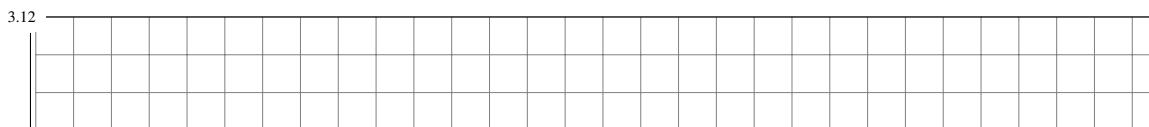
1. Die Sprungantwort $y(t)$ mit $u(t) = 1(t)$ aus $Y(s) = \frac{\omega_n^2}{a(s)}U(s)$ mit σ und ω_d als Parameter bestimmen (siehe Lücke 3.6).



2. Anstiegszeit $t_p > 0$ durch Nullsetzen der Ableitung $\dot{y}(t_p) = 0$ bestimmen. Ableitung $\dot{y}(t)$:



$\dot{y}(t) = 0$:



3. Überschwingweite M_p mit Hilfe des Zusammenhangs $y(t_p) = 1 + M_p$ bestimmen:

3 Polstellenlage

3.13

4. Die 1%-Einschwingzeit t_s bestimmen, wobei wir zur Vereinfachung annehmen, dass $y(t_s)$ ein Extremum ist:

3.14

4 Erste Analyse des Regelkreises

Kap 4.2 überarbeiten!!

4.1 Die grundlegenden Regelungsgleichungen

Im Folgenden sammeln wir die Gleichungen und Übertragungsfunktionen, die uns im Weiteren beschäftigen werden.

Steuerung (open loop) Aus Abbildung 4.1 bestimmen wir für die Steuerung die Übertragungsfunktion $H_{ol}(s)$, den Ausgang $Y_{ol}(s)$ und den Fehler $E_{ol}(s)$:

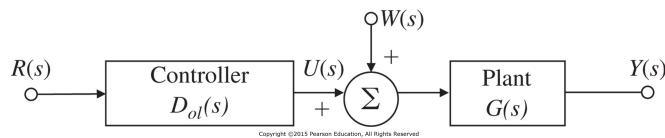
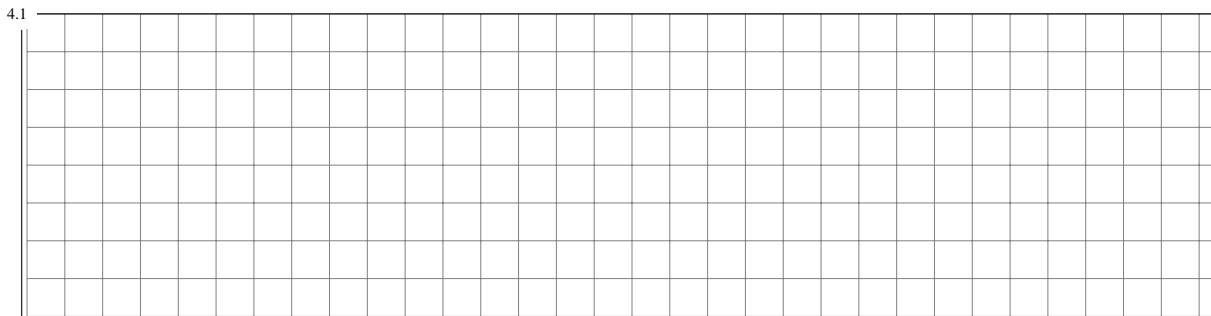
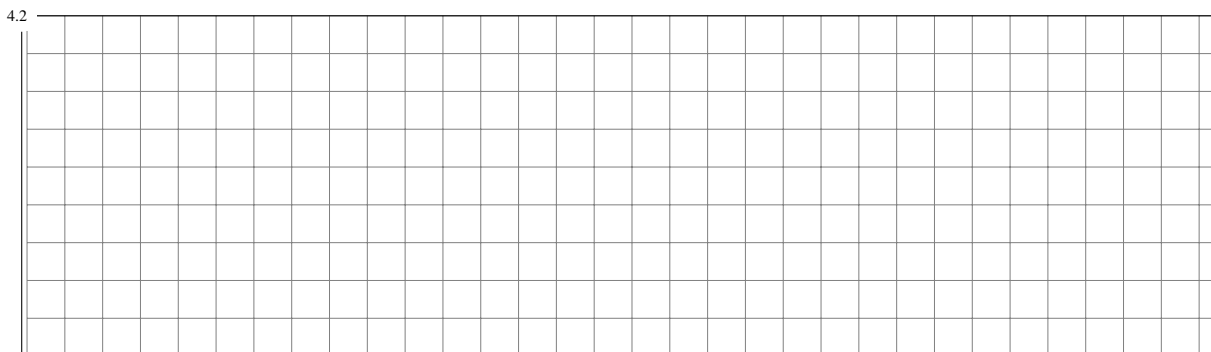
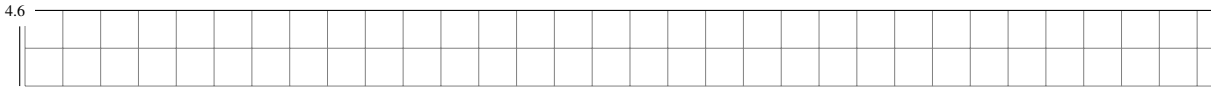
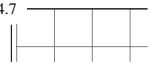


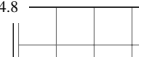
Abbildung 4.1: Steuerungssystem (open loop) mit der Referenz R , der Stellgröße U , der Störung W und dem Ausgang Y , [FPE15, Figure 4.1]

Regelung (closed loop) Aus Abbildung 4.2 bestimmen wir für den geschlossenen Regelkreis die Übertragungsfunktion $H_{cl}(s)$, den Ausgang $Y_{cl}(s)$ und den Fehler oder Regelabweichung $E_{cl}(s)$:

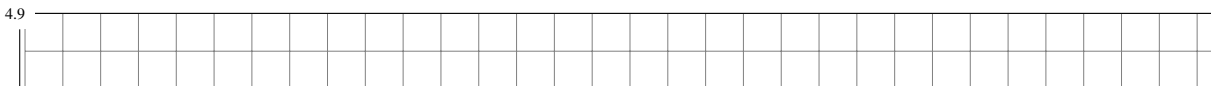




Unter welchen Bedingungen werden alle Lösungen (Pole) dieser Gleichung in der linken Halbebene liegen? Dieses Problem löste Routh. In unserem Fall gibt es die simple Lösung  zu wählen,

so dass sich die beiden *stabilen* Pole kürzen. Dies ist in diesem Fall möglich, weil  ein stabiler Pol ist. Es ergibt sich eine Gleichung zweiten Grades, die sich einfach lösen lässt, so dass die verbleibenden beiden Pole beliebig platziert werden können.

Übung. Bestimmen Sie K und δ in Abhängigkeit von ζ und ω_n , so dass die charakteristische Gleichung $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ ist.



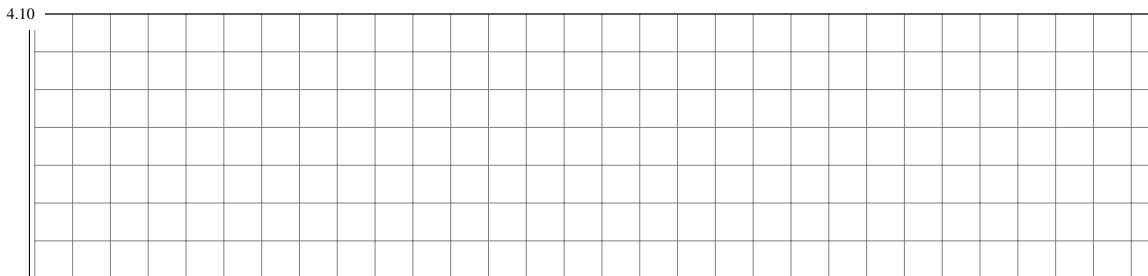
4.1.2 Stationäres Verhalten

Hierzu betrachten wir die Systemantwort mit einem Sprung am Eingang $r(t) = r\varepsilon(t) \rightsquigarrow R(s) = \frac{r}{s}$ und der Störung $w(t) = w\varepsilon(t) \rightsquigarrow W(s) = \frac{w}{s}$ für $t \rightarrow \infty$ beispielhaft für $D(s) = k_p$ und

$$G(s) = \frac{A}{s(s + \sigma)}$$

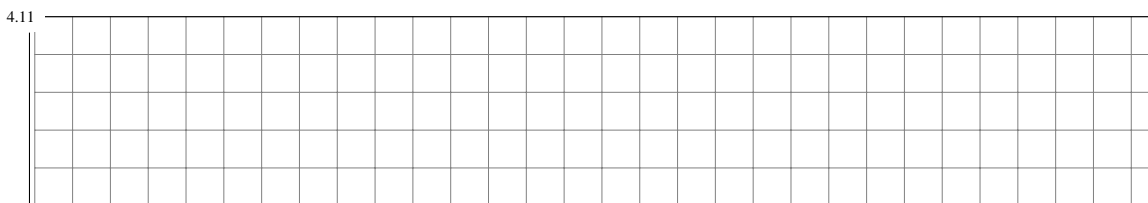
und vergleichen Steuerung und Regelung miteinander.

- Steuerung, stationäre Abweichung $e_{ol,s}$:



Eine Störung $w \neq 0$ führt somit bei einer Steuerung unabhängig von der Wahl von k_p immer zu einer stationären Abweichung $e_{ol,s} \neq 0$.

- Regelung, stationäre Regelabweichung $e_{cl,s}$:



Mit einer Regelung lässt sich somit bei geeigneter Wahl von k_p die Auswirkung der Störung vermindern.

Zeigen Sie, falls der Referenzeingang ein Sprung mit der Amplitude A ist, dann wird der stationäre Fehler zu Null.

4.16

4.2 Der klassische PID-Regler

Der klassische PID-Regler wurde ursprünglich durch Versuch und Irrtum entwickelt. Man begann mit einer einfachen proportionalen Rückführung. Anschließend stellten die Ingenieure schnell fest, dass mit der Rückführung des integrierten Fehlers der Bias eliminiert werden konnte. In vielen Fällen war dann allerdings die Dynamik zu langsam, so dass ein „vorausschauender“ Term basierend auf der Ableitung hinzugefügt wurde. Das Ergebnis wird PID-Regler genannt und hat die Übertragungsfunktion

$$D_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s, \tag{4.1}$$

wobei k_P der Proportional-Term, k_I/s der Integral-Term und $k_D s$ der Ableitungs-Term ist.

Wir betrachten im Folgenden die Strecke

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2}, \tag{4.2}$$

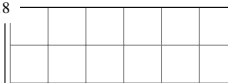
die sich zum Beispiel für einen Motor mit nicht vernachlässigbarer Induktivität ergibt. Der geschlossene Regelkreis hat mit dem Regler $D_c(s)$ und idealem Sensor ohne Störung $V(s) = 0$ die Übertragungsfunktion

$$Y(s) = \frac{AD_c(s)R(s) + AW(s)}{s^2 + a_2 s + a_2 + AD_c(s)} \tag{4.3}$$

4.2.1 Proportionale Regelung (P-Regler)

Beim P-Regler ist das Rückführungs-Signal proportional zur Regelabweichung $u(t) = k_P e(t)$. Das bedeutet, dass die Stellgröße $u(t)$ unmittelbar von der Regelabweichung $e(t)$ abhängt. Aus Gleichung 4.3 ergibt sich die charakteristische Gleichung zu

4.17

Es lässt sich nur der konstante Term  beeinflussen, der die natürliche Frequenz bestimmt. Der Dämpfungsterm lässt sich nicht beeinflussen, weil er unabhängig von k_P ist. Abbildung 4.3 zeigt für die Streckenparameter $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1$ und $A = 1$ die Sprungantworten mit $r = \varepsilon(t)$, $k_P = 1.5$ und $k_P = 6$.

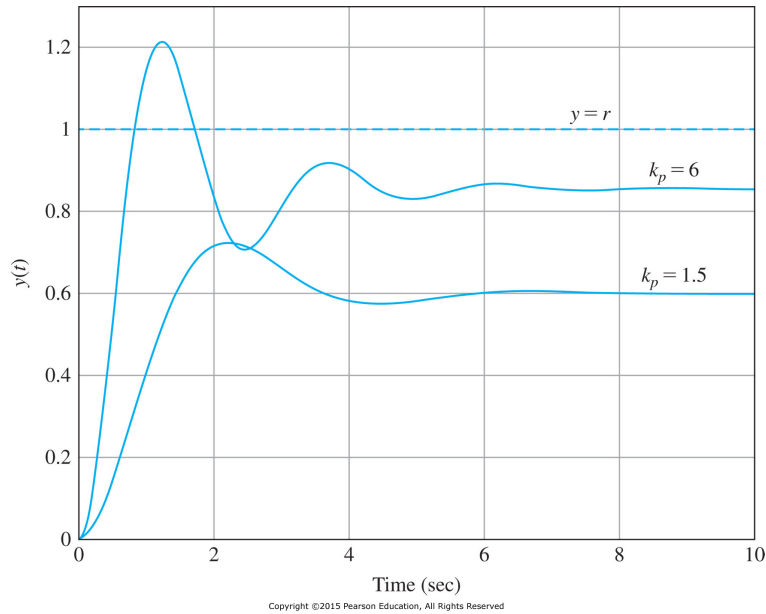


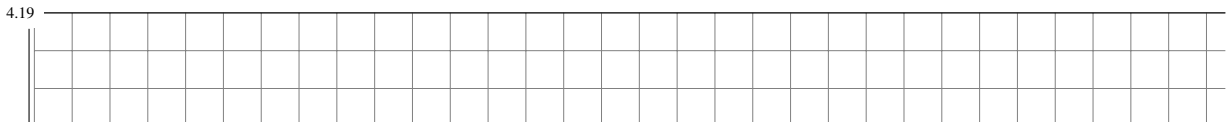
Abbildung 4.3: Darstellung der stationären Regelabweichung und der Wirkung von verschiedenen proportionalen Verstärkungsfaktoren auf die Dämpfung, [FPE15, Figure 4.7].

4.2.2 Integrale Regelung (I-Regler)

Beim I-Regler ist das Rückführungs-Signal proportional zum Integral der Regelabweichung

$$u(t) = k_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \quad (4.4)$$

Die Abbildung 4.4 zeigt, dass das Regelsignal $u(t)$ zu jedem Zeitpunkt proportional zur Fläche unter der Regelabweichung $e(t)$ ist. Aus Gleichung(4.4) folgt die Übertragungsfunktion des Reglers:



Der I-Regler hat bei konstanter Anregung (das bedeutet, für $s = 0$) also eine unendliche Verstärkung. Der I-Regler hat den Vorteil, dass mit einem endlichen Wert für die Regelgröße der Fehler Null sein kann. Der Grund ist, dass $u(t)$ eine Funktion aller vergangenen Werte von $e(t)$ ist und nicht nur vom aktuellen Wert abhängt, wie der P-Regler.

Im Folgenden klären wir die Frage, welche stationären Werte sich für $y(t)$, $e(t)$ und $u(t)$ ergeben, wenn das System mit dem Einheitssprung $r(t) = \varepsilon(t)$ angeregt wird. Hierfür bestimmen wir allgemein die entsprechenden Übertragungsfunktionen und dann die gesuchten stationären Werte. Für $E(s)/R(s)$ gilt mit Lücke 4.2

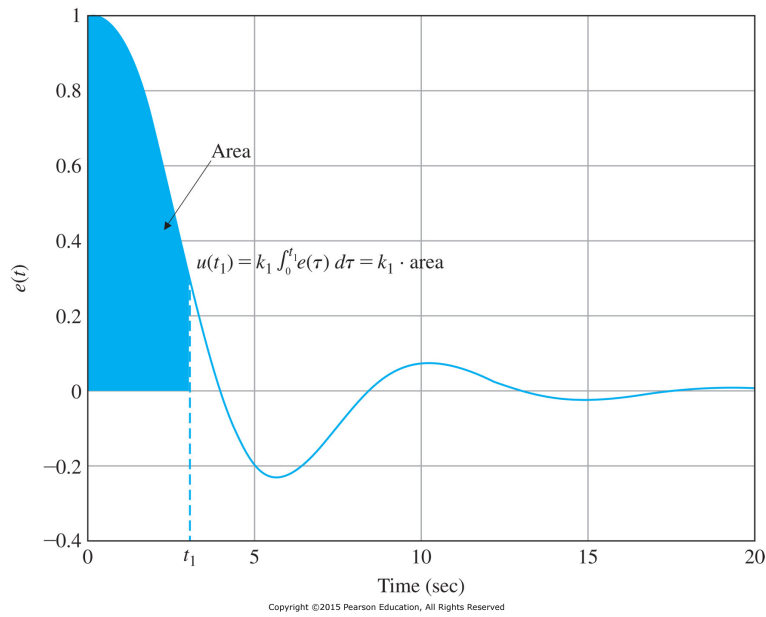
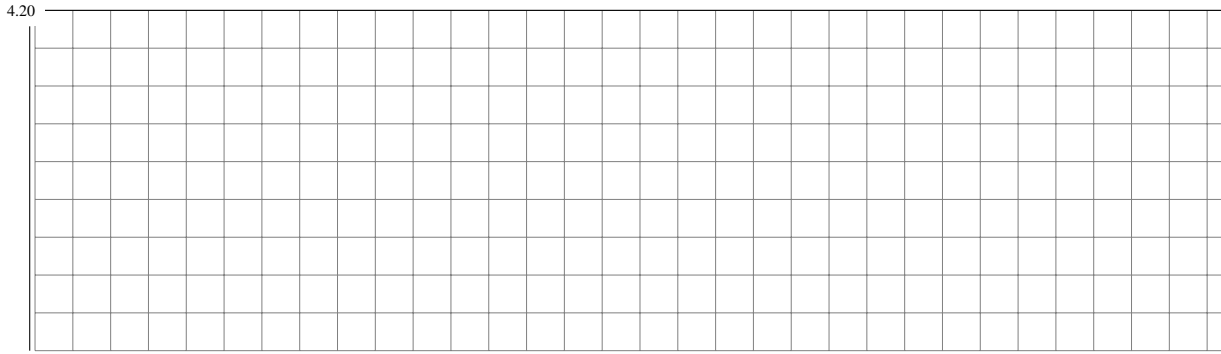
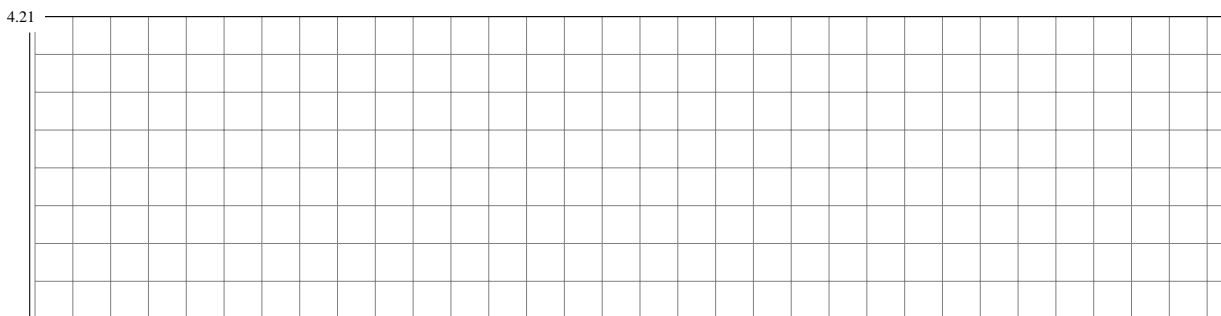
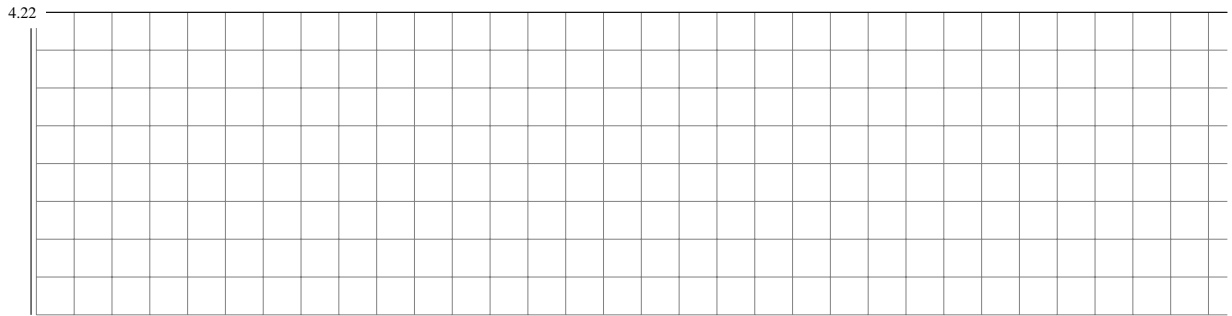


Abbildung 4.4: Der I-Regler basiert auf der Historie der Regelabweichung, [FPE15, Figure 4.8]

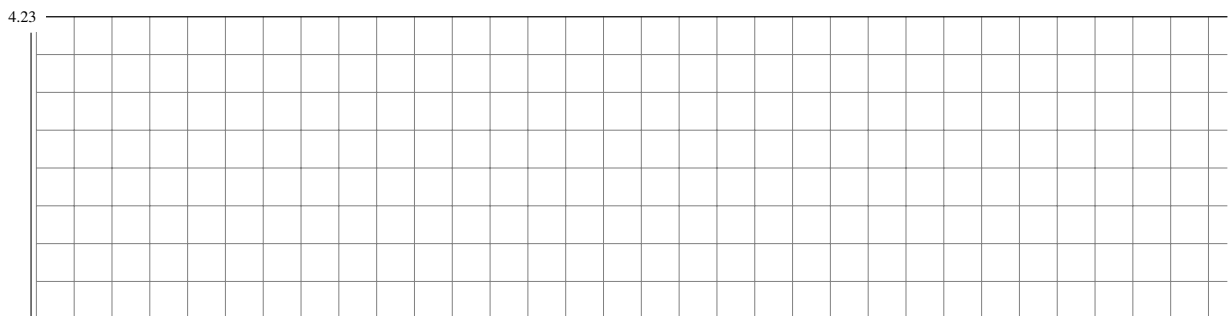
Für $Y(s)/R(s)$ gilt:



Für $U(s)/R(s)$ gilt



Für die stationären Werte der Sprungantwort, also dem Eingang $r(t) = \varepsilon(t)$, $R(s) = 1/s$, ergibt sich mit den gleichen Parametern wie im vorigen Kapitels 4.2.1, also $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1$ und $A = 1$ und damit $G(0) = 1$:



Auswirkung der Störung $W(s)$ auf $Y(s)$ und $U(S)$:

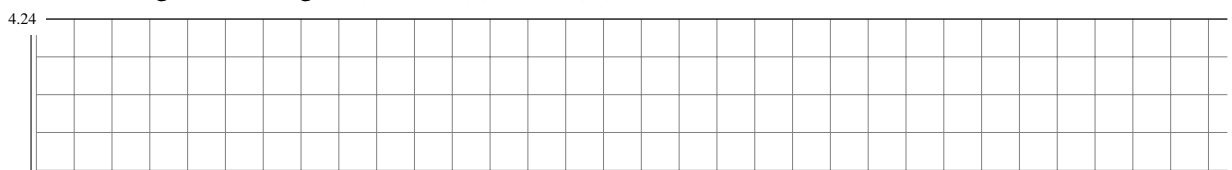


Abbildung 4.5 zeigt den Verlauf des Systemausgang sowie den Regelaufwand bei Anregung des Systems mit den Parametern $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1$, $A = 1$ und dem Einheitssprung $\varepsilon(t)$.

4.2.3 Differenzierende Regelung (D-Regler)

Der letzte Term des klassischen Reglers ist die differenzielle Rückführung. Das Ziel ist es, sowohl die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu verbessern, als auch das Einschwingverhalten zu beschleunigen und Überschwingweite zu vermindern. Die Rückführung ist proportional zur Änderung der Regelabweichung: $u(t) = \dot{e}(t)$. Der D-Regler wird niemals allein genutzt, weil er bei konstantem $e(t)$ gleich Null ist und somit den Fehler nicht verringern kann. Üblicherweise erweitert er einen P- oder PI-Regler.

Ein wichtiger Effekt des D-Anteils ist, dass er eine scharfe Antwort auf plötzlich ändernde Signale gibt. Deswegen wird häufig der D-Anteil in die Rückführung eingebaut, wie in Abbildung 4.6(a) gezeigt, um eine übermäßige Reaktion auf einen Sprung am Eingang zu vermeiden. Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ist die gleiche, wie wenn der D-Anteil im Vorwärtspfad – nach Gleichung 4.1 und in Abbildung 4.6 – ist. Der Unterschied liegt in den Nullstellen: Wenn der D-Anteil in der Rückführung liegt, dann wird der Referenzeingang nicht abgeleitet, wodurch die unerwünschte Antwort auf plötzliche Änderungen herrührt.

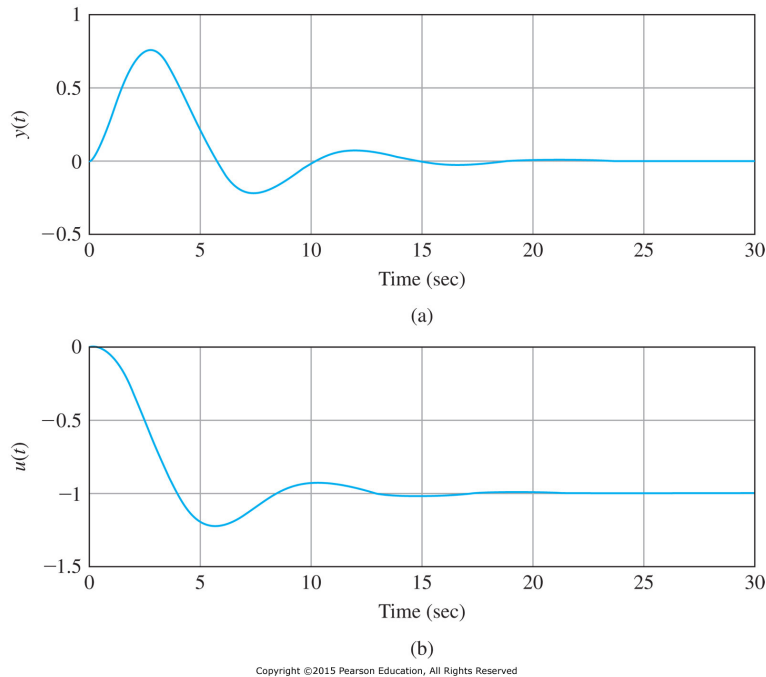


Abbildung 4.5: Illustration der Ausregelung von konstanten Störungen: (a) Ausgang; (b) Regelaufwand, [FPE15, Figure 4.9]

4.2.4 Proportionale plus Integrale Regelung (PI-Regler)

Man fügt einen I-Anteil zum P-Regler dazu, um die stationäre Regelabweichung zu eliminieren. Das ergibt dann die Regelgleichung für den PI-Regler

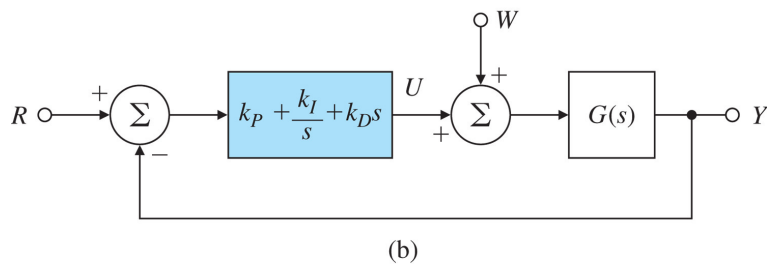
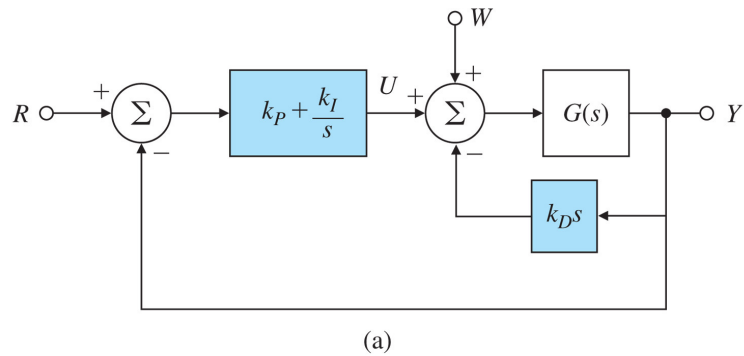
$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0} e(\tau) d\tau$$

4.2.5 PID-Regler

Alle drei Anteile zusammen ergeben den PID-Regler mit der Regelgleichung (4.1) im Bildbereich. Im Zeitbereich ist sie somit

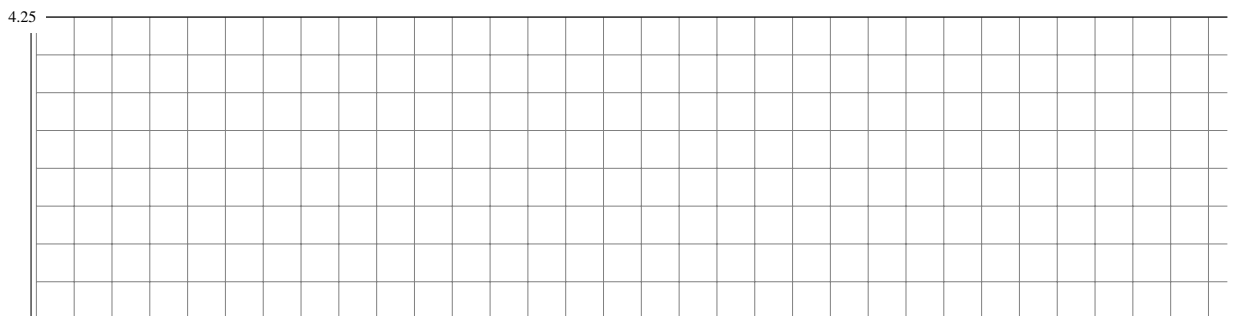
$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0} e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t)$$

Die Wirkung des PID-Reglers lässt sich mit der Strecke in Gleichung (4.2) zeigen. In diesem Fall folgt für die charakteristische Gleichung $1 + GD_c = 0$:



Copyright © 2015 Pearson Education, All Rights Reserved

Abbildung 4.6: Blockdiagramm des PID-Reglers: (a) mit dem D-Anteil in der Rückführung; (b) mit dem D-Anteil im Vorwärtspfad, [FPE15, Figure 4.10]



Der Punkt hier ist: Für ein System 2. Ordnung lassen sich mit den Parametern k_p , k_I und k_D alle Pole des geschlossenen Regelkreises unabhängig voneinander wählen.

4.3 Stabilitätskriterium nach Routh / Hurwitz¹

Das Problem ist die Bestimmung aller Wurzeln eines Polynoms. Polynome 3. und 4. Ordnung lassen sich noch algebraisch lösen, für Polynome höherer Ordnung bewies Galois ca. 1830, dass keine allgemeine Formel zur Lösung existiert. Um die Stabilität zu bestimmen, müssen die Pole des charakteristischen Polynoms nicht bekannt sein, sondern nur, ob alle in der linken Halbebene liegen. Das lässt sich mit der hier vorgestellten Methode von Routh (1874) oder der äquivalenten Methode von Hurwitz (1895) feststellen.

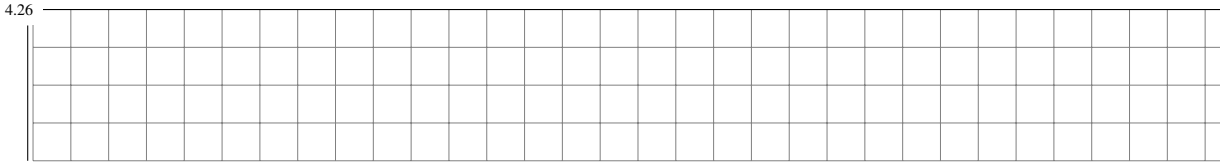
¹Siehe [FPE15, Kapitel 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3]

Charakteristisches Polynom, so normiert, dass der Koeffizient für das Element höchster Ordnung gleich eins ist:

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \tag{4.5}$$

Notwendige Bedingung für Stabilität: $a_i > 0$

Begründung:



Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, es gibt also Systeme, die die Bedingung erfüllen und trotzdem Pole in der rechten Halbebene haben. Routh hat folgendes Tableau zur Beurteilung der Stabilität entwickelt:

n	s^n	1	a_2	a_4	\dots	mit	$b_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}$
$n-1$	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	\dots		$b_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{pmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}$
$n-2$	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots		$b_3 = -\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{pmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1}$
$n-3$	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots		$c_1 = -\frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			$c_2 = -\frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$
2	s^2	*	*				$c_3 = -\frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{pmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$
1	s^1	*					
0	s^0	*					

Routh's Stabilitätskriterium:

- Alle Wurzeln eines Polynoms sind dann und nur dann in der *offenen* LHE, wenn alle Elemente der ersten Spalte positiv sind.
- Die Anzahl der Wurzeln in der *geschlossenen* RHE ist gleich der Anzahl der Vorzeichenänderungen in der ersten Spalte.
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, ersetze das Element durch $\epsilon > 0$ und setze fort. Wende das Stabilitätskriterium an für $\epsilon \rightarrow 0_+$

4 Erste Analyse des Regelkreises

Beispiel

Das Polynom

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

erfüllt die notwendige Bedingung $a_i > 0$. Wieviele Pole liegen in der geschlossenen RHE? Lösung mit Hilfe des Routh-Tableaus:

4.27

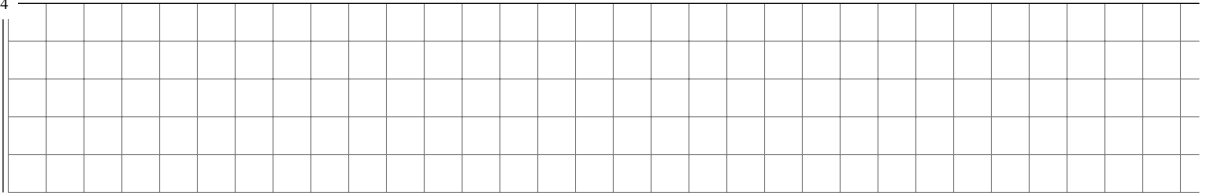


Das Polynom hat somit zwei Wurzeln in der geschlossenen RHE, weil es in der ersten Spalte zwei Vorzeichenwechsel gibt.

5 Wurzelortskurve

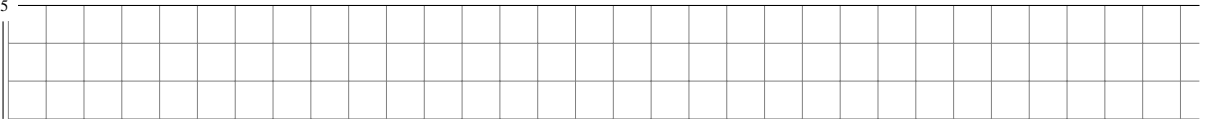
Der Graph aller möglichen Lösungen der Gleichung in Lücke 5.3 heißt *Wurzelortskurve*. Wir gehen davon aus, dass die Übertragungsfunktion $L(s)$ eine rationale Funktion ist, deren Zähler ein monisches² Polynom $b(s)$ vom Grad m und deren Nenner ein monisches Polynom $a(s)$ vom Grad n ist, so dass $n \geq m$. Das bedeutet, $m =$ Anzahl der Nullstellen und $n =$ Anzahl der Pole. Diese Polynome können wir faktorisieren als

5.4

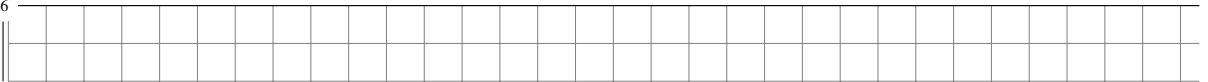


Hilfreich für die weiteren Betrachtungen werden die folgenden drei äquivalenten Gleichungen sein, die alle dieselben Wurzeln wie die Gleichung in Lücke 5.3 haben:

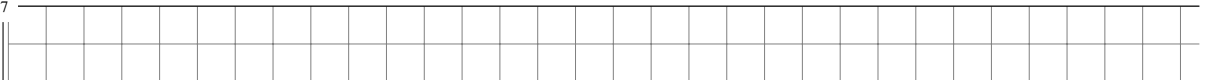
5.5



5.6

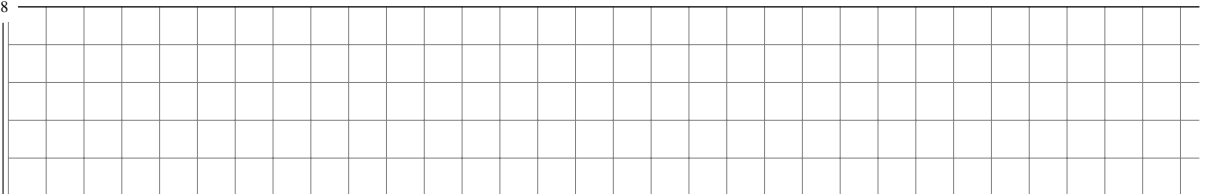


5.7



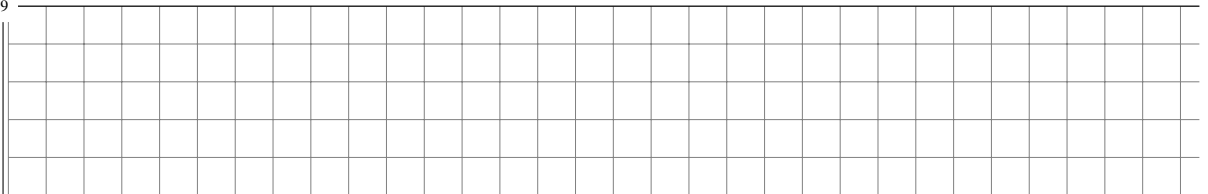
Aus Lücke 5.4 und 5.3 folgt

5.8



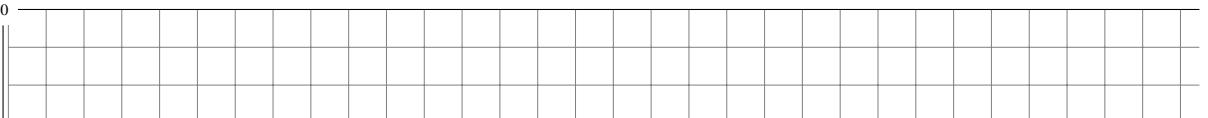
Die komplexe Gleichung in Lücke 5.8 lässt sich in zwei reelle Gleichungen zerlegen; nämlich in die Betragsbedingung

5.9



und in die Phasenbedingung: Aus Lücke 5.7 folgt mit $\psi_i = \angle(s - z_i)$ und $\phi_i = \angle(s - p_i)$

5.10



Die Phasenbedingung enthält den Parameter K nicht. Die Menge der Lösungen in Lücke 5.10 ist in der s -Ebene die im Allgemeinen aus mehreren Zweigen bestehende Wurzelortskurve. Diese lässt sich somit

²Monisch bedeutet, dass der Koeffizient des s mit dem größten Exponenten 1 ist.

auch wie folgt definieren:

Die Gesamtheit aller komplexen Zahlen s , die die Phasenbedingung in Lücke 5.10 erfüllen, heißt *Wurzelortskurve*. Jedem Punkt der WOK wird durch die Betragsbedingung in Lücke 5.9 ein Wert des Parameters K zugeordnet.

Anschaulich formuliert besteht die Wurzelortskurve aus mehreren Zweigen in der s -Ebene, längs denen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in Lücke 5.3 wandern, wenn man den Parameter K stetig von 0 bis ∞ variiert. Darum gilt auch

Die Wurzelortskurve ist der geometrische Ort aller Pole des geschlossenen Regelkreises.

Der Parameter K ist in der Regel ein *Verstärkungsfaktor* (oder eine proportionale Größe). Es lassen sich aber auch andere Größen zu Parametern von Wurzelortskurven machen. Wesentlich ist nur, dass K *reell* ist.

5.1.1 Beispiel: Wurzelortskurve für eine Motor-Positionsregelung bestimmen [FPE15, Example 5.1]

Die normalisierte Übertragungsfunktion Spannung V -zu-Position Θ_m eines Gleichstrommotors ist

$$\frac{\Theta_m(s)}{V(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A}{s(s+c)}$$

Bestimmen Sie die die Wurzelortskurve der Pole des Regelkreises, der sich ergibt, wenn Sie den Ausgang Θ_m in Abhängigkeit vom Parameter A gemäß Abbildung 5.1 zurückführen, wobei $D_c(s) = H(s) = 1$ und $c = 1$ sei.

Lösung. In Form unserer Notation sind die Werte

5.11

Aus Lücke 5.6: Die Wurzelortskurve ist der Graph der Wurzeln der quadratischen Gleichung

5.12

Die Lösung der quadratischen Gleichung ist

5.13

Abbildung 5.2 zeigt die Wurzelortskurve. Für $0 \leq K \leq 1/4$ sind die Wurzeln zwischen -1 und 0 . Bei $K = 1/4$ sind zwei Wurzeln bei $-1/2$ und für $K > 1/4$ werden die Wurzeln komplex mit einem konstanten Realteil bei $-1/2$ und Imaginärteilen, die im Wesentlichen proportional zur Quadratwurzel von K sind. Die gestrichelten Linien in Abbildung 5.2 korrespondieren zu Wurzeln mit einem Dämpfungsmaß von $\zeta = 0.5$. Die Pole von $L(s)$ bei $s = 0$ und $s = -1$ sind mit dem Symbol \times und die Punkte, wo die WOK

die gestrichelten Linien kreuzt sind mit Punkten (•) markiert. Wir können K an dem Kreuzungspunkt berechnen, weil wir wissen, dass wenn $\zeta = 0.5$ ist, dann ist $\Theta = 30^\circ$ und der Betrag des Imaginärteils ist das $\tan 30^\circ = \sqrt{3}$ -fache des Realteils. Weil der Betrag des Realteils $1/2$ ist, ergibt sich aus Lücke 5.13

5.14

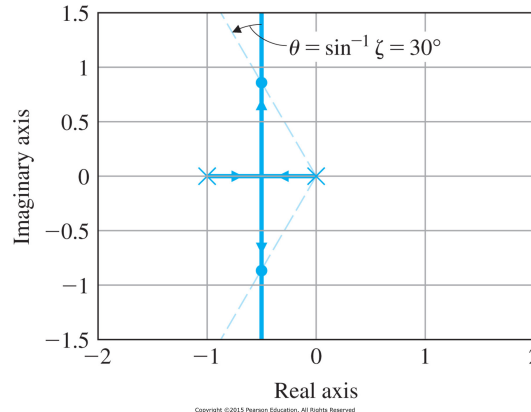
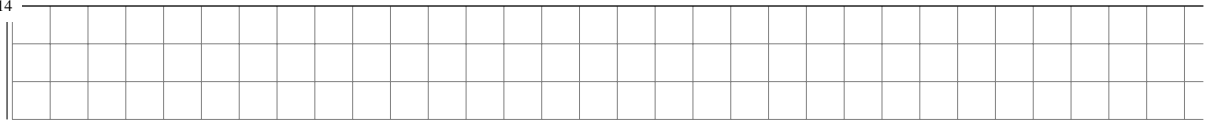


Abbildung 5.2: Wurzelortskurve für $L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, [FPE15, Figure 5.2]

Fazit. Wir können verschiedene Eigenschaften dieser einfachen Wurzelortskurve beobachten.

1. Es gibt zwei Wurzeln und damit zwei Wurzelorte, die wir *Zweige* der Wurzelortskurve nennen.
2. Bei $K = 0$ beginnen diese Zweige bei den Polen von $L(s)$ (die bei 0 und -1 liegen).
3. Bei Vergrößern von K wandern die Wurzeln aufeinander zu, verschmelzen im *Verzweigungspunkt* (engl. *breakaway point*) $-1/2$ und zweigen in diesem Punkt von der Realteil-Achse ab.
4. Nach dem Verzweigungspunkt bewegen sich die Wurzeln Richtung $\pm j\infty$ mit gleichem Realteil, so dass die Summe der beiden Pole immer -1 ergibt.

Wenn es Punkte auf der Wurzelortskurve gibt, die zu einem befriedigenden Einschwingverhalten korrespondieren, können wir die Reglerdesignaufgabe abschließen, indem wir den korrespondierenden Wert für K wählen. Andernfalls müssen wir einen komplexeren Regler in Betracht ziehen. Wie bereits erwähnt lässt sich die WOK-Methode auf beliebige Parameter anwenden, die linear in die charakteristische Gleichung eingehen.

5.1.2 Beispiel: Wurzelortskurve bezüglich eines Strecken-Pols [FPE15, Example 5.2]

Wir nehmen wieder die Strecke der vorherigen Aufgabe, wieder mit $D_c(s) = H(s) = 1$, nur diesmal sei $A = 1$ und c der interessierende Parameter in der charakteristischen Gleichung $1 + G(s) = 1 + \frac{1}{s(s+c)} = 0$ ergibt. Bestimmen Sie die Wurzelortskurve in Abhängigkeit von c .

Lösung Die korrespondierende charakteristische Gleichung in polynomialer Form ist

5.15

--

Sie lässt sich direkt verwenden, wenn wir die Gleichung mit folgenden Definitionen umstellen:

5.16

--

Damit ist die Wurzelortskurve-Form der charakteristischen Gleichung

5.17

--

Die quadratische Gleichung lässt sich wieder leicht lösen:

5.18

--

Abbildung 5.3 zeigt die Wurzelortskurve, wobei die Pole wieder durch ×-e und die die Nullstelle durch einen Kreis (○) markiert sind. Für $c = 0$ sind die ×-e auf der imaginären Achse und die Systemantwort wäre oszillatorisch. Das Dämpfungsmaß ζ wächst mit wachsendem c . Bei $c = 1$ sind zwei Wurzeln bei $s = -1$, wo die beiden Zweige abrupt die Richtung wechseln und sich in entgegengesetzten Richtungen entlang der realen Achse bewegen. Dieser Punkt, wo zwei oder mehr Wurzeln in die reale Achse zusammenkommen, heißt im Deutschen ebenfalls *Verzweigungspunkt* (engl. *break-in point*).

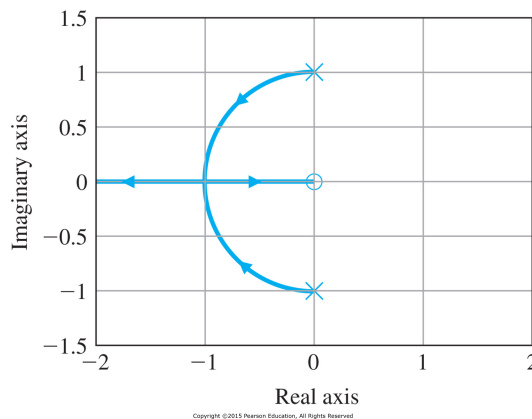


Abbildung 5.3: Wurzelortskurve bezüglich c für $1 + G(s) = 1 + \frac{1}{s(s+c)}$, [FPE15, Figure 5.3]

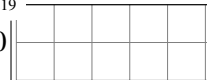
Fazit. Die berechnung der Wurzelortskurve für quadratische Gleichungen ist einfach. Für charakteristische Gleichungen höherer Ordnung lässt sie sich mit den Konstruktionsregeln des folgenden Kapitels konstruieren.

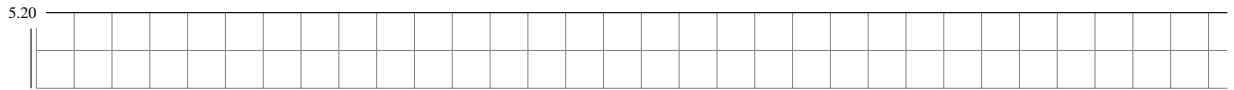
5.2 Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven

Zwar lassen sich bei Systemen höherer Ordnung die Wurzelortskurven im Allgemeinen nicht exakt analytisch ermitteln, jedoch gibt es eine Reihe wichtiger Eigenschaften und Kenngrößen der Wurzelortskurven, deren Kenntnis ein guter Anhaltspunkt für eine Skizze des prinzipiellen Verlaufs der Wurzelortskurven darstellt. Im Folgenden wird von realisierbaren Systemen, also $n > m$, ausgegangen. Die Regeln werden wir erläutern, indem wir die ersten vier Regeln beispielhaft auf

$$L(s) = \frac{1}{s[(s + 4)^2 + 16]} \tag{5.1}$$

und die weiteren Regeln auf das Beispiel in Kapitel 5.1.2 anwenden.

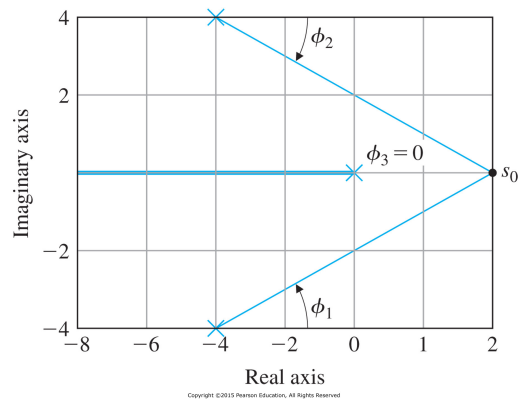
REGEL 1 Die n Zweige der Wurzelortskurve *beginnen* in den *Polen* von $L(s)$ und m dieser Zweige *enden* in den *Nullstellen* von $L(s)$. Aus Lücke 5.6 folgt mit $K = 0$  Die Pole $s = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sind also die *Anfangspunkte* der Wurzelortskurve. Wenn K gegen Unendlich geht, muss s eine von folgenden Bedingungen erfüllen:



Die Nullstellen $s = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sind also m *Endpunkte* der WOK. Außerdem laufen $n - m$ Zweige der WOK zum *unendlich fernen Punkt*, siehe REGEL 3. (Der Punkt $s = \infty$ ist eine $n - m$ -fache Nullstelle von $KL(s)$. Nach dieser Definition hat $KL(s)$ ebensoviele Nullstellen wie Pole.)

REGEL 2 Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann ein *Punkt der Wurzelortskurve*, wenn die Summe aller reellen Nullstellen und Pole des offenen Kreises, die *rechts* vom betrachteten Punkt liegen, *ungerade* ist.

Betrachten wir einen reellen Testpunkt, wie zum Beispiel s_0 in nebenstehender Abbildung, dann sehen wir, dass die Winkel von konjugiert komplexen Pol- oder Nullstellenpaaren auf der linken Seite der Phasenbedingung in Lücke 5.10 sich paarweise kompensieren. Die Winkel von reellen Polen und Nullstellen sind Null, wenn der Testpunkt s_0 *rechts* und 180° wenn der Testpunkt *links* von reellen Polen und Nullstellen liegt. Damit sich in Summe der erforderliche Winkel $180^\circ + 360^\circ(l - 1)$ (siehe Lücke 5.10) ergibt, muss also der Testpunkt links von einer ungeraden Anzahl von reellen Polen und Nullstellen liegen.



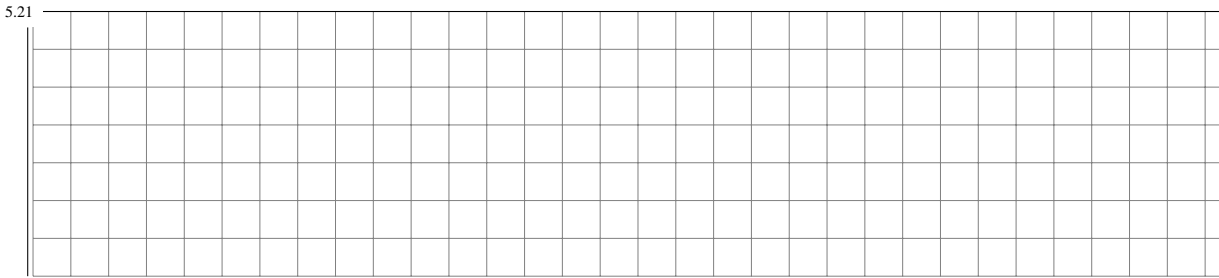
[FPE15, Figure 5.5]

REGEL 3 Für große s und K haben $n - m$ Zweige *Asymptoten* mit den Winkeln ϕ_ℓ , die sternförmig von dem Pol Schwerpunkt $s = \alpha$ auf der reellen Achse ausgehen:

$$\phi_\ell = \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m} \quad \ell = 1, 2, \dots, n - m$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

Herleitung siehe Anhang A.2 und [FPE15, Kapitel 5.2.1]. Für Gleichung 5.1 ergibt sich



Die Asymptoten bei $\pm 60^\circ$ sind in Abbildung 5.4 gestrichelt dargestellt. Beachten Sie, dass die Asymptoten die imaginäre Achse bei $\pm 2.67j\sqrt{3} = \pm 4.62j$ schneiden. Die Asymptote bei 180° haben wir bereits mit REGEL 2 gefunden.

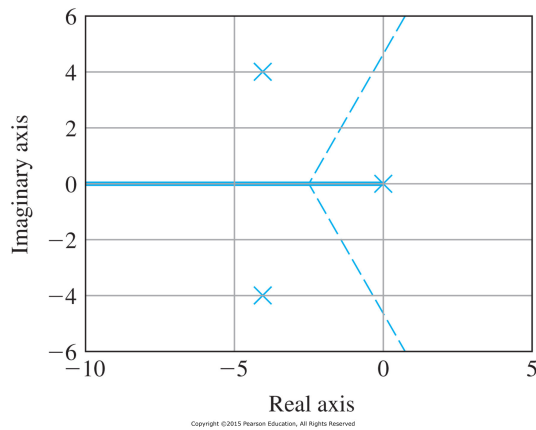


Abbildung 5.4: Die Asymptoten sind $n - m$ radiale Linien, ausgehend von α mit gleichen Winkeln zur jeweils benachbarten Asymptote, [FPE15, Figure 5.6].

REGEL 4 q Zweige beginnen in q -fachen Polen unter den Winkeln

$$q \cdot \phi_{\ell, \text{beg}} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq \ell, \text{beg}} \phi_i - 180^\circ - 360^\circ(\ell - 1), \ell = 1, \dots, q$$

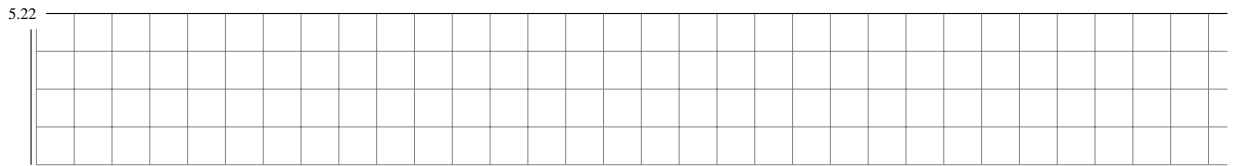
und q Zweige enden in q -fachen Nullstellen unter den Winkeln

$$q \cdot \psi_{\ell, \text{end}} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq \ell, \text{end}} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ(\ell - 1), \ell = 1, \dots, q$$

Herleitung siehe [FPE15, Kap. 5.2.1.] Diese Regel kommt von der Phasenbedingung in Lücke 5.10. Um den Winkel zu berechnen, unter dem ein Zweig aus dem Pol startet, betrachten wir einen Testpunkt s_0 auf der Wurzelortskurve ganz nahe beim fraglichen Pol, definieren den Winkel von diesem Pol zum Testpunkt als ϕ_1 und stellen die Phasenbedingung um, so dass die restlichen Terme auf der rechten Seite sind. Wir nehmen einen Testpunkt s_0 in der Nähe des Pols bei $-4 + 4j$ unseres Beispiels und berechnen den Winkel von $L(s_0)$. Die Situation ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Wir definieren den Winkel von $-4 + 4j$ zum Testpunkt als ϕ_1 . Wir wählen den Testpunkt nahe genug zum Pol, so dass die Winkel ϕ_2 und ϕ_3 zum Testpunkt als gleich angenommen werden können wie zum Pol. Das bedeutet, dass sich

5 Wurzelortskurve

$\phi_2 = 90^\circ$, $\phi_3 = 135^\circ$ und ϕ_1 aus der Phasenbedingung berechnen lassen. Somit folgt



Wegen der konjugiert komplexen Symmetrie der Graphen ist der Startwinkel des Zweiges beim Pol $-4 - j + 45^\circ$. Die Regeln bis hierher genügen, um die vollständige Wurzelortskurve für das Beispiel zu

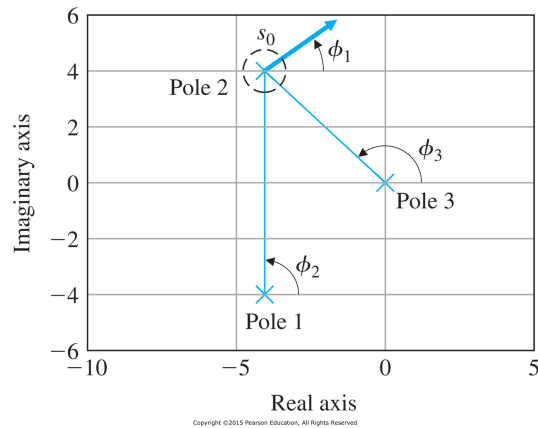


Abbildung 5.5: Die Start- und Endwinkel lassen sich bestimmen, indem man die nahe Umgebung eines Pols oder einer Nullstelle betrachtet, [FPE15, Figure 5.7].

zeichnen, siehe Abbildung 5.6. Wie man sehen kann, besitzt die Wurzelortskurve keine Verzweigungspunkte, die sich mit den folgenden beiden Regeln bestimmen lassen.

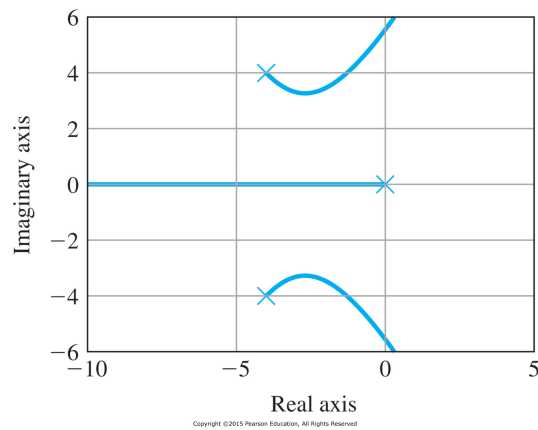


Abbildung 5.6: Wurzelortskurve für Gleichung (5.1), [FPE15, Figure 5.8]

REGEL 5 Die q Zweige der Wok nähern sich einem q -fachen *Verzweigungspunkt* separiert durch Winkel

von

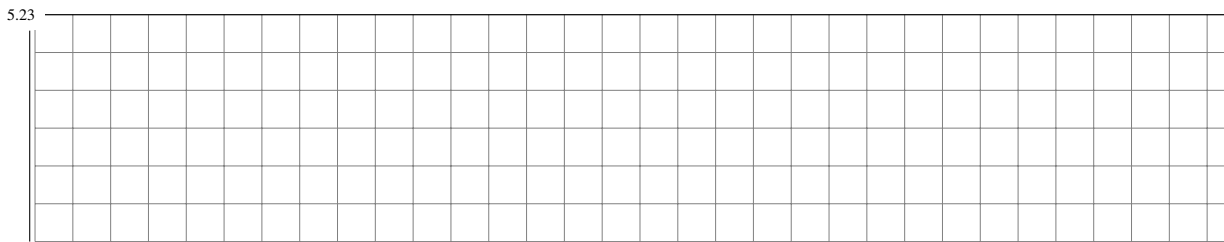
$$\frac{180^\circ + 360^\circ(\ell - 1)}{q}, \ell = 1, 2, \dots, q$$

und verlassen den Punkt mit der gleichen Separation. Es ergibt sich ein Feld von $2q$ gleichverteilten Strahlen, die jeweils einen Winkel von

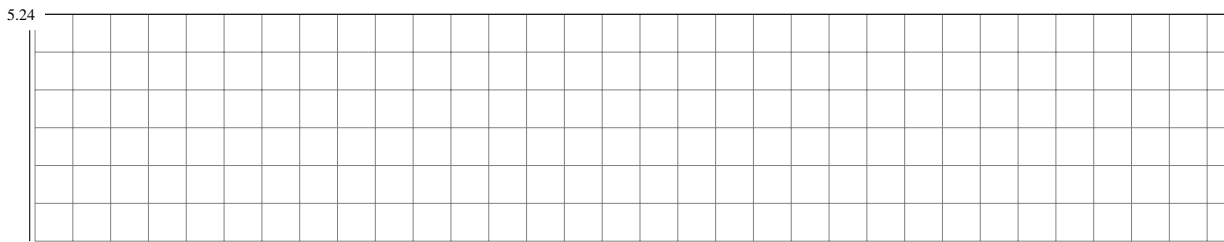
$$\frac{180^\circ}{q}$$

zueinander haben. Herleitung siehe [FPE15, Kap. 5.2.1]. Für das Beispiel in Abbildung 5.3 ist $q = 2$ und die Winkel zwischen benachbarten Kurvenstücken somit 90°

REGEL 6 Die (von den Polen und Nullstellen verschiedenen) *Verzweigungspunkte* sind $q \geq 2$ -fache Nullstellen $(s + r_i)^q$ der charakteristischen Gleichung. Es gilt also



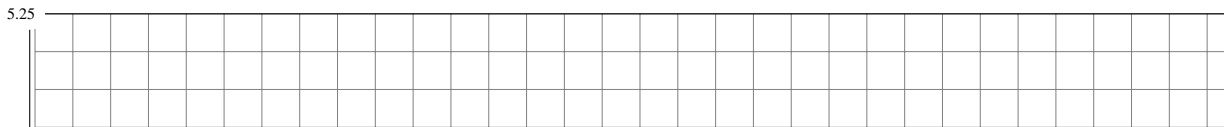
Für die Ableitung ergibt sich mit der Quotientenregel



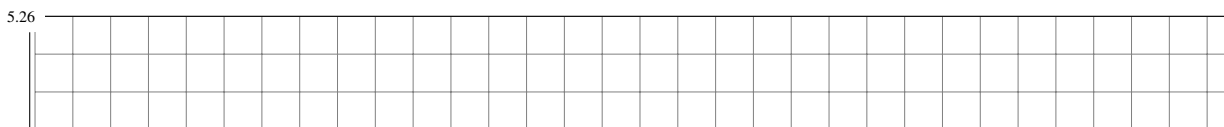
Für die Ableitungen $a'(s)$ und $b'(s)$ lässt sich die Produktregel

$$\frac{d}{ds}((s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\cdots(s - \lambda_k)) = \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (s - \lambda_j)$$

anwenden, so dass sie sich in Lücke 5.24 kürzen lassen. Es ergibt sich damit die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Verzweigungspunkte:



Ist $s_\lambda = \sigma_\lambda + j\omega_\lambda$ komplex, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $s_{\lambda+1} = \bar{s}_\lambda = \sigma_\lambda - j\omega_\lambda$ eine kritische Stelle. Aus den beiden zugehörigen Partialbrüchen ergibt sich dann



6 Bode-Diagramm

6.1 Frequenzgang

Stationäre Antwort eines linearen Systems auf sinusförmigen Eingang.

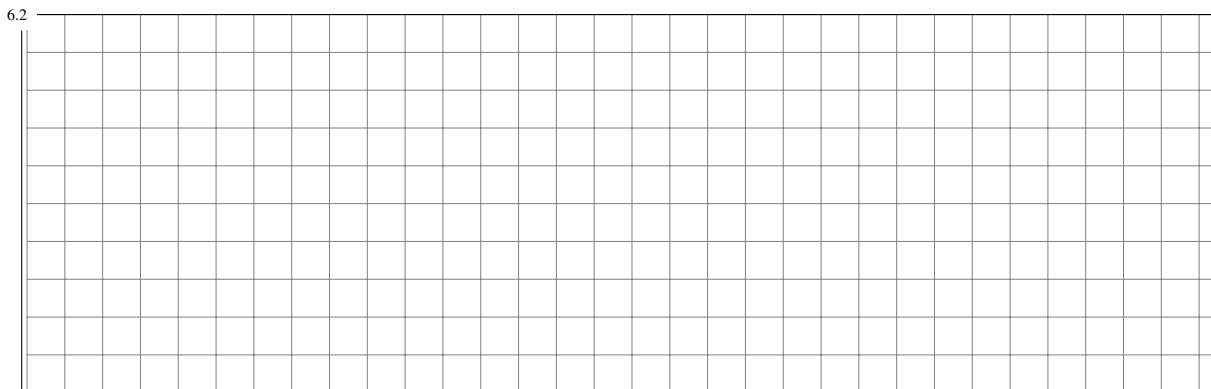
$$\text{Euler: } A \cos \omega t = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$\text{Eingang: } u = e^{j\omega t} \text{ und } u = e^{-j\omega t}$$

Berechnung der Antwort durch Faltung und Superposition:



Das Ergebnis beinhaltet also die komplexe Übertragungsfunktion $H(j\omega)$, die auch in polarer Form mit Betrag und Phase als $H(j\omega) = M(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$, oder einfach $H = Me^{i\varphi}$ dargestellt werden kann. Mit dieser Substitution folgt



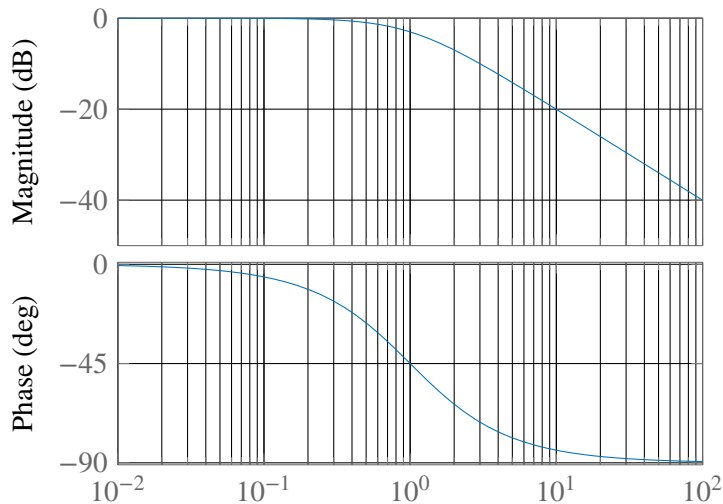
Der Frequenzgang lässt sich auf zwei Arten graphisch darstellen:

- Als Betrag und Phase in Abhängigkeit von $\omega \Rightarrow$ Bode-Diagramm, behandeln wir im Folgenden.
- In der komplexen Ebene \Rightarrow Nyquist-Diagramm, wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

6 Bode-Diagramm

MATLAB[®]-Beispiel für Bode-Plot von $H(s) = \frac{1}{s + \sigma}$ mit $\sigma = 1$:

```
k=1;
numH=1;           % Zähler
denH=[1 k];      % Nenner
sysH=tf(numH,denH) % Definition der Ü-Funktion
w=logspace(-2,2); % 50 Frequenzwerte von 10^-2 bis 10^2
bode(sysH,w);    % Bode-Plot erzeugen
grid            % Gitter
```



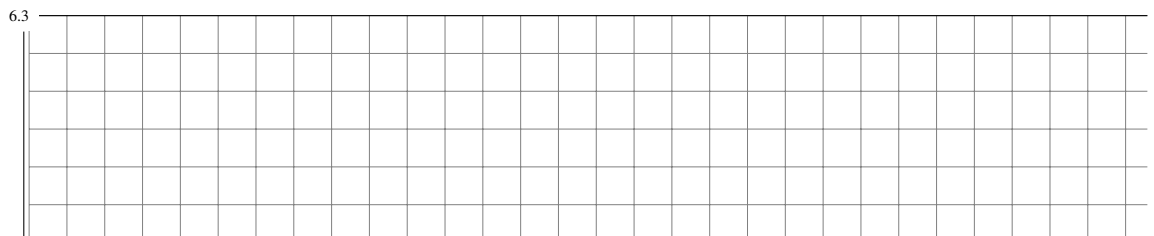
6.2 Vorzüge des Bode-Diagramms

Wie bereits erwähnt gibt es die beiden Darstellungsformen des Frequenzgangs als Nyquist-Diagramm in der komplexen Ebene (in dieser Vorlesung nicht behandelt), oder als *Bode-Diagramm* mit Betrag oder Amplitude¹ (*Magnitude*) $A(\omega) = |G(j\omega)|$ und Phasenwinkel $\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\}$ in Abhängigkeit von der Frequenz. Charakteristisch für das Bode-Diagramm ist, dass

1. die Abszissenachsen (ω -Achsen) sowie die $|G(j\omega)|$ -Achse *logarithmisch* und
2. die $\varphi(\omega)$ -Achse *linear* geteilt sind.

Es wird also $\log A$ über $\log \omega$ und φ über $\log \omega$ aufgetragen. Diese Art der Darstellung des Frequenzgangs hat folgende Vorzüge:

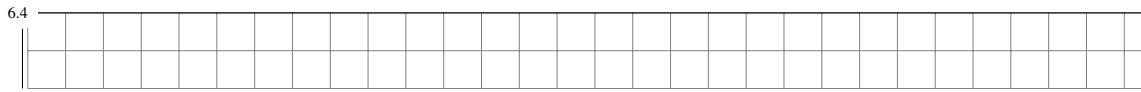
- a) Vereinfachte Berechnung des *Produkts* zweier, oder mehrerer, Frequenzgänge. Begründung: Aus $G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$ folgt



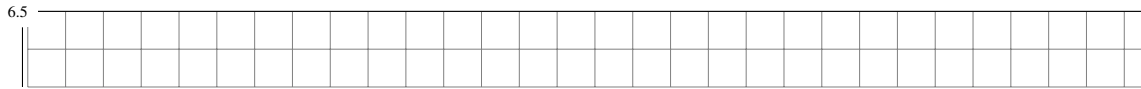
¹Betrag und Amplitude werden in diesem Zusammenhang synonym verwendet.

Somit brauchen bei der Bildung des Gesamtfrequenzganges nur *Strecken* addiert zu werden, sowohl bei $A(\omega)$ als auch bei $\varphi(\omega)$.

b) Vereinfachung der *Inversion* (=Kehrwertbildung) eines Frequenzganges. Wegen



und

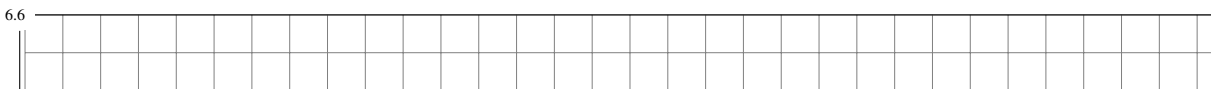


brauchen die Kurven $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ nur an den Achsen $A = 0$ bzw. $\varphi = 0$ *gespiegelt* zu werden.

c) Infolge der gewählten Achsteilungen (doppelt-logarithmisch beziehungsweise einfach-logarithmisch) kann die Kurve $A(\omega)$ in guter Näherung durch einen *Streckenzug* und $\varphi(\omega)$ durch eine *Treppenkurve* dargestellt werden.

d) Bei einer wichtigen Klasse zeitinvarianter linearer Systeme, den sogenannten *Phasenminimumsystemen* besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasengang. Hier lässt sich $\varphi(\omega)$ aus $A(\omega)$ berechnen, so dass man sich bei der messtechnischen Ermittlung des Frequenzganges auf $A(\omega)$ beschränken kann.²

Dezibel. Die logarithmische Betragsgang-Achse lässt sich mit 10er-Potenzen oder in der Einheit Dezibel (Einheitszeichen dB, 10 dB = 1 Bel) beschriften. In Dezibel wird der quadrierte Betrag abgetragen, das bedeutet für die Umrechnung von linear in Dezibel:



6.3 Elementare Übertragungsglieder

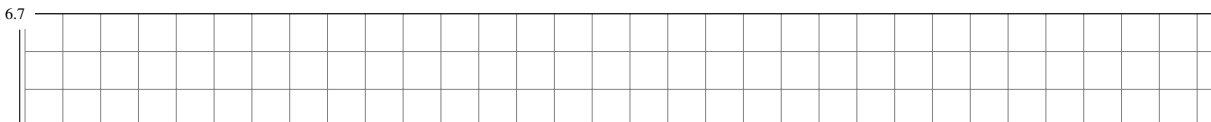
6.3.1 PT₁-Glieder

Die Behauptung c) zeigen wir im Folgenden schrittweise. Zunächst wird dazu ein PT₁-Glieder betrachtet:

$$G(j\omega) = K \frac{1}{\sigma + j\omega} \tag{6.1}$$

Dabei heißt $\omega_E = \sigma$ aus später ersichtlichen Gründen *Eckfrequenz*.

Aus Gleichung 6.1 folgt für Amplitude und Phase

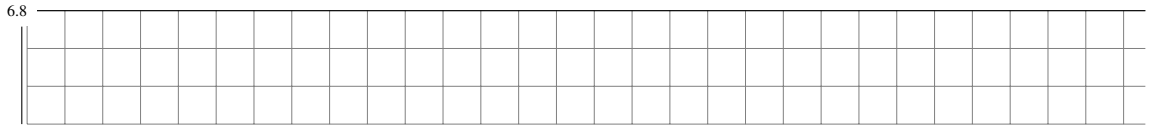


Aus folgenden drei Fällen lassen sich die Anfangs- und Endasymptote sowie deren Schnittpunkt berechnen:

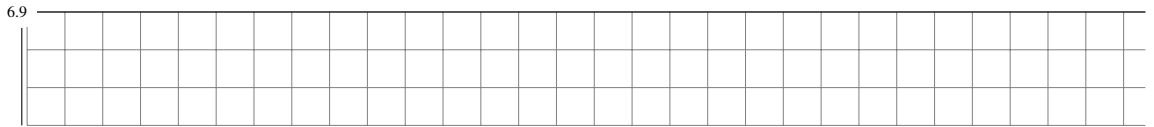
²Diese Eigenschaft ist natürlich *keine* Folge der speziellen Achsteilung.

6 Bode-Diagramm

1. Anfangsasympote:

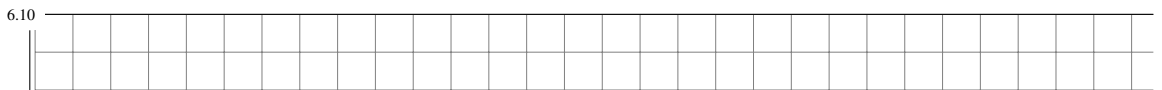


2. Endasympote:

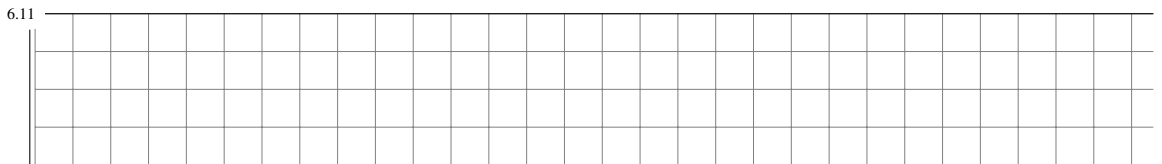


$\log A(\omega)$ hat also die Steigung -1 bzw. $20 \log A(\omega)$ dB die Steigung -20 dB

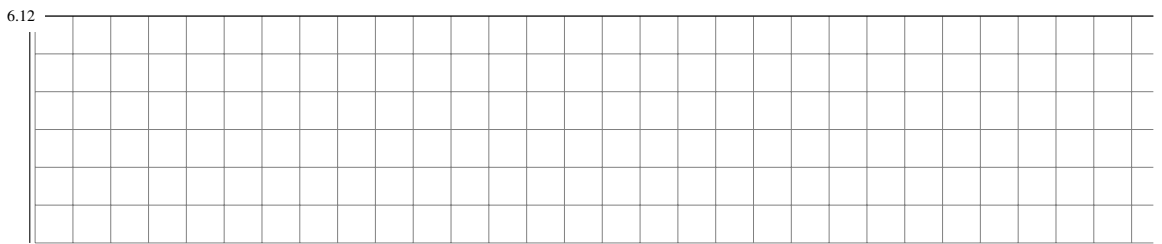
3. Schnittpunkt der beiden Asymptoten von $A(\omega)$:



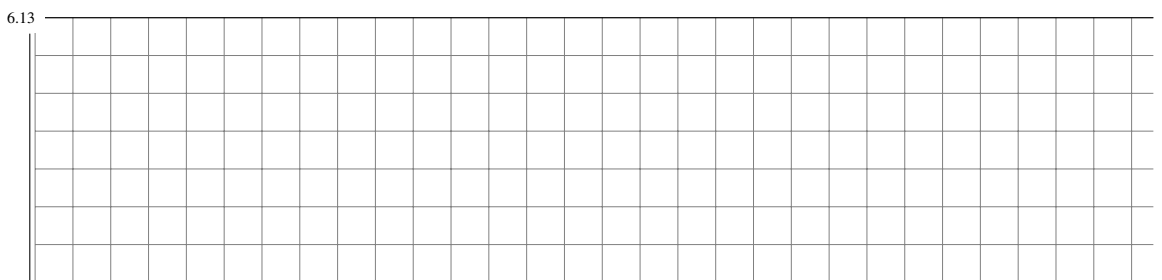
4. Exakte Funktionswerte für $\omega = \omega_E$:



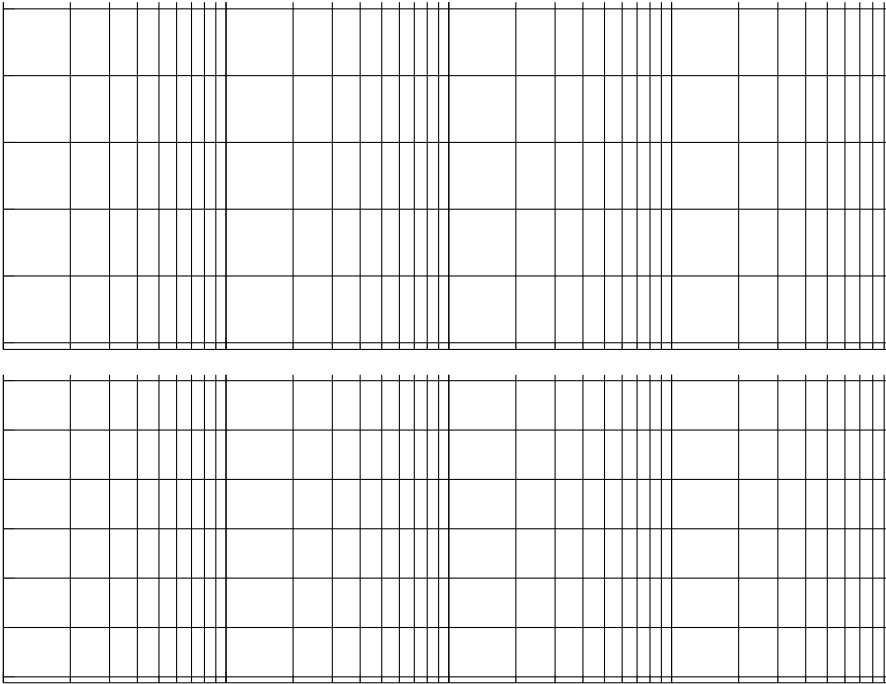
5. Steigung des Phasengangs im Punkt $\omega = \omega_E$: Die logarithmische Teilung bedeutet für die Abszisse $x = \log \omega \Rightarrow \omega = 10^x$. Somit ergibt sich



6. Schnittpunkt der Tangente in $\varphi(\omega_E)$ mit den beiden Asymptoten.



Mit Hilfe der Asymptoten und den Werten für $\omega = \omega_E$ lässt sich das Bode-Diagramm leicht skizzieren. Im Bode-Diagramm wird üblicherweise der Amplitudengang in deziBel, also $|G|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)|$ aufgetragen. Beispiel für $K = 100$ und $\omega_E = \sigma = 10 \text{ s}^{-1}$



6.3.2 PD₁-Glied

Als zweites Beispiel betrachten wir ein *ideales* PD-Glied:

$$G(j\omega) = K(\sigma + j\omega), \omega_E = \sigma$$

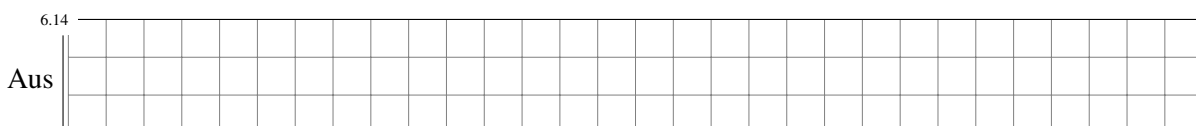
Abgesehen von der Konstanten K ist der Verlauf des Frequenzgangs des PD-Glieds *invers* zum Frequenzgang des PT₁-Glieds. Man erhält die entsprechenden Kurven durch *Spiegelung*, falls die Eckfrequenz ω_E in beiden Fällen gleich ist. Mit den Zahlenwerten $K = 100$ und $\omega_E = 10$ muss die $A(\omega)$ -Kurve an der Geraden $20 \log A(\omega) \text{dB} = 20 \text{ dB}$ und die $\varphi(\omega)$ -Kurve an der Geraden $\varphi(\omega) = 0$ gespiegelt werden.

Somit ist man jetzt in der Lage, Bode-Diagramme für *beliebige rationale* Frequenzgänge zu konstruieren, wenn die zugehörige Übertragungsfunktion *nur reelle Nullstellen* und *Pole* besitzt.

6.3.3 PT₂-Glied

Um Bode-Diagramme für *alle rationalen* Übertragungsfunktionen beziehungsweise Frequenzgänge zeichnen zu können, muss noch der Fall *konjugiert komplexer* Pole oder Nullstellen untersucht werden. Dazu wird ein *schwingungsfähiges* PT₂-Glied betrachtet:

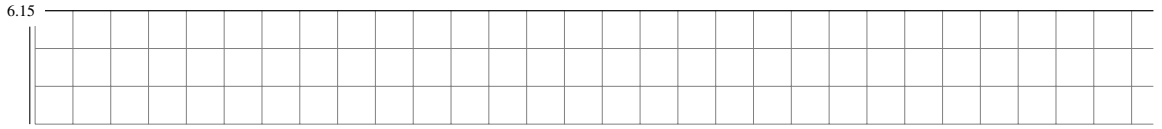
$$G(j\omega) = \frac{K}{j^2\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} \text{ wobei } |\zeta| < 1$$



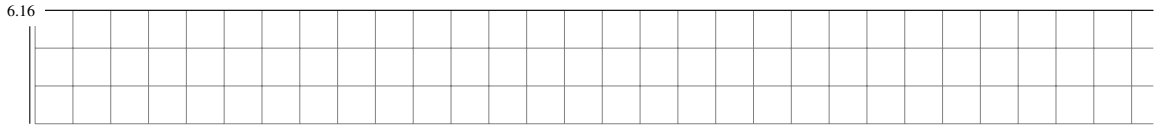
6 Bode-Diagramm

lassen sich folgende *Grenzfälle* entnehmen:

a) Anfangsasympote: $\omega^2 \ll \omega_n^2$

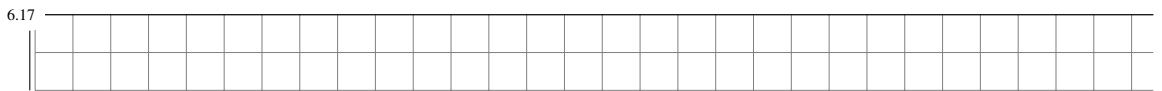


b) Endasympote: $\omega^2 \gg \omega_n^2$

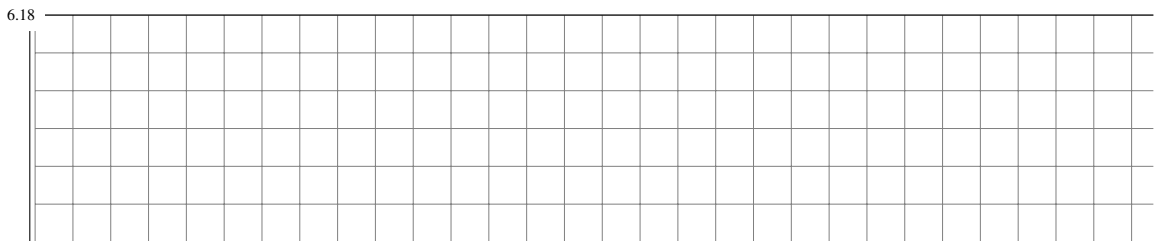


$20 \log A(\omega)$ dB hat hier demnach die Steigung -40 dB.

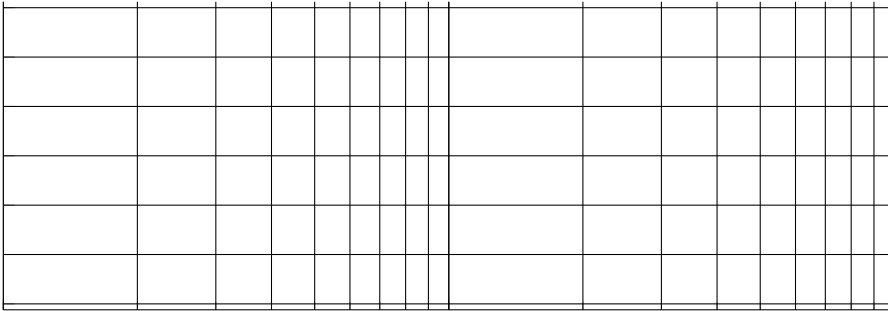
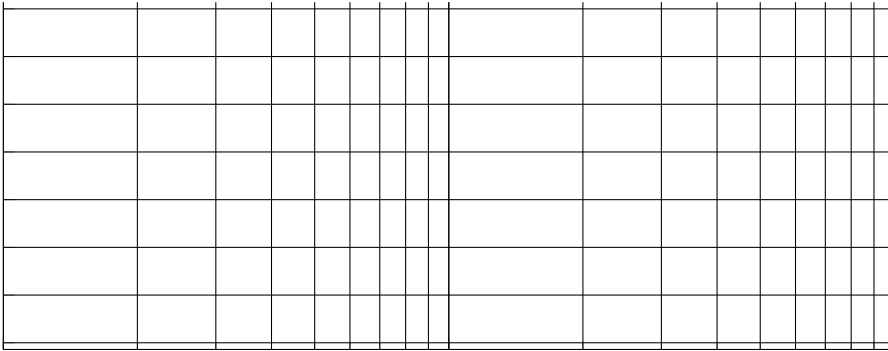
c) Schnittpunkt der Asymptoten von $A(\omega)$



d) Exakte Funktionswerte für $\omega = \omega_E$



Beispiel für $K = 100$, $\zeta = 0.05$, $\omega_n = 0.1$:

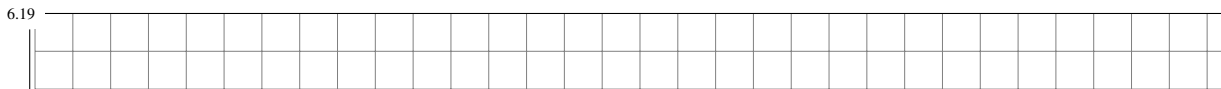


6.3.4 Reine D- und I-Glieder

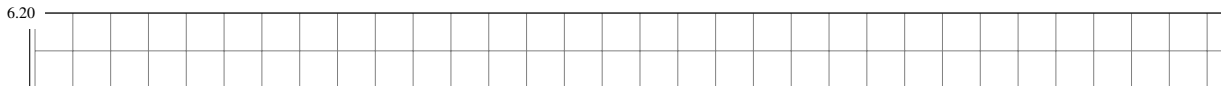
Jetzt fehlen nur noch reine D- und I-Glieder erster oder höherer Ordnung:

$$G(j\omega) = K(j\omega)^n$$

Es gilt

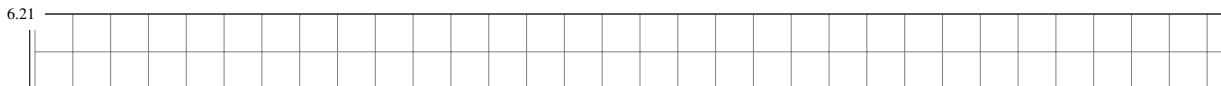


Somit ist



6.3.5 Totzeit-Glied

Die Laplace-Transformierte einer reinen Totzeit ist (siehe Verschiebungssatz in Tabelle A.1 ist $G(s) = e^{-sT_t}$, somit gilt $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$. Es gilt



Die Phase ist also proportional zur Frequenz. Abbildung 6.1 zeigt den Phasengang einer reinen Totzeit. Die Phasenverzögerung ist größer als 270° für $\omega T_t > 5$ rad. Das bedeutet, dass es praktisch unmöglich wäre, ein System zu stabilisieren (oder eine positive Phasenreserve zu erreichen), wenn die Durchtrittskreisfrequenz größer als $\omega = 5/T_t$ ist, für Frequenzen oberhalb von $\omega \approx 3/T_t$ wäre es schwierig. Diese Eigenschaften beschränken die erreichbare Bandbreite jedes Systems mit einer Totzeit.

6 Bode-Diagramm

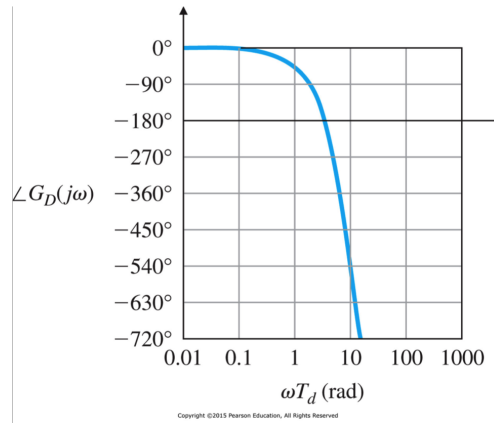


Abbildung 6.1: Phasenverzögerung bei reiner Totzeit.

6.4 Zusammenfassung der Bode-Diagramm-Regeln

1. Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = c \cdot s^r \cdot \underbrace{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_k(s)}_{G^*(s)} \cdot e^{-T_d s}$$

mit $c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $T_d \in \mathbb{R}$

Dabei können die einzelnen Teilsysteme $G_\ell(s)$ die folgenden Formen annehmen:

$$G_\ell(s) = (s + \sigma_\ell) \quad \text{reelle Nullstelle mit der Eckfrequenz } \omega_{E,\ell} = |\sigma_\ell|$$

$$G_\ell(s) = (s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2) \quad \text{konj. komplexes Nullstellenpaar mit der Eckfreq. } \omega_{E,\ell} = |\omega_{n,\ell}|$$

$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s + \sigma_\ell)} \quad \text{reelle Polstelle mit der Eckfrequenz } \omega_{E,\ell} = |\sigma_\ell|$$

$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2)} \quad \text{konjugiert komplexes Polpaar mit der Eckfreq. } \omega_{E,\ell} = |\omega_{n,\ell}|$$

Bei Pol-/Nullstellenpaaren muss $|\zeta_\ell| < 1$ gelten, ansonsten liegen zwei reelle Pole/Nullstellen vor.

2. Sortieren Sie die Teilsysteme $G_\ell(s)$ nach aufsteigenden Eckfrequenzen $\omega_{E,\ell}$. Diese Eckfrequenzen sind stets positiv. Weil Pole und Nullstellen das Bodediagramm für Frequenzen unterhalb ihrer Eckfrequenz nicht beeinflussen (zumindest nicht in der hier dargestellten Approximation), lässt sich dadurch das Bode-Diagramm von links nach rechts zeichnen. Die Zeichenregeln geben dann an, wie sich Phasen- und Amplitudengang bei jeder Eckfrequenz verändern.
3. Bestimmen Sie die niedrigste Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_{E,1}$, sie wird als *Startfrequenz* bezeichnet. Wenn keine G_ℓ existieren ($k = 0$), können Sie $\omega_{\min} > 0$ beliebig wählen.

4. Berechnen Sie die Startamplitude 6.22
- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

5. Zeichnen Sie vom Startpunkt aus zunächst eine Gerade rückwärts, das heißt nach links, mit einer Steigung von $r \cdot 20^{\text{dB/Dekade}}$

6. Zeichnen Sie vom Startpunkt aus Geradenstücke vorwärts, das heißt nach rechts, wobei bei jeder Eckfrequenz $\omega_{E,\ell}$, einschließlich der kleinsten Eckfrequenz ω_{\min} , der Amplitudengang abknickt:

$$G_\ell(s) = (s + \sigma_\ell) \quad \text{Knick um } +20^{\text{dB/Dekade}}$$

$$G_\ell(s) = (s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2) \quad \text{Knick um } +40^{\text{dB/Dekade}}$$

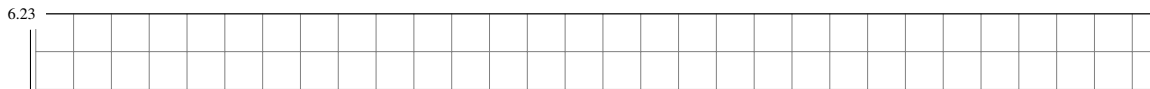
$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s + \sigma_\ell)} \quad \text{Knick um } -20^{\text{dB/Dekade}}$$

$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2)} \quad \text{Knick um } -40^{\text{dB/Dekade}}$$

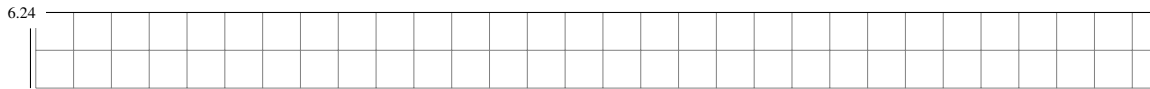
Das Totzeitglied $e^{-T_r s}$ beeinflusst den Amplitudengang nicht. Der Verstärkungsfaktor c wurde bereits durch die Berechnung des Startpunkts berücksichtigt.

Schreiben Sie an alle Geradensegmente die jeweilige Steigung (zum Beispiel $-20^{\text{dB/Dekade}}$) und markieren Sie die Eckfrequenzen.

7. Für Terme erster Ordnung erhöht / erniedrigt sich der Amplitudengang gegenüber der Asymptote an der Eckfrequenz um den konstanten Wert



für Terme im Zähler / Nenner. Für Terme zweiter Ordnung ist die Resonanz-Spitze / Tal an der Eckfrequenz abhängig von ζ :



8. Zeichnen Sie die Niedrig-Frequenz Asymptote des Phasengangs. Links von der Startfrequenz ω_{\min} beträgt die Phase

$$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90^\circ & \text{wenn } c \cdot G^*(0) > 0 \\ -180^\circ + r \cdot 90^\circ & \text{wenn } c \cdot G^*(0) < 0 \end{cases}$$

Anschließend ändert sich die Phase an jeder Eckfrequenz ω_i , einschließlich ω_{\min} , wie folgt:

$$G_\ell(s) = (s + \sigma_\ell) \quad \text{Sprung um } +90^\circ \cdot \text{sign}(n_i)$$

$$G_\ell(s) = (s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2) \quad \text{Sprung um } +180^\circ \cdot \text{sign}(D_i m_i)$$

$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s + \sigma_\ell)} \quad \text{Sprung um } -90^\circ \cdot \text{sign}(p_i)$$

$$G_\ell(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n,\ell} s + \omega_{n,\ell}^2)} \quad \text{Sprung um } -180^\circ \cdot \text{sign}(D_i q_i)$$

Falls ein ungedämpftes Polpaar auftritt, das heißt $\zeta_\ell = 0$ ist, tritt eine Singularität auf. Dann können Sie beliebig $\text{sign}(0) = 1$ oder $\text{sign}(0) = -1$ ansetzen. Treten Zeitverzögerungen $e^{-T_r s}$ mit $T_r \neq 0$ auf, so sind diese Zeichenregeln für den Phasengang nicht anwendbar. Den Phasengang müssen Sie dann stets mit Hilfe von Stützstellen zeichnen.

Diese Treppenapproximation für den Phasengang ist nur dürftig, daher muss er häufig mit Hilfe von Stützstellen diskretisiert werden.

6.5 Wichtige regelungstechnische Definitionen

6.5.1 Phasenminimumsystem und Allpass

Die kennzeichnende Eigenschaft eines asymptotisch stabilen *Phasenminimumsystems* ist:

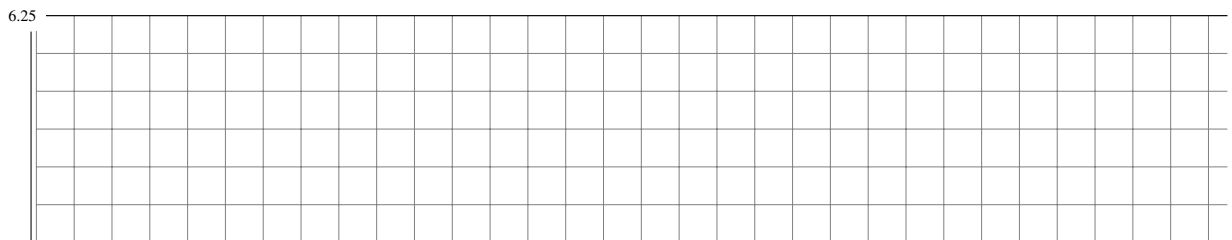
Bei *gegebener Anzahl* von n Polen und m Nullstellen der Übertragungsfunktion hat ihr Frequenzgang beim Durchlaufen des Frequenzintervalls $[-\infty, +\infty]$ die *geringstmögliche* Phasendrehung $\Delta\varphi = \varphi(\omega = -\infty) - \varphi(\omega = +\infty)$ im Uhrzeigersinn.

Ein Totzeitfaktor e^{-sT_t} bringt eine zusätzliche (unendliche) Phasendrehung $\Delta\varphi$. Daher ist ein *Phasenminimumsystem* genau dann gegeben, wenn die Übertragungsfunktion

1. keinen Totzeitfaktor enthält und
2. eine rationale Funktion ist, bei der $a(s)$ und $b(s)$ Hurwitzpolynome sind, das heißt $G(s)$ hat Pole und Nullstellen nur in der linken Halbebene.

Zu jedem gegebenen Amplitudengang $A(\omega)$ gibt es genau *ein* Phasenminimumsystem. Alle *anderen* Systeme mit *demselben* Amplitudengang haben eine *größere* Drehung $\Delta\varphi$ im Phasengang $\varphi(\omega)$. Sie müssen also einen sogenannten *Allpass-Anteil* enthalten, der eine Phasendrehung bewirkt, ohne den Amplitudengang zu verändern.

Ein asymptotisch stabiles *Allpass-Glied* hat demnach folgende Eigenschaften:



Diese Bedingungen werden natürlich in idealer Weise von jedem *reinen Totzeitglied* $G(s) = e^{-sT_t}$ erfüllt. Unter einem Allpass im engeren Sinne wird aber eine rationale Funktion mit den Eigenschaften in Lücke 6.25 verstanden.

Um die erste Forderung in Lücke 6.25 bei einer rationalen Übertragungsfunktion G mit reellen Koeffizienten zu erfüllen, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

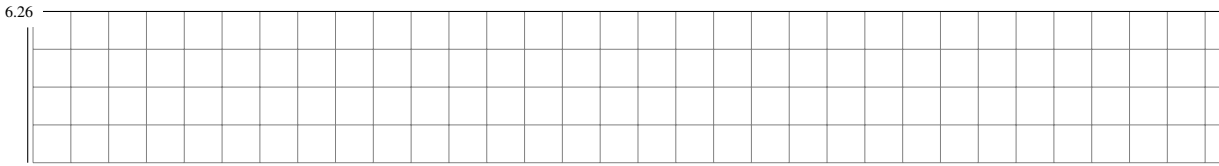
Entweder: $b(j\omega) \equiv a(j\omega) \Rightarrow G(j\omega) \equiv 1$. Dies ist kein Allpass, weil wegen $\varphi(-\infty) - \varphi(+\infty) = 0$ die zweite Bedingung in Lücke 6.25 nicht erfüllt wäre.

Oder: $b(j\omega)$ ist *konjugiert komplex* zu $a(j\omega)$. Dann sind tatsächlich die Forderungen in Lücke 6.25 erfüllt.

Ein Allpass n -ter Ordnung hat also den Frequenzgang

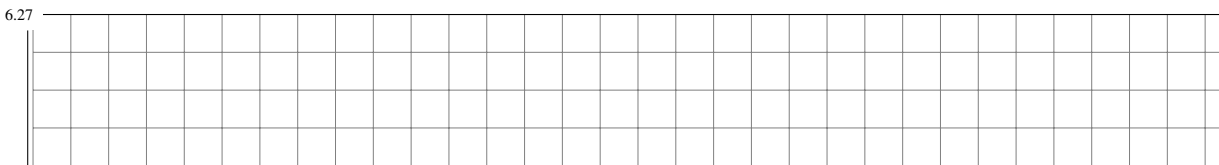
$$G(j\omega) = \frac{a_0 - j\omega a_1 - \omega^2 a_2 + j\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 - j\omega^5 a_5 + \dots}{a_0 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 + j\omega^5 a_5 + \dots}$$

Daher lautet die Übertragungsfunktion des Allpasses n -ter Ordnung



Man sieht sofort, dass die Gleichung in Lücke 6.26 nicht zu einem Phasenminimumsystem gehören kann, weil der Zähler (wegen der Verletzung der Vorzeichenbedingung) *kein Hurwitz- oder Routhpolynom* ist. Durch die Substitution $s \rightarrow -s$ geht der Zähler bei einem (beliebigen) Allpass aus dem Nenner hervor. Also sind die Nullstellen von $G(s)$ die *Spiegelbilder* der Pole. Weil aber Pole und Nullstellen reell sind oder in konjugiert komplexen Paaren auftreten, kann man auch behaupten: Bei einem Allpass ist die Nullstellenverteilung in der s -Ebene das *Spiegelbild* der Polverteilung bezüglich der ω -Achse.

Die Gleichung in Lücke 6.26 geht bei Zerlegung in *Wurzelfaktoren* über in:



Zum Schluss soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie ein beliebiges zeitinvariantes lineares System in ein *Phasenminimumsystem* und einen *Allpass* zerlegt werden kann. Gegeben sei

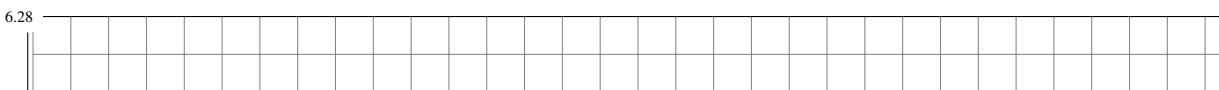
$$G(s) = -5 \frac{(s+1)(s-2)(s-1+j)(s-1-j)}{(s+3)(s+2+j)(s+2-j)(s+4)}$$

Mit der Erweiterung $(s+2)(s+1+j)(s+1-j)$ erhält man die Zerlegung:

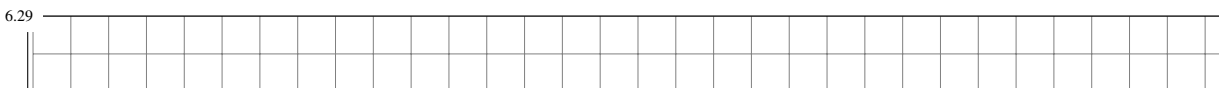
$$G(s) = \underbrace{5 \frac{(s+1)(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}{(s+3)(s+2+j)(s+2-j)(s+4)}}_{\text{Phasenminimumsystem}} \underbrace{(-1) \frac{(s-2)(s-1+j)(s-1-j)}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}}_{\text{Allpass}}$$

6.5.2 Grenzstabilität

Wir betrachten ein System wie in Abbildung 6.2(a), dessen Wurzelortskurve sich wie in Abbildung 6.2(b) verhält; das heißt, es wird instabil, falls K größer als 2 wird. Die grenzstabilen Punkte liegen auf der imaginären Achse, wo also $K =$ und $r_{1,2} = \pm j$. Zudem wissen wir, dass alle Punkte auf der Wurzelortskurve wegen Lücke 5.7 folgende Eigenschaft haben:



Am Punkt der Grenzstabilität $s = j\omega$ gelten die Wurzelortskurvenbedingung, also gilt



Daraus folgt, dass ein Bode-Diagramm eines grenzstabilen Systems die Bedingungen in Lücke 6.29 erfüllt. Abbildung 6.3 zeigt den Frequenzgang als Bode-Diagramm für das System in Abbildung 6.2 für verschiedenen Werte von K . Der Betragsgang für $K = 2$ geht bei der gleichen Frequenz $\omega = 1 \text{ rad/s}$ durch 1, bei der die Phase durch -180° geht. Nachdem wir den grenzstabilen Punkt bestimmt haben, kom-

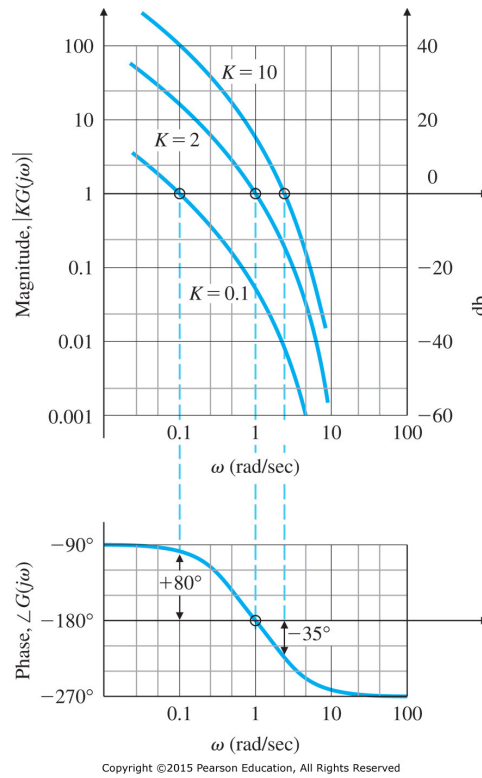


Abbildung 6.3: Betrags- und Phasengang für das System in Abbildung 6.2 [FPE15, Figure 6.15]

6 Bode-Diagramm

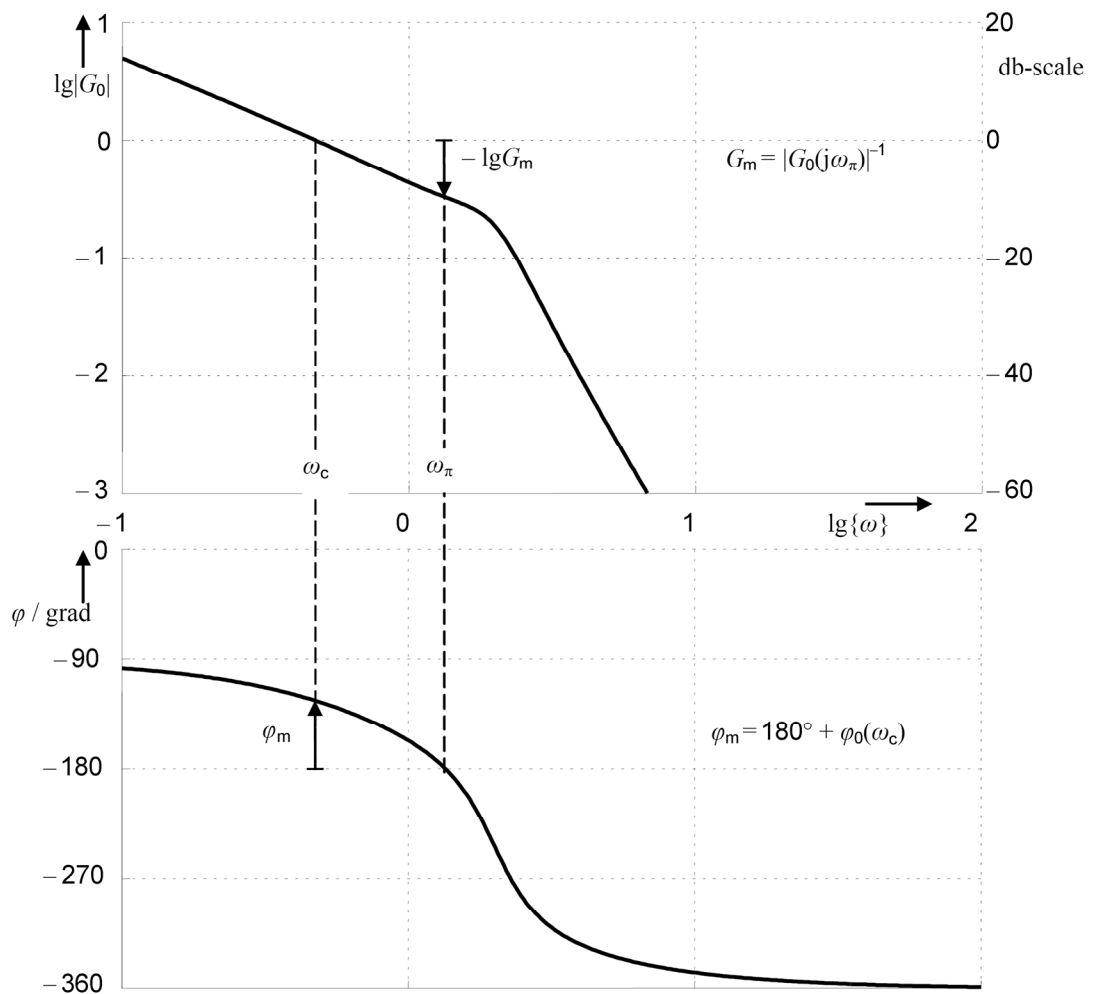


Abbildung 6.4: Betrags- und Phasenreserve, entnommen aus der Norm DIN IEC 60050-351.

G_0	Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises
$ G_0 $	Amplitudengang des aufgeschnittenen Regelkreises
φ_0	Phasengang des aufgeschnittenen Regelkreises
ω	Kreisfrequenz
$\{\omega\}$	Zahlenwert der Kreisfrequenz ω
ω_c	Durchtrittskreisfrequenz
φ_m	Phasenreserve
ω_π	Phasenschnittkreisfrequenz
G_m	Betragsreserve

7 Zustandsraumdarstellung

Zusätzlich zu den beiden bislang behandelten Domänen *s-Ebene (Wurzelortskurve)* und *Frequenzgang (Bode-Diagramm und Nyquist-Diagramm)* gibt es, wie in Kapitel 2.1 erwähnt, die *Zustandsraum-Methoden*, um die es heute und den folgenden Terminen gehen wird. Das Ziel bleibt weiterhin das Gleiche: einen Regler $D_c(s)$ wie in Abbildung 7.1 zu entwerfen.

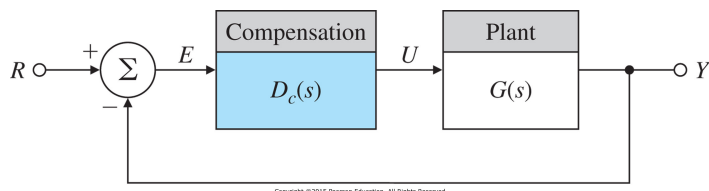


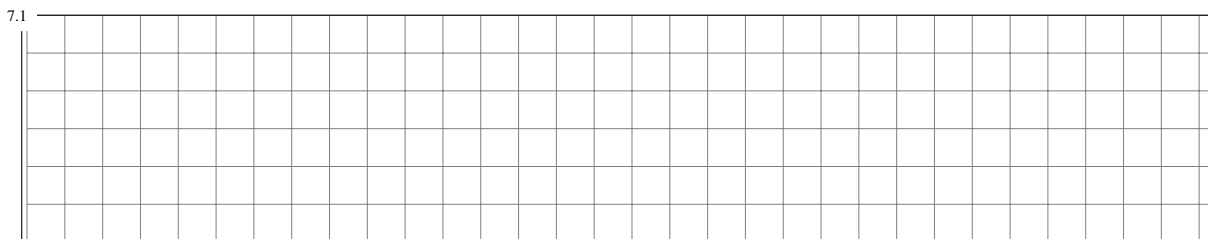
Abbildung 7.1: Eine Regelungsentwurf-Festlegung, [FPE15, Figure 7.1]

7.1 Systembeschreibung im Zustandsraum

Die Bewegung eines mechanischen Systems (Differentialgleichung 2. Ordnung oder bei gekoppelten Systemen höherer Ordnung) lässt sich als ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdrücken. Zum Beispiel führt die Anwendung des Newtonschen Prinzips $\sum F = ma$ (Summe der Kräfte gleich Masse mal Beschleunigung) oder $\sum M = I\ddot{\theta}$ (Summe der Momente gleich Trägheitsmoment mal Drehbeschleunigung) zu Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung. Angewandt auf das Satellitenmodell in Abbildung 7.3, das die Drehung des Satelliten in Abbildung 7.2 modelliert, folgt:

$$F_c d + M_d = I\ddot{\theta}$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben als



Dieselbe Gleichung lässt sich auch in der Zustandsraum-Darstellung als die Vektorgleichung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{Systemgleichung} \quad (7.1a)$$

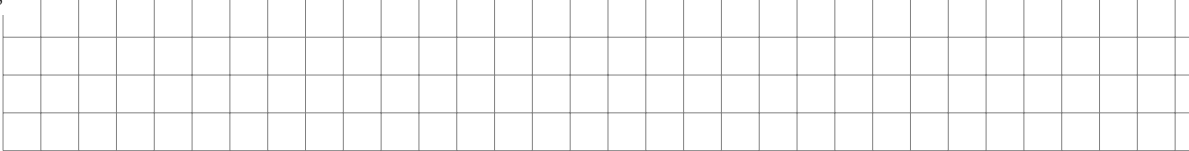
$$y = Cx + Du \quad \text{Messgleichung} \quad (7.1b)$$

$$x(0) = \mathbf{0} \quad (7.1c)$$

darstellen, wobei u der Eingang und y der Ausgang ist. Der Spaltenvektor x heißt *Zustand* des Systems und enthält bei einem System n -ter Ordnung n Elemente. Bei mechanischen Systemen sind die Elemente

bestimmen können:

7.3



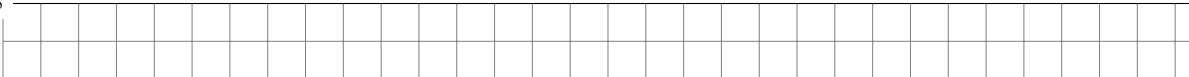
Wir wenden Lücke 7.2 an und kommen dann zum vollständigen Blockdiagramm:

7.4



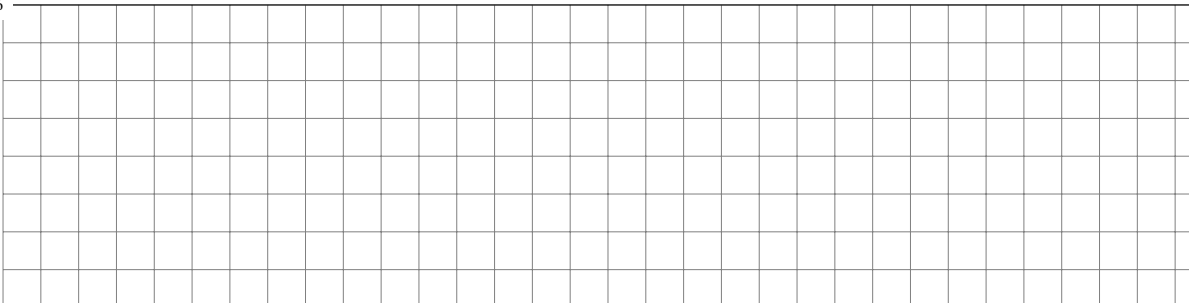
Um zur Zustandsraumdarstellung zu kommen, definieren wir die Zustandsgrößen einfach als Ausgang der Integrierten:

7.5



Im Blockdiagramm in Lücke 7.4 können wir also einfach die Terme mit y entsprechend umbenennen und erhalten dann:

7.6



Dies liefert schließlich die Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen

7.7

7.3 Analyse der Zustandsgleichungen

7.3.1 Übertragungsfunktion²

Berechnung mit Matrixinversion. Aus einer Zustandsraumdarstellung (7.1) eines Systems lässt sich die Übertragungsfunktion $Y(s)/U(s)$ wie folgt bestimmen:

1. Laplace-Transformation:

7.8

2. Systemgleichung im Bildbereich nach dem transformierten Zustandsvektor $X(s)$ auflösen,

7.9

3. in die Messgleichung $Y(s)$ im Bildbereich einsetzen,

7.10

4. und schließlich durch $U(s)$ teilen:

7.11

Die Abbildung *Zustandsraumdarstellung* \rightarrow *Übertragungsfunktion* ist eindeutig. Es gibt genau *eine* Übertragungsfunktion zu einer Zustandsraumdarstellung.

²siehe auch [FPE15, Kapitel 7.4.2]

Beispiel:³ Finde die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [2 \quad 1], \quad D = 0$$

mit dem Zusammenhang in Lücke 7.11.

Lösung: Wir bilden zunächst

7.12

und berechnen dann

7.13

Dies in die Gleichung in Lücke 7.11 eingesetzt ergibt schließlich:

7.14

Berechnung mit verallgemeinerter Systemmatrix $P(s)$. Aus der Laplace-Transformation der System- und Messgleichung in Lücke 7.8 folgen die beiden Gleichungen

7.15

³[FPE15, Example 7.11, Seite 478f]

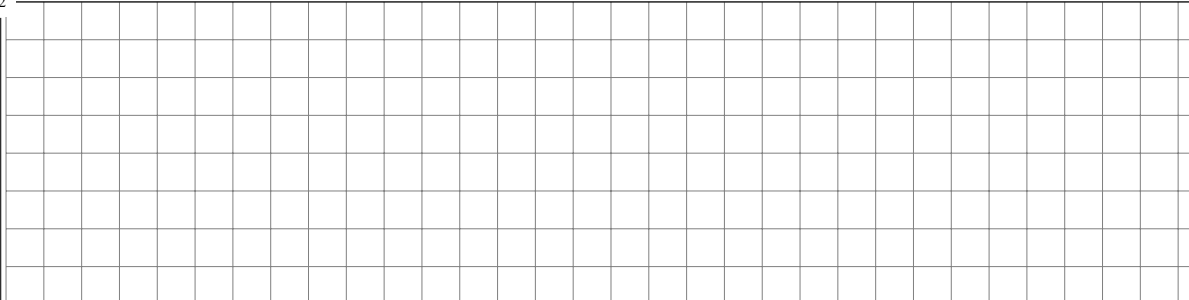
7.3.2 Regelungsnormalform⁴

Für eine Übertragungsfunktion

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

lässt sich die Regelungsnormalform bestimmen, indem wir die Zustandsvariablen x_i folgendermaßen (und damit auch die Systemgleichung) definieren:

7.22



Somit gilt für die Zustandsvariablen im Bildbereich:

7.23

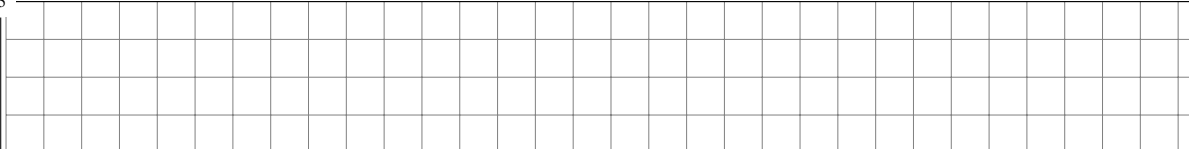
$$\mathcal{L}\{x_i\} = \left| \begin{array}{c|cccc} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline \end{array} \right. \quad (7.2)$$

7.24

$$\mathcal{L}\{\dot{x}_i\} = \left| \begin{array}{c|cccc} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline \end{array} \right. \quad (7.3)$$

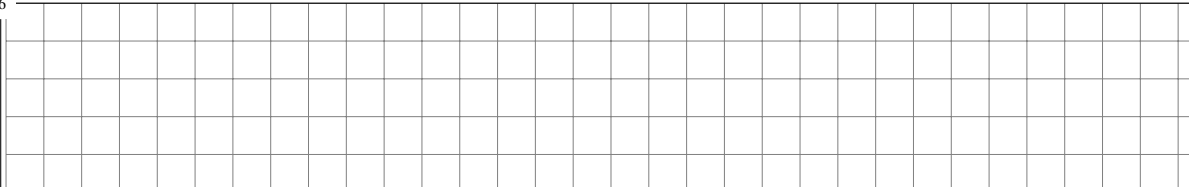
Dies in die letzte Zeile in Lücke 7.22 eingesetzt und nach X_1 aufgelöst ergibt zunächst

7.25



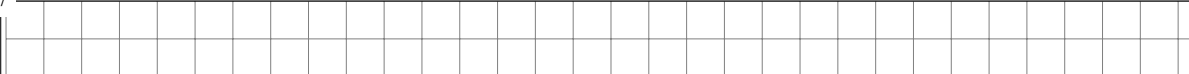
Gleichung (7.2) und Lücke 7.25 in die entsprechend umgeformte Übertragungsfunktion

7.26



einsetzen ergibt im Bildbereich

7.27

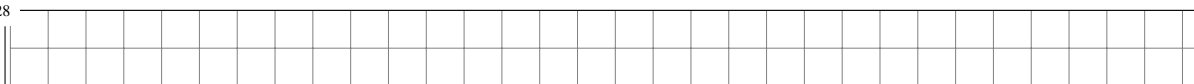


und schließlich zurück transformiert in den Zeitbereich ergibt sich für die Messgleichung

⁴In [FPE15] werden, wie im angelsächsischen Raum und damit auch in MATLAB® üblich, die Zustände der Regelungs- sowie der Beobachtungsnormalform im Vergleich zu hier in *umgekehrter* Reihenfolge nummeriert!

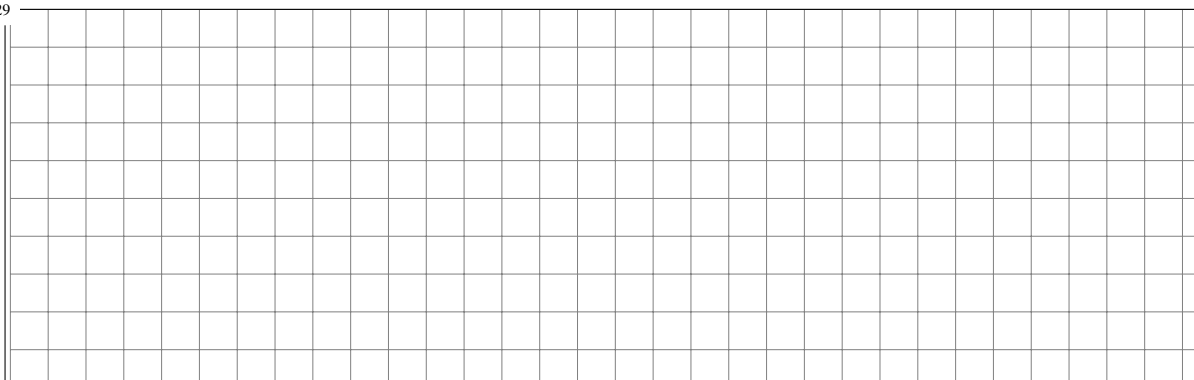
7 Zustandsraumdarstellung

7.28



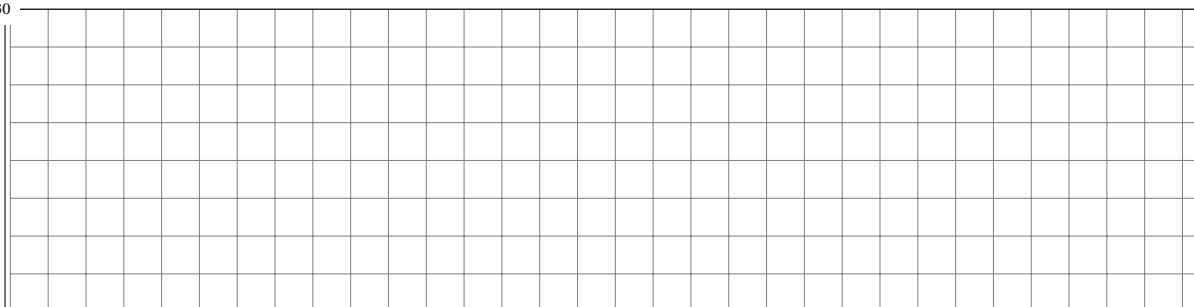
Die Regelungsnormalform der oben gegebenen Übertragungsfunktion ist somit

7.29



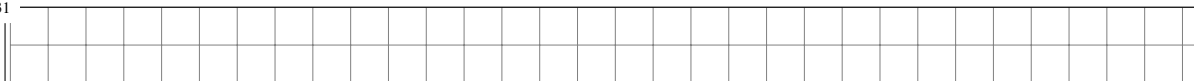
Beispiel: Bestimme die Regelungsnormalform der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{10s^2 + 4s + 7}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$

7.30



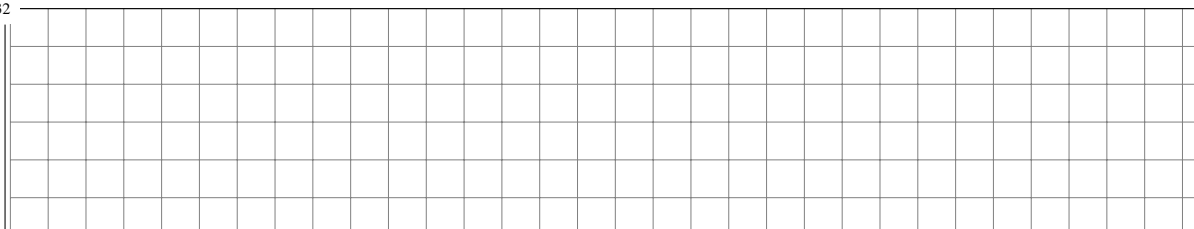
Transformation auf Regelungsnormalform⁵ Wir suchen für die Matrizen A , B und C sowie den Skalar D die Transformationsmatrix T , so dass \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} und \bar{D} die gewünschte Form haben. Zuerst formen wir Gleichung (A.7a) um zu

7.31



Die Systemmatrix \bar{A} sei in Regelungsnormalform und die *inverse* Transformationsmatrix T^{-1} beschreiben wir mit ihren *Zeilenvektoren* t_i^T , dann gilt bei einer Systemordnung von $n = 3$:

7.32



Aus der ersten und zweiten Zeile in Lücke 7.32 folgt:

⁵Siehe auch Kapitel A.3

7.33

Aus Gleichung (A.7b) folgt mit $\bar{\mathbf{B}}$ in Regelungsnormalform:

7.34

Mit Lücke 7.33 folgt dann:

7.35

und damit

7.36

Steuerbarkeit Dieses Ergebnis führt auf den Begriff der *Steuerbarkeit*: Das lineare Gleichungssystem

$$t_1^T \mathcal{C} = [0 \ 0 \ 1]$$

hat dann und nur dann eine Lösung t_1^T , wenn die *Steuerbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

invertiert werden kann. Das System kann somit dann und nur dann in die Regelungsnormalform überführt werden, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{C} *nicht singulär* ist. Das System ist dann *steuerbar*.

Kochrezept

1. $\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \Rightarrow \mathcal{C}^{-1}$
2. $t_1^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathcal{C}^{-1}$ (letzte Zeile von \mathcal{C}^{-1})

7 Zustandsraumdarstellung

$$3. \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ t_1^T A^2 \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \bar{A} = T^{-1} A T \quad \bar{C} = C T$$

Aufgabe: Zeige, dass sich die Steuerbarkeit eines Systems durch eine *nichtsinguläre* lineare Zustandstransformation *nicht* ändern lässt (siehe [FPE15, Seite 471f])!

7.37

7.3.3 Beobachtungsnormalform

Die Beobachtungsnormalform lässt sich ähnlich wie die Regelungsnormalform herleiten, worauf wir aber hier verzichten werden.

7.38

Die Beobachtungsnormalform ist somit die *Transponierte* der Regelungsnormalform und vice versa.⁶ Die eine lässt sich durch die andere demnach folgendermaßen bestimmen:

7.39

Beispiel: Bestimme die Beobachtungsnormalform der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{5s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}$

⁶Für steuer- und beobachtbare Systeme.

7.40

Transformation auf Beobachtungsnormalform Die Transformation auf Beobachtungsnormalform lässt sich dual zur Transformation auf Regelungsnormalform herleiten. Wir formen Gleichung (A.7a) diesmal um zu

7.41

Die Systemmatrix \bar{A} sei in Beobachtungsnormalform und die Transformationsmatrix T (diesmal *nicht* ihre Inverse) teilen wir in ihre *Spaltenvektoren* t_i auf. Für ein System 3. Ordnung gilt dann:

7.42

Aus der ersten und zweiten Zeile in Lücke 7.42 folgt:

7.43

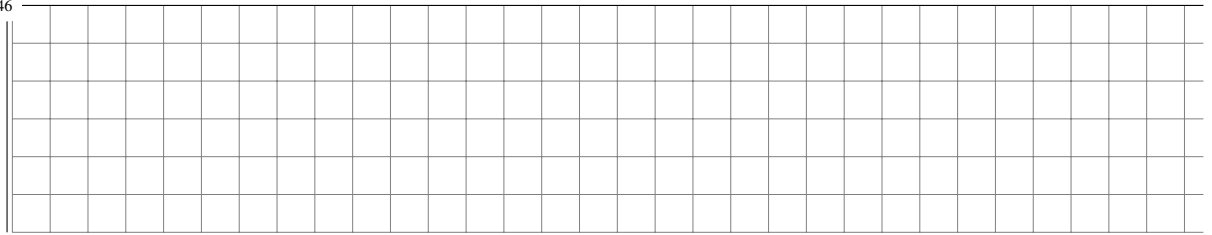
Aus Gleichung (A.7c) folgt mit \bar{C} in Beobachtungsnormalform:

7.44

Daraus folgt dann:

7.45

und damit



Beobachtbarkeit Dual zur Steuerbarkeit gibt es den Begriff der *Beobachtbarkeit*: Das lineare Gleichungssystem

$$\mathcal{O}t_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat dann und nur dann eine Lösung t_1 , wenn die *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

invertiert werden kann. Das System kann somit dann und nur dann in die Beobachtungsnormalform überführt werden, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} **nicht singulär** ist. Das System ist dann *beobachtbar*.

Kochrezept

$$1. \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{O}^{-1}$$

$$2. t_1 = \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (letzte Spalte von } \mathcal{O}^{-1} \text{)}$$

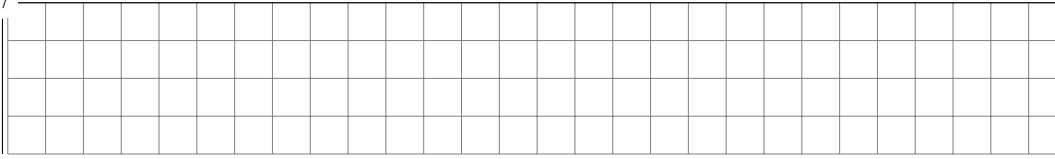
$$3. T = [t_1 \quad At_1 \quad \dots \quad A^{n-1}t_1], \bar{C} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

$$4. \bar{A} = T^{-1}AT, \bar{B} = T^{-1}B$$

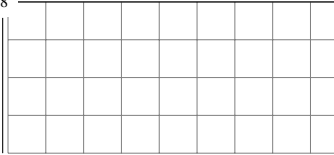
7.3.4 Modal- oder Jordanform

Bei einfachen oder konjugiert komplexen Polen zerlegen wir die Übertragungsfunktion in Ihre Partialbrüche. Jeder Partialbruch entspricht dann einem Modus. Komplexe Polpaare werden zu einem quadratischen Partialbruch zusammengefasst, der Modus ist dann in der 2×2 -Regelungsnormalform. Ein mehrfacher Pol $\frac{b}{(s-p)^m}$ führt ohne weitere Zerlegung zur $m \times m$ -Jordanform. Die Systemmatrix hat dann eine Blockdiagonalstruktur.

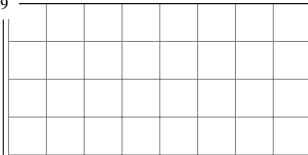
1. Alle Pole p_i sind reell und einfach, die Übertragungsfunktion in Partialbruch-Darstellung ist dann

7.47 

Einem Partialbruch ordnen wir die Zustandsgleichung im Bildbereich

7.48 

und damit im Zeitbereich


7.49 

zu. Die Messgleichung ist dann die Sum-

me

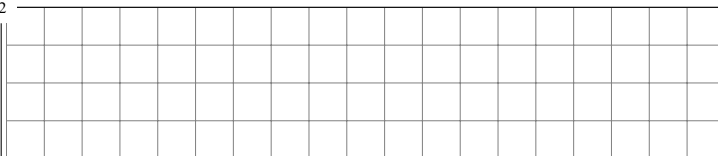
7.50 

Die Modalform für einfache reelle Pole hat somit folgende Form:

7.51 

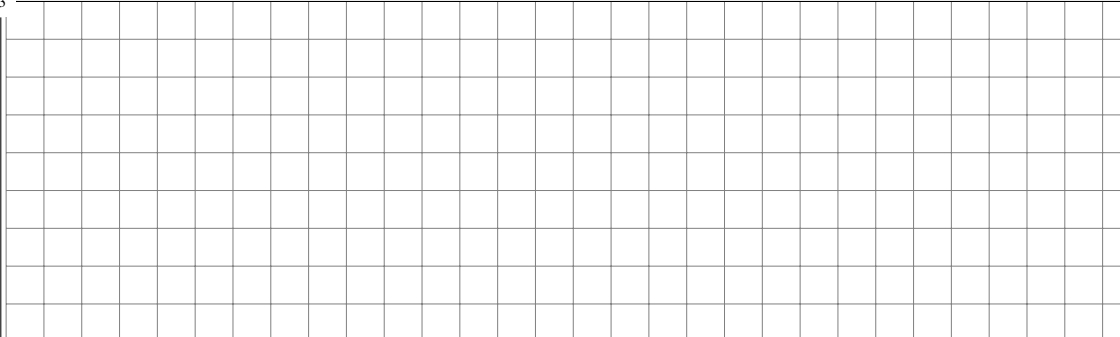
Beispiel: Bestimme die Modalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 7s + 12} =$$

7.52 

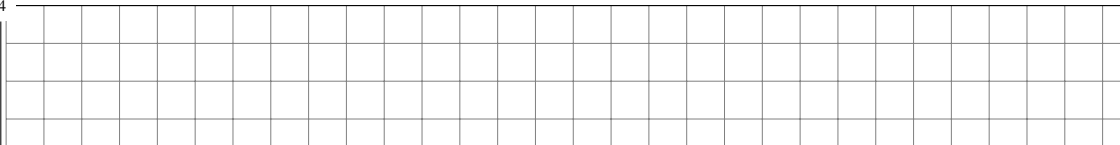
7 Zustandsraumdarstellung

7.53



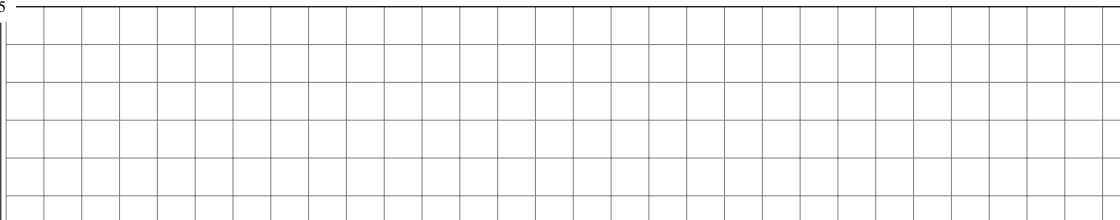
2. Ein komplexes Polpaar führt zu einem Partialbruch der Form

7.54



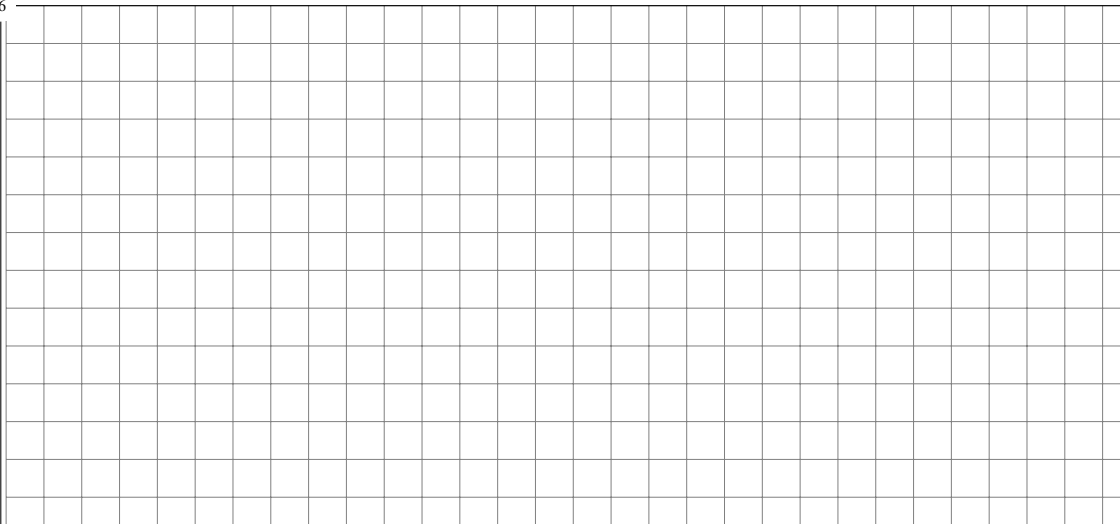
Dieser wird in Regelungsnormalform

7.55

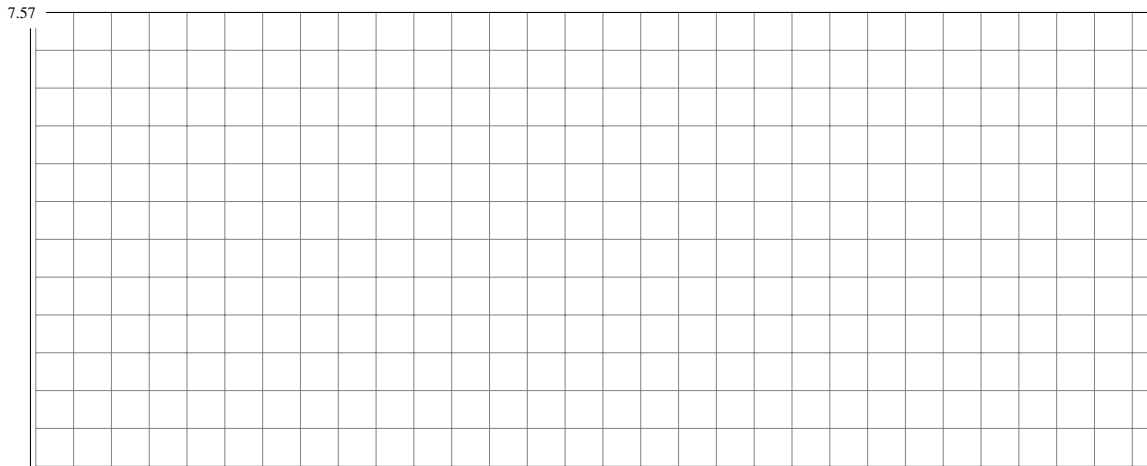


an entsprechender Stelle in das System eingefügt. Ein komplexes Polpaar p_i und \tilde{p}_i führt bei ansonsten einfachen und reellen Polen dann zu folgender Darstellung:

7.56



3. Die Jordanform des m -fachen Pols $\frac{b}{(s-p)^m}$ ist

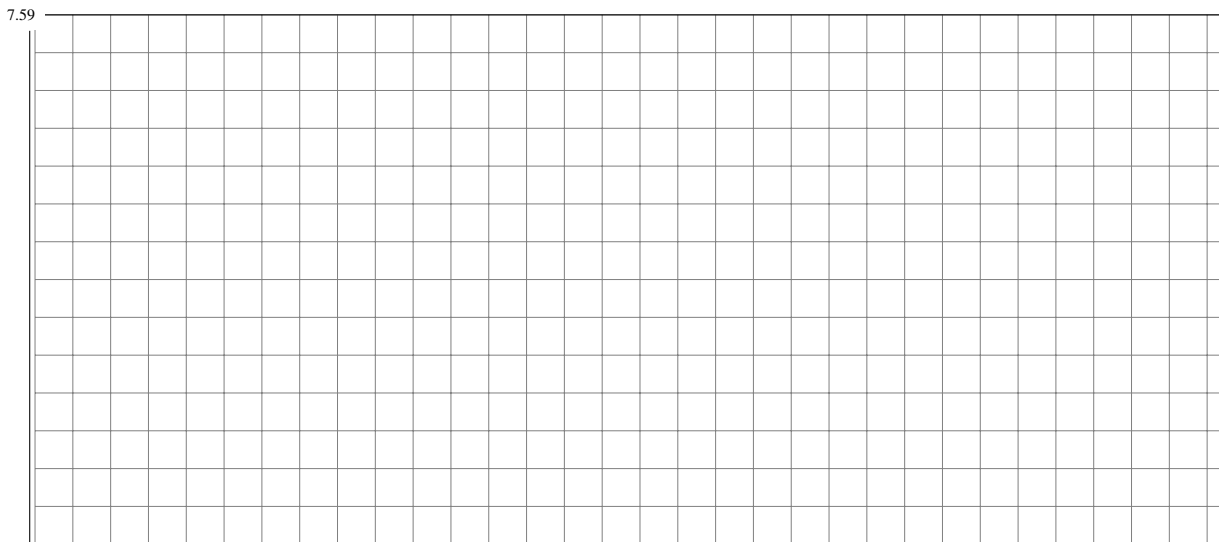


Dies lässt sich leicht zeigen, indem man im Bildbereich sukzessive die i -te Zeile nach X_i auflöst und in der $i + 1$ -ten Zeile für X_{i+1} einsetzt, beginnend bei $i = 1$. Die m -te Zeile ergibt dann $X_1 = \frac{1}{(s-p)^m}U$. Dies in die Messgleichung im Bildbereich eingesetzt ergibt dann die gegebene Übertragungsfunktion.

Aufgabe: Stellen Sie folgende Übertragungsfunktion in Jordannormalform dar⁷:

7.58

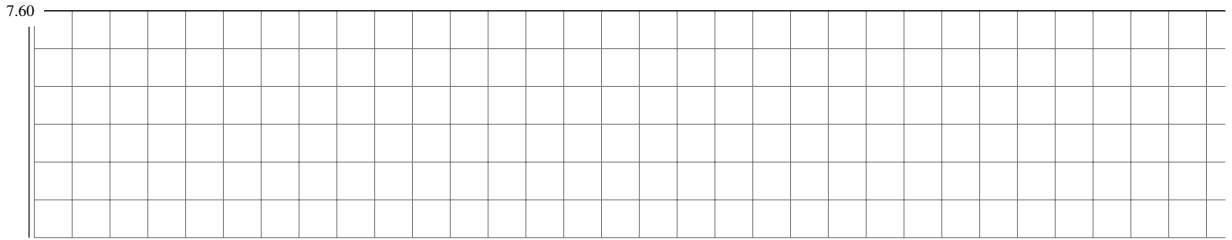
$$G(s) = \frac{2s + 4}{s^2(s^2 + 2s + 4)} =$$



Transformation auf Modalform Wir beschränken uns bei dieser Transformation auf einfache, reelle Pole. Wir setzen wie bei der Beobachtungsnormalform $T\bar{A} = AT$ an. Die Systemmatrix A sei in Dia-

⁷Die Modalform ist ein Spezialfall (alle Pole sind einfach und reell) der Jordanform, so dass im allgemeinen Fall der Begriff *Jordanform* genutzt wird.

gonalform und die Transformationsmatrix T teilen wir wieder in ihre *Spaltenvektoren* t_i auf. Für ein System 3. Ordnung gilt dann:



Dies kennen Sie als *Eigenvektor / Eigenwert*-Problem aus der Vorlesung Mathematik 1. Weil die Modalform äquivalent zur Partialbruch-Darstellung der Übertragungsfunktion ist, sind die einzelnen Pole der Partialbrüche die *Eigenwerte* der Systemmatrix A und die Vektoren t_i die *Eigenvektoren* von A .

Analyse Die Modalform erlaubt folgende Analyse:

- Wenn $b_i = 0$ ist, ist der Zustand x_i *nicht* steuerbar.
- Wenn $c_i = 0$ ist, ist der Zustand x_i *nicht* beobachtbar.

Die jeweilige Dimension des steuer- oder beobachtbaren Unterraums ist die Anzahl der steuer- oder beobachtbaren Zuständen.

Kochrezept

1. Berechnung der *Eigenwerte* λ_i von A .
2. Berechnung von T über eine *Eigenwertzerlegung* von A
3. $\bar{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\bar{B} = T^{-1}B$, $\bar{C} = CT$

7.3.5 Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - z}{s^2 + 7s + 12} = \frac{s - z}{(s + 3)(s + 4)}$$

Wenn $z = -3$ oder $z = -4$ ist, dann kürzt sich die Nullstelle mit dem entsprechenden Pol. Wir untersuchen, wie sich das auf die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems auswirkt. Wir bestimmen dafür zuerst die Matrizen A_c , B_c und C_c in Regelungsnormalform und die dazugehörige *Beobachtbarkeitsmatrix* \mathcal{O}_c .

7.61

 $A_c =$

7.62

 $B_c =$

7.63

 $C_c =$

7.64

 $\mathcal{O}_c =$

8 Regelung im Zustandsraum

8.1 Einen Regler bestimmen ([FPE15, Kapitel 7.5.1])

Der erste Schritt in der Zustandsraum-Methode ist es, eine Linearkombination des gesamten Zustandsvektors zurückzuführen. Die Idee ist also:

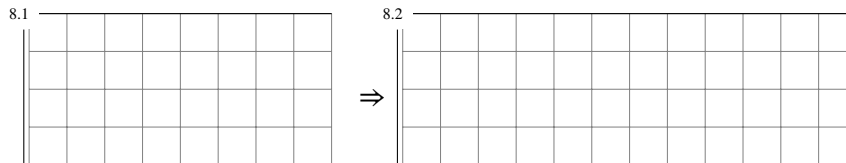
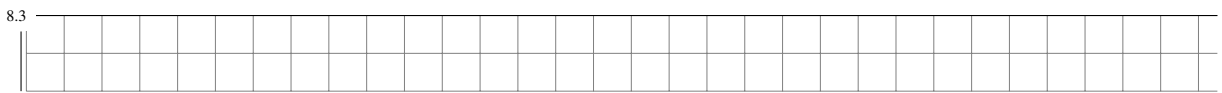


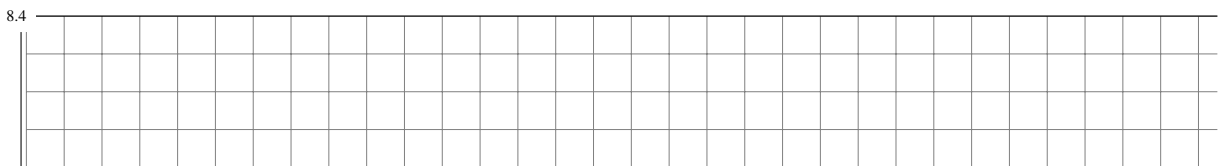
Abbildung 8.1 zeigt das entsprechende Blockdiagramm. Aus Lücke 8.2 folgt die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

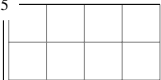


Wir entwerfen den Regler, indem wir die Elemente der Rückführmatrix \mathbf{K} so wählen, dass die Pole des geschlossenen Regelkreises an passenden Stellen liegen.

8.1.1 Beispiel: Ungedämpfter Oszillator ([FPE15, Example 7.14])

Gegeben sei ein Oszillator mit der Frequenz ω_0 und folgender Zustandsraumdarstellung:



Wir wollen ein Regelgesetz finden, das die Pole  des offenen Regelkreises auf $-2\omega_0$ des geschlossenen Regelkreises verschiebt. Die natürliche Frequenz soll also verdoppelt und die Dämpfung ζ von 0 auf 1 erhöht werden.¹ Das gesuchte charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises

¹ Zur Erinnerung: Nenner der Schwingungsübertragungsfunktion: $s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$

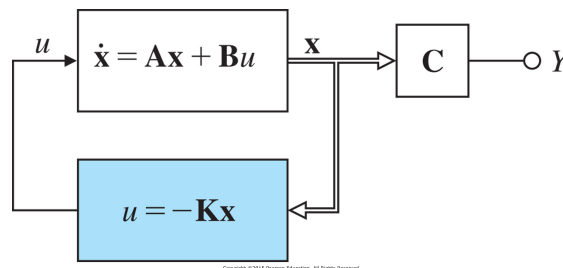


Abbildung 8.1: Angenommenes System für den Reglerentwurf, [FPE15, Figure 7.12]

ist also

8.6

Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ergibt mit Lücke 8.3

8.7

Der Koeffizientenvergleich zwischen Lücke 8.6 und 8.7 führt auf

8.8

Der Regler ist also kurz gefasst

8.9

Abbildung 8.2 zeigt die Impulsantwort des geschlossenen Regelkreises (entspricht der Anfangsbedingung $x_1 = 1, x_2 = 0$).

8.1.2 Rückführmatrix für Systeme in Regelungsnormalforn

Die Rückführmatrix \mathbf{K} lässt sich besonders einfach wählen, wenn das System in Regelungsnormalforn vorliegt:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wie wir schon wissen ist die charakteristische Gleichung hier

8.10

Für die Systemmatrix des geschlossenen Kreises gilt

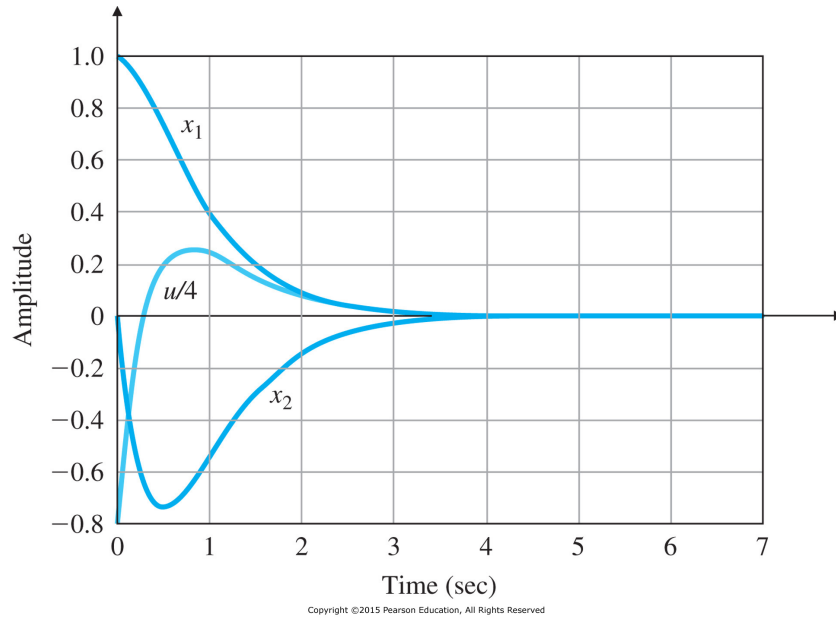
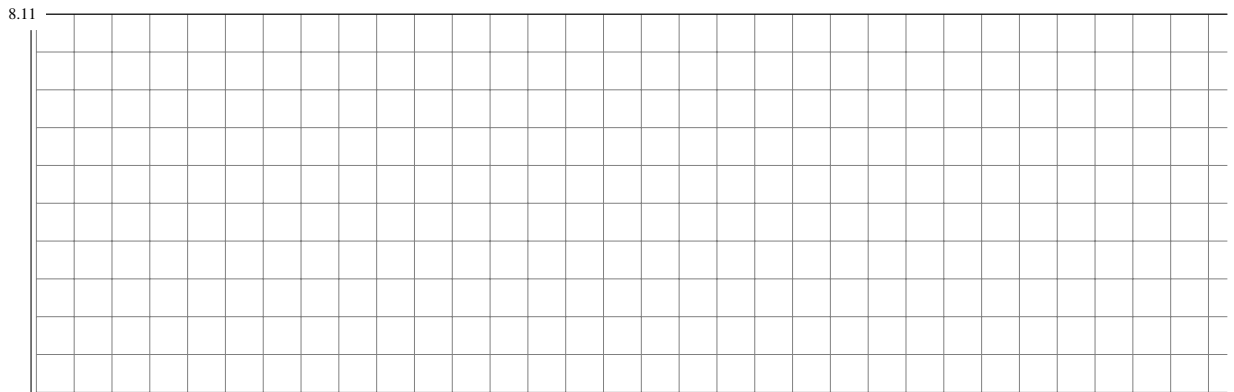
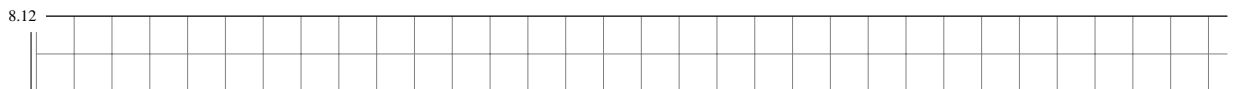


Abbildung 8.2: Impulsantwort des ungedämpften Oszillators mit vollständiger Zustandsrückführung ($\zeta = 0$, $\omega_0 = 1$). ([FPE15, Figure 7.13])



Die charakteristische Gleichung ist somit



Wir schließen daraus:

Für ein steuerbares System lassen sich die Pole durch die Wahl der Rückführmatrix \mathbf{K} beliebig platzieren.

Beispiel: siehe oben (der Oszillator ist bereits in Regulationsnormalform, so dass man auch gleich die charakteristische Gleichung gemäß Lücke 8.12 hinschreiben kann.)

8.1.3 Einfluss von Nullstellen auf den Regler

Anhand des folgenden Systems (entspricht [FPE15, Example 7.16] mit umgekehrter Nummerierung der Zustände) mit einer Nullstelle bei $s = z_0$ untersuchen wir den Einfluss von Nullstellen auf den Regler.

Lösung durch Matrixinversion:

8.18

Wir lernen zwei wichtige Erkenntnisse von diesem Beispiel:

1. Die Verstärkung nimmt zu, wenn sich die Nullstelle z_0 entweder -3 oder -4 nähert, den Werten, an denen dieses System seine Steuerbarkeit verliert. Mit anderen Worten, die Verstärkungen werden sehr groß wenn das System fast nicht mehr steuerbar ist.

Das System muss für die Regelung immer „härter“ arbeiten je mehr die Steuerbarkeit verloren geht.

2. Dieses Beispiel zeigt auch, dass k_1 und k_2 beide mit der Bandbreite des geschlossenen Systems ω_n wachsen.

Um Pole weit zu verschieben benötigt es große Verstärkungen.

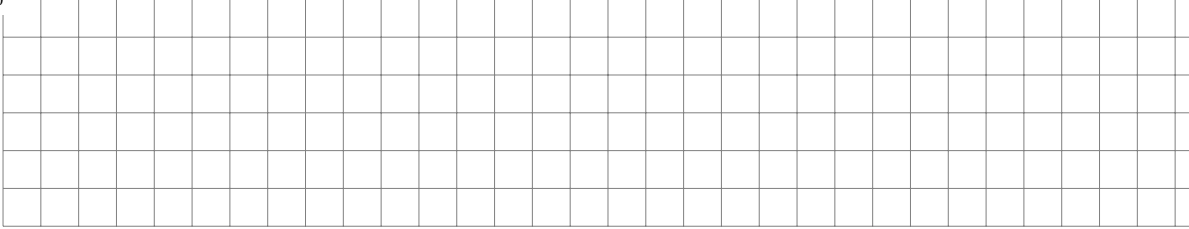
8.2 Referenzsystem ([FPE15, Kapitel 7.5.2])

Soweit war der Regler gegeben durch $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Was war das Ziel dieses Reglers? (siehe zum Beispiel Abbildung 8.2):

8.19

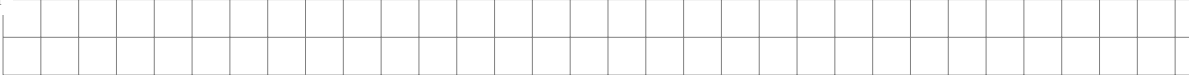
Daher wird diese Regelstruktur auch *Kompensator* genannt. Jetzt wollen wir mit Hilfe eines Referenzwerts r das Einschwingverhalten in Abhängigkeit der Pol-Platzierung untersuchen. Das bedeutet, wir geben r vor und im eingeschwungenen Zustand soll $y_s = r$ gelten. Ein naheliegender Ansatz wäre $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$, der aber von Spezialfällen abgesehen zu einer bleibenden Regelabweichung führt. Im eingeschwungenen Fall gilt nämlich

8.20



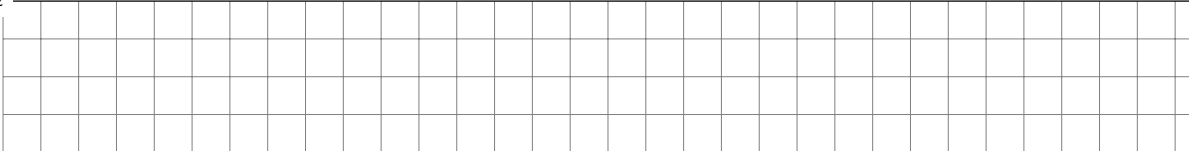
Um dieses Problem der bleibenden Regelabweichung zu lösen, berechnen wir die stationären Werte des Zustands und des Eingangs, \mathbf{x}_s und u_s respektive, so dass die Regelabweichung im eingeschwungenen Zustand $e = y_s - r = 0$ ist. Die Reglergleichung ist somit:

8.21



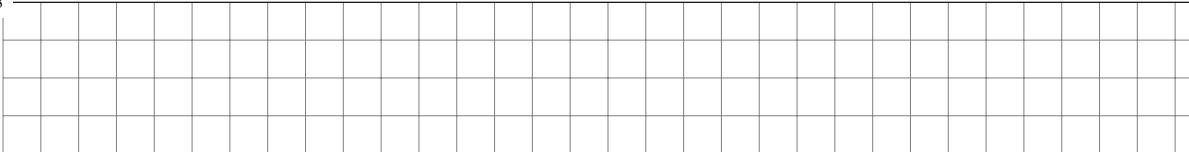
Wie müssen wir u_s und \mathbf{x}_s wählen? Die Zustandsgleichungen

8.22



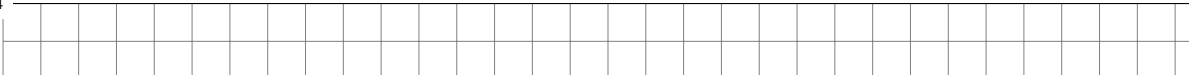
reduzieren sich im stationären Fall $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ und $y = y_s$ zu

8.23



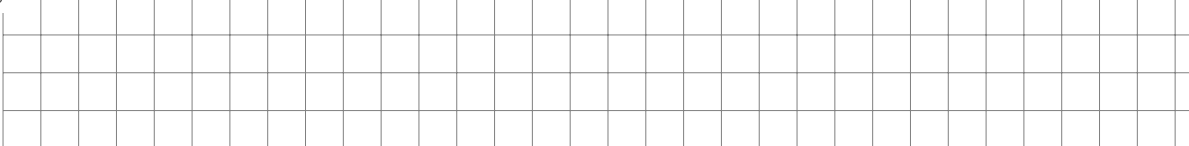
Wir suchen die Werte, für die $y_s = r$ für einen beliebigen Wert von r ist. Den Ansatz

8.24



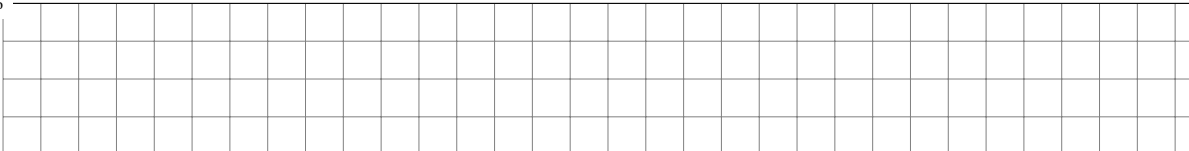
setzen wir in Lücke 8.23 ein und erhalten

8.25



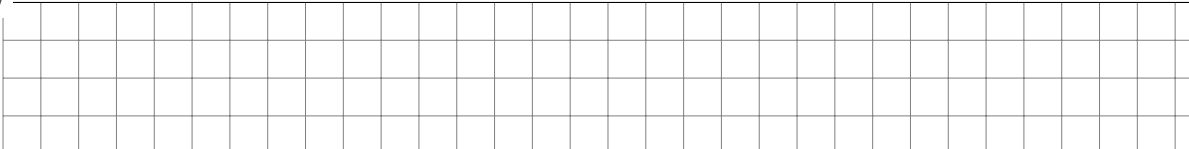
Diese Gleichung lässt sich nach N_x und N_u auflösen:

8.26



Aus den Lücken 8.21 und 8.24 folgt:

8.27



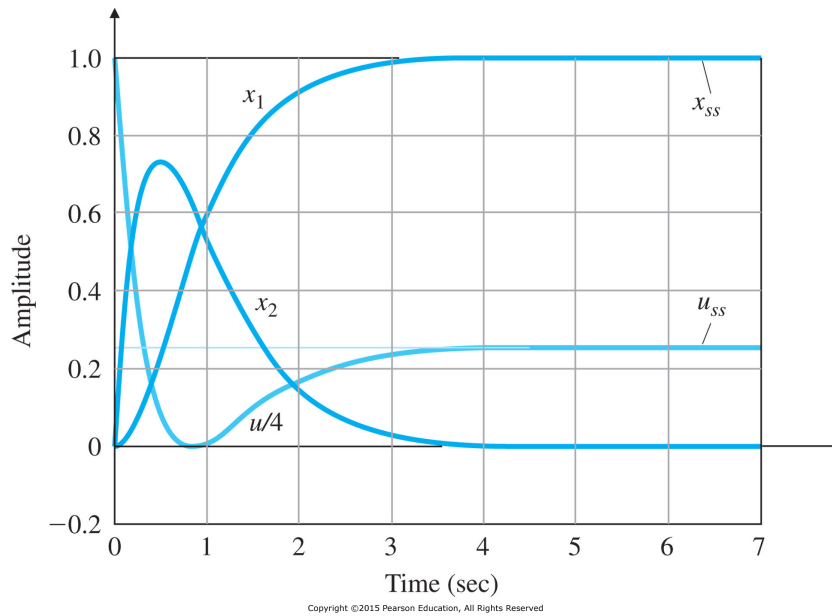


Abbildung 8.4: Sprungantwort des Oszillators auf einen Referenzeingang. ([FPE15, Figure 7.16])

Lösung. Die entsprechenden Matrizen beispielsweise mit $\omega_0 = 1$ in Lücke 8.25 einsetzen

8.30

und nach den Komponenten des Vektors $\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} n_{1,x} \\ n_{2,x} \end{bmatrix}$ und nach N_u auflösen:

8.31

Mit der Rückführmatrix \mathbf{K} aus Lücke 8.9 mit $\omega_0 = 1$ ist dann

8.32

$$\bar{\mathbf{N}} =$$

Abbildung 8.4 zeigt die resultierende Sprungantwort.

8.3 Symmetrische Wurzelortskurve (SWOK) [FPE15, Kapitel 7.6.2]

Eine häufig genutztes und effektives Vorgehen bei der Polvorgabe ist der *Lineare Quadratische Regulator (LQR)*. Eine vereinfachte Version des LQR-Problems ist, einen Regler zu finden, der die Kostenfunktion

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (\rho z^2(t) + u^2(t)) dt \quad (8.2)$$

für das System

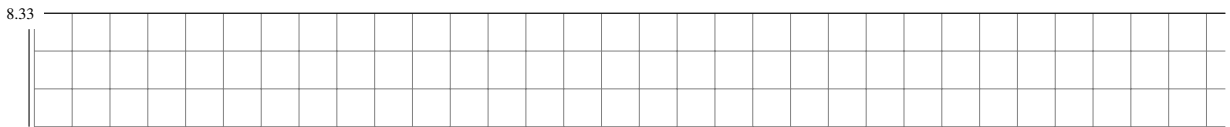
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (8.3a)$$

$$z = \mathbf{C}_1\mathbf{x} \quad (8.3b)$$

minimiert, wobei ρ in Gleichung (8.2) ein zu wählender Gewichtungsfaktor ist. Mit einer linearen Zustandsrückführung $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ lässt sich \mathcal{J} minimieren. Es lässt sich zeigen dass der optimale Wert für \mathbf{K} die Pole des geschlossenen Regelkreises auf die stabilen Pole (also die in der LHE) der *symmetrischen Wurzelortskurve (SWOK, englisch symmetric root locus SRL)*

$$1 + \rho G_0(-s)G_0(s) = 0 \quad (8.4)$$

legt, wobei $G_0(s)$ die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises von u zu z ist:



Gleichung(8.4) entspricht der Wurzelortkurve in Kapitel 5 in Abhängigkeit vom Parameter ρ , der der Gewichtungsfaktor in der Kostenfunktion (8.2) ist. Weil $-s$ und s Gleichung 8.4 in identischer Weise beeinflussen, gibt es für jede Wurzel s_0 auch eine Wurzel $-s_0$. Es ergibt sich somit eine symmetrische Wurzelortskurve, die sowohl zur reellen als auch zur imaginären Achse symmetrisch ist.

Im ersten Schritt wählen wir die Matrix \mathbf{C}_1 , die die Zustandskosten z^2 definiert. Dann wählen wir ρ , das z^2 bezüglich des Regelaufwands u^2 gewichtet. Der Ausgang, den wir als Zustandskosten definieren, muss *nicht* dem Systemausgang y entsprechen. Daher bezeichnen wir den Ausgang in Gleichung 8.3 mit z anstatt mit y .

Die Wahl eines Satzes von stabilen Polen, die eine Lösung der Gleichung (8.4) darstellen, sind die gesuchten stabilen Pole des geschlossenen Regelkreises, so dass \mathbf{K} wie in Kapitel 8.1 gezeigt bestimmt werden kann.

Wegen der Symmetrie erhalten wir die Pole und Nullstellen durch Spiegelung der Pole und Nullstellen von $G_0(s)$ an der Imaginär-Achse. Bei der Konstruktion der SWOK ist zu beachten, dass die Phasenbedingung (siehe Lücke 5.10) entweder 0° oder 180° sein kann, je nach Vorzeichen von $G(-s)G(s)$ in Gleichung (8.4). Bei negativem Vorzeichen gilt 0° und in diesem Fall ändern sich somit die Konstruktionsregeln, die aus der Phasenbedingung hergeleitet werden. Für $G(-s)G(s) < 0$, oder $(-1)^{n-m} = -1$, was gleichbedeutend ist mit $n - m = \text{ungerade}$, gelten somit folgende Änderungen zur Konstruktion der SWOK:

Geänderte Regeln für 0° -Wurzelortskurve ($n - m$ ungerade)

REGEL 2 Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann ein *Punkt der symmetrischen Wurzelortskurve*, wenn die Summe aller reellen Nullstellen und Pole des offenen Kreises, die *rechts* vom betrachteten Punkt

liegen, gerade ist.

REGEL 3 Für große s und K haben $n - m$ Zweige Asymptoten mit den Winkeln ϕ_ℓ , die sternförmig von dem Polschwerpunkt $s = \alpha$ auf der reellen Achse ausgehen:

$$\phi_\ell = \frac{360^\circ(\ell - 1)}{n - m} \quad \ell = 1, 2, \dots, n - m$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

REGEL 4 q Zweige beginnen in q -fachen Polen unter den Winkeln

$$q \cdot \phi_{\ell, \text{beg}} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq \ell, \text{beg}} \phi_i - 360^\circ(\ell - 1), \ell = 1, \dots, q$$

und q Zweige enden in q -fachen Nullstellen unter den Winkeln

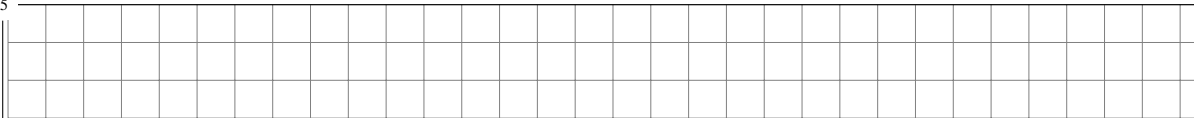
$$q \cdot \psi_{\ell, \text{end}} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq \ell, \text{end}} \psi_i + 360^\circ(\ell - 1), \ell = 1, \dots, q$$

REGEL 7 SWOK verlaufen stets *symmetrisch* zur σ - und zur j -Achse.

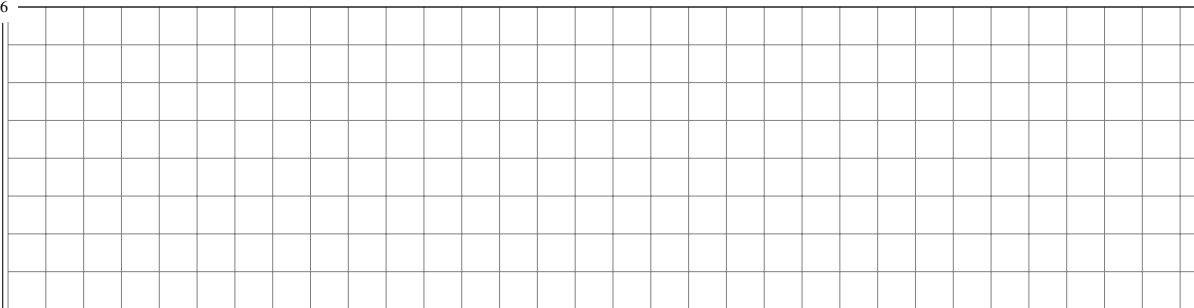
8.3.1 Beispiel: SWOK für ein System 1. Ordnung [FPE15, Example 7.20]

Zeichne die SWOK für $\dot{x} = -ax + u$, $G_0 = \overset{8.34}{\left| \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \right|}$ mit $z = x$.

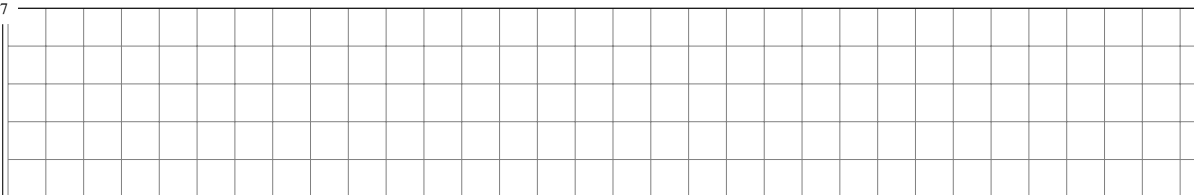
Lösung. Die SWOK-Gleichung 8.4 für dieses Beispiel lautet

8.35 

Für die SWOK ergibt sich damit

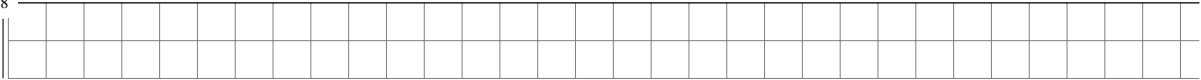
8.36 

Der optimale (stabile) Pol lässt sich hier explizit bestimmen:

8.37 

8 Regelung im Zustandsraum

Somit liegt der Pol des geschlossenen Regelkreises, der die Kostenfunktion (8.2) minimiert, auf der reellen Achse und ist immer links vom Pol des offenen Regelkreises. Für die Rückführung $\mathbf{K} = [k]$ ergibt sich somit

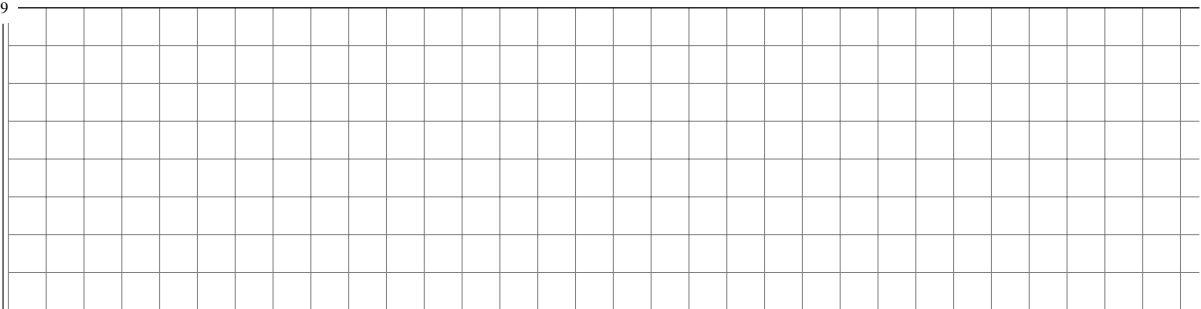
8.38 

8.3.2 Beispiel: SWOK für Lageregelung eines Satelliten

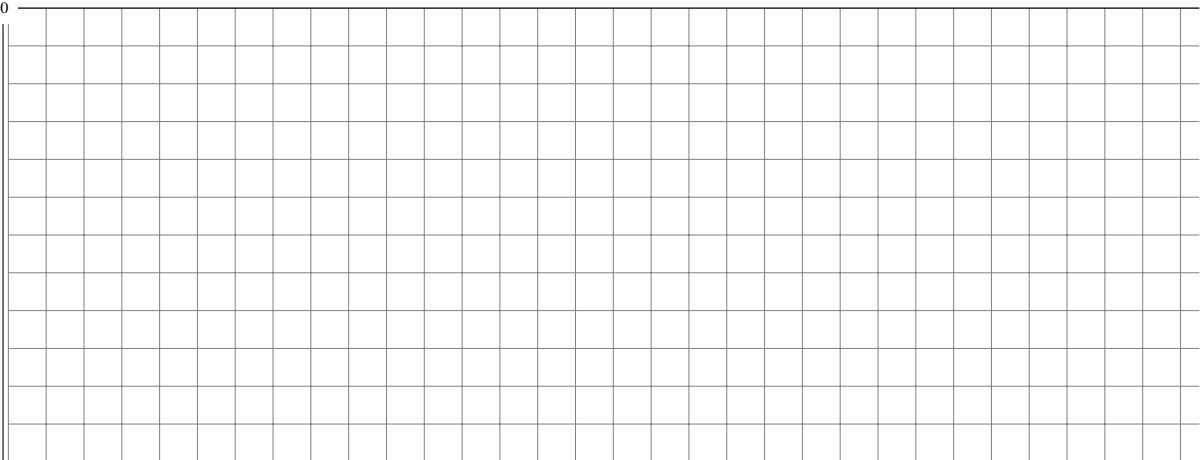
Zeichne die SWOK für ein Satellitensystem mit $z = y$ und den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

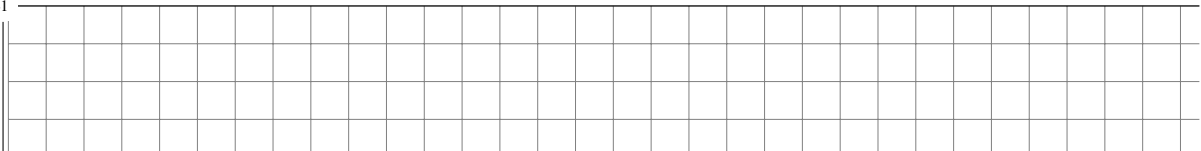
Für G_0 ergibt sich

8.39 

Für die symmetrische Wurzelortskurve ergibt sich:

8.40 

Die optimalen Pole des geschlossenen Regelkreises haben somit alle ein Dämpfungsmaß von $\zeta = 0.707$. Wir können zum Beispiel $s = -1 \pm j$ für $\rho = 4$ wählen. Für die Rückführmatrix $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$ ergibt sich dann:

8.41 

Aufgabe. Bestimmen Sie mit MATLAB[®] die SWOK für $z = 2x_1 + x_2$.

Lösung.

```
A=[0 1;0 0]
B=[0;1]
C1=[2 1]
[num,den]=(ss2tf(A,B,C1,0));
G=tf(num,den)
n=length(num)
num(n-1:-2:1)=-num(n-1:-2:1)
den(n-1:-2:1)=-den(n-1:-2:1)
G1=tf(num,den)
rlocus(G*G1)
```

Aufgabe. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die optimalen (stabilen) Pole für $\rho = 1$, sowie ρ_{VZW} im stabilen Verzweigungspunkt. Bestimmen Sie die Rückführmatrizen $\mathbf{K}(\rho = 1)$ und $\mathbf{K}(\rho_{VZW})$ mit der Funktion `acker`.

9 Beobachter¹ [FPE15, Kapitel 7.7]

In den meisten Fällen werden nicht alle Zustandsgrößen gemessen, weil die benötigten Sensoren zu teuer sind, zum Beispiel für die Messung des Schwimmwinkels, oder weil es physikalisch nicht möglich ist, zum Beispiel in einem Kernkraftwerk. Die Idee ist daher, einen Schätzwert \hat{x} zu nutzen. Der Regler wäre dann

9.1

--	--

Eine einfache Methode der Schätzung ist die Simulation des Systems mit den gleichen Eingängen, wie in Abbildung 9.1 gezeigt. Wie die Steuerung hat dieser Open-Loop-Beobachter das Problem, dass Stö-

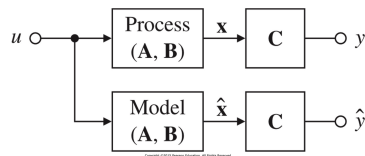


Abbildung 9.1: Open-Loop Beobachter [FPE15, Figure 7.27]

runen oder Parameterfehler nicht korrigiert werden und der Schätzfehler $x - \hat{x}$ je nach Umständen groß werden kann. Die Lösung ist, die Differenz zwischen gemessenem und geschätztem Ausgang $y - C\hat{x}$ zurückzuführen und dadurch den Schätzfehler kontinuierlich mit diesem Signal zu korrigieren, wie Abbildung 9.2 zeigt. Die Gleichung für den Beobachter von x in Abbildung 9.2 ist

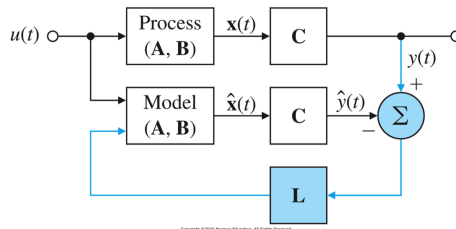


Abbildung 9.2: Closed-Loop Beobachter [FPE15, Abbildung 7.28]

9.2

--	--

Hier ist L eine proportionale Verstärkung, die definiert ist als:

9.3

--	--

Die Fehlerdynamik lässt sich ermitteln, indem der Schätzwert vom Zustand abgezogen wird:

¹Die Begriffe *Beobachter* und *Zustandsschätzer* sind Synonyme

9.4

Die charakteristische Gleichung des Fehlers ist damit gegeben durch

9.5

Jetzt müssen wir nur noch L so wählen, dass $A - LC$ stabile und angemessen schnelle Eigenwerte hat. Dann wird der Schätzfehler \tilde{x} auf Null abklingen und dort bleiben, unabhängig von der bekannten Zwangsfunktion $u(t)$ und ihren Einfluss auf den Zustand $x(t)$, sowie unabhängig von der Anfangsbedingung $\tilde{x}(0)$.

9.1 Beispiel: Ungedämpfter Oszillator [FPE15, Example 7.24]

Wir entwerfen einen Beobachter für das einfache Pendel und legen die Pole der Schätzfehlerdynamik auf $-10\omega_0$, fünf mal schneller als die Pole des Reglers, den wir zuletzt entwarfen. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Die charakteristische Gleichung a_b für die Pole des Schätzfehlers \tilde{x} ist

9.6

Aus Lücke 9.5 folgt

9.7

Aus dem Koeffizientenvergleich zwischen Lücke 9.6 und 9.7 folgt schließlich:

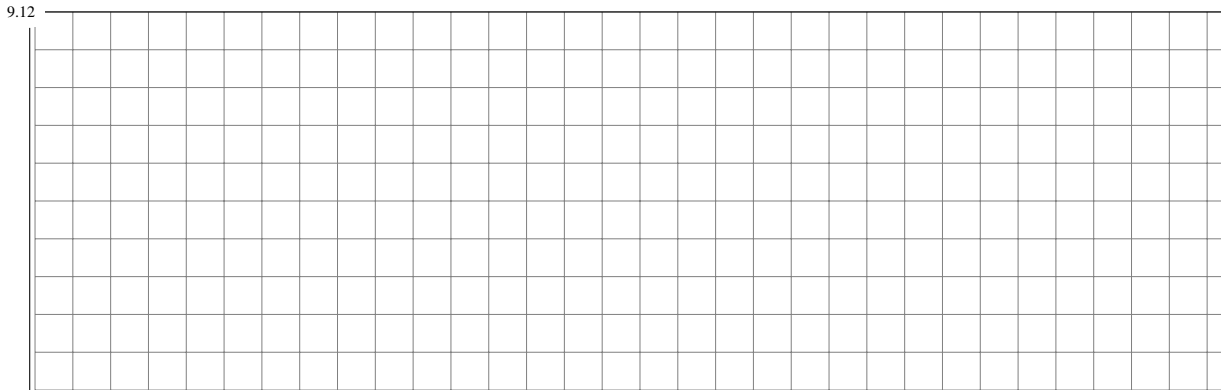
9.8

Das gleiche Ergebnis lässt sich auch mit Matlab finden, zum Beispiel für $\omega_0 = 1$ mit folgenden Matlab-Befehlen:

```
wo=1;
A=[0 1;-wo*wo 0];
C=[1 0];
```


9.3 Dualität

Der Entwurf einer Zustandsregelung und eines Beobachters sind mathematisch äquivalent oder *dual*:



Wie oben schon gezeigt, lässt sich in Matlab

```
K=acker(A,B,pe)
```

für den Zustandsregler und

```
Lt=acker(A',B',pe)
```

```
L=Lt'
```

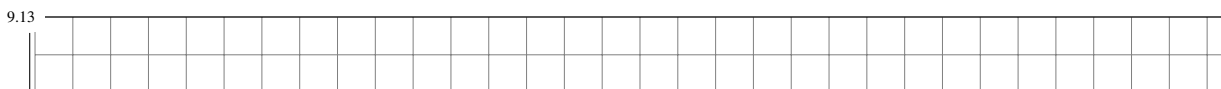
für den Beobachter berechnen, wobei der Vektor p_e die Soll-Pole des Reglers oder Beobachters enthält.²

9.4 Beobachterentwurf [FPE15, Kapitel 7.7.3]

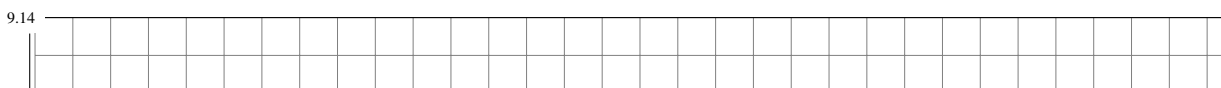
Als Faustformel sollten Beobachterpole um den Faktor 2 bis 6 schneller als die Reglerpole sein. Das führt zu einem schnelleren Abklingen des Schätzfehlers im Vergleich zur erwünschten Dynamik, so dass die Reglerpole die Systemantwort dominieren.

Im Gegensatz zum Regler führen schnellere Pole des Beobachters nicht zu einem erhöhten Regelaufwand und damit Energieaufwand, sondern nur zu einer größeren Bandbreite, das bedeutet, dass mehr Messrauschen zum Stellglied gelangt. Der Entwurf eines Beobachters ist also eine Balance zwischen schneller Systemreaktion und einer ausreichend niedriger Bandbreite, so dass das Messrauschen sich nicht signifikant auf die Regelung auswirkt.

Die beste Wahl der Beobacherverstärkung ist abhängig vom Verhältnis der Intensität des Messrauschens v zur Intensität des Prozessrauschens w . Wir betrachten zunächst die Beobachtergleichung



um zu sehen wie sich das Prozessrauschen w auswirkt. Die Strecke mit Prozessrauschen wird beschrieben durch



und die Messgleichung mit Messrauschen wird beschrieben durch

²Der Index e steht für *estimator*

Wir berechnen G_b mit der Gleichung in Lücke 9.17:

9.18

Daraus folgt für die charakteristische Gleichung der SWOK

9.19

und die Konstruktion der SWOK für $\omega_0 = 1$:

REGEL 1 Zweige

9.20

REGEL 2 Reelle Achse

9.21

REGEL 3 Asymptoten

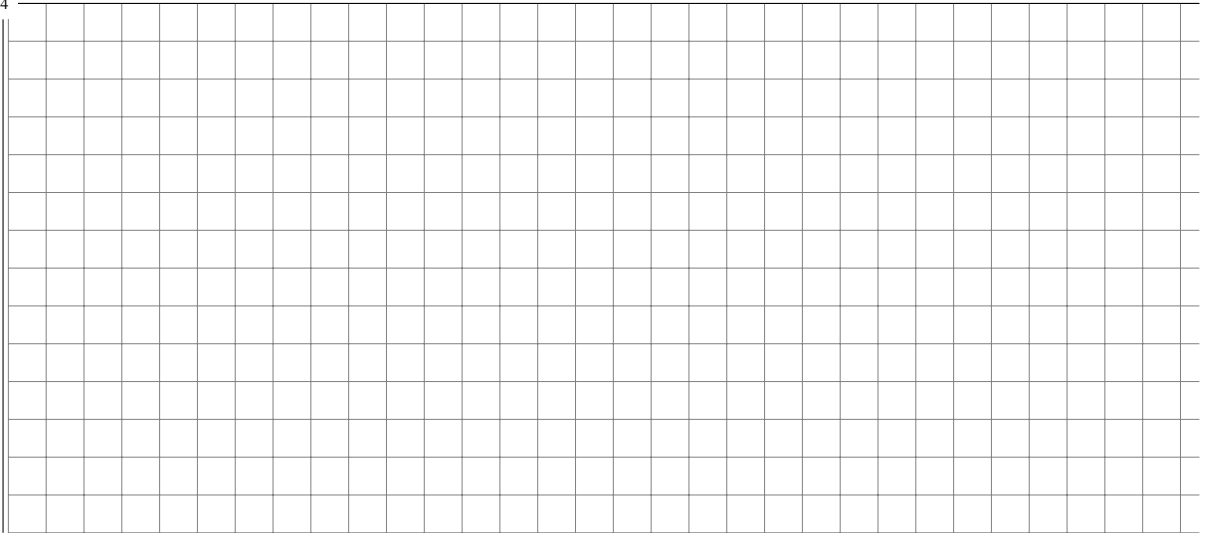
9.22

REGEL 4 Start- und Endwinkel

9.23

SWOK:

9.24



Die Matlab-Befehle zur Darstellung der SWOK sind für $\omega_0 = 1$:

```
s=tf('s');  
G=1/(s^2+1);  
sysGG=G*G;  
rlocus(sysGG);
```

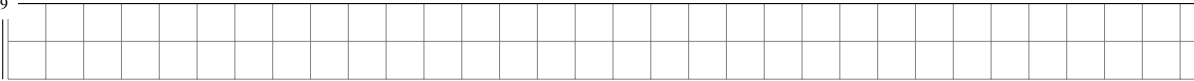
Aufgabe. Bestimmen Sie mit Hilfe von Matlab zwei stabile Pole für $q = 361$.

Lösung. Die Zustandsraumdarstellung der gegebenen Übertragungsfunktion $G(s) = 1/s^2$ ist

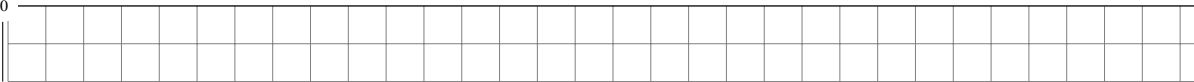
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

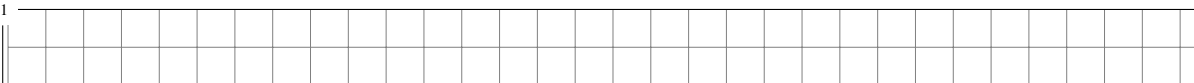
Für das Sollpolynom des Reglers ergibt sich

10.9 

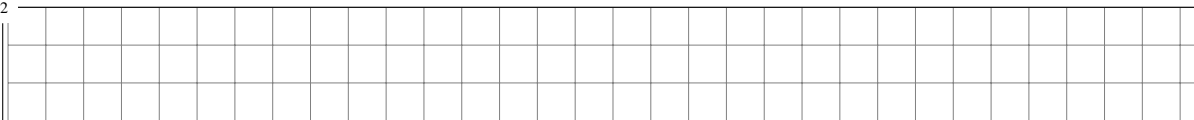
Für die Zustands-Rückführung $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2]$ berechnen wir (Regelungsnormalform)

10.10 

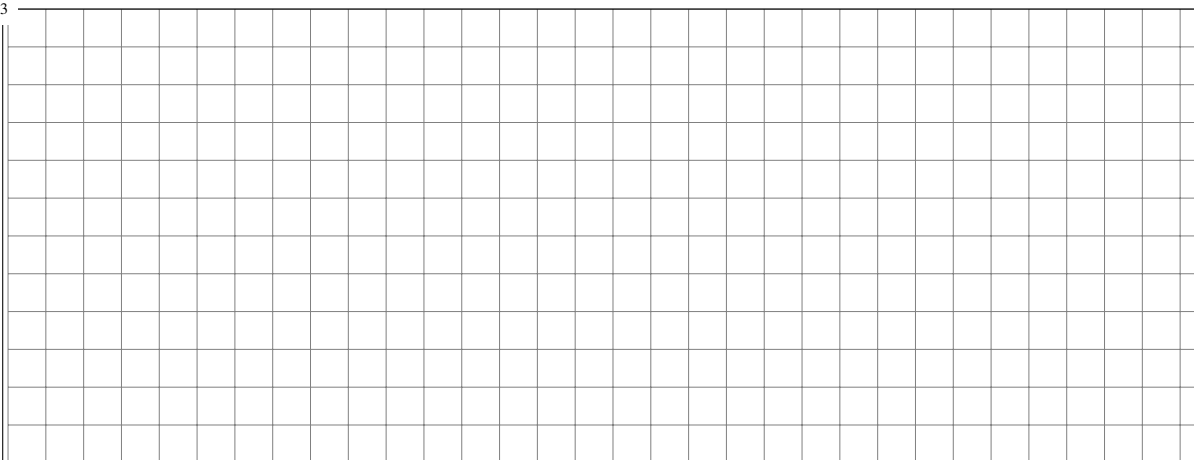
Aus $\omega_n = 5$ rad/sec und $\zeta = 0.5$ folgt für die charakteristische Gleichung des Beobachters

10.11 

Für die Beobachter-Rückführung $\mathbf{L} = [\ell_1 \ \ell_2]^T$ berechnen wir (Beobachtungsnormalform)

10.12 

Damit folgt für die Kompensator-Übertragungsfunktion mit Lücke 10.8

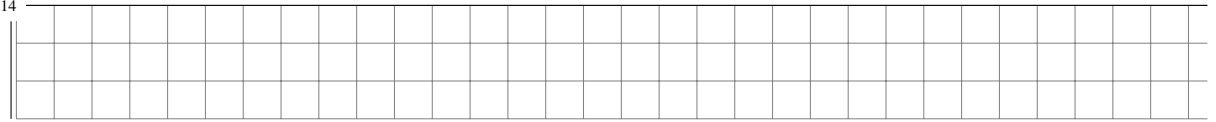
10.13 

Die Pole der Kompensator-Übertragungsfunktion liegen somit bei $-3.21 \pm 4.77j$, der Kompensator ist somit stabil.

Die Auswirkung der Kompensation auf die Pole des geschlossenen Regelkreises kann nun mit Hilfe der Wurzelortskurve und dem Bode-Diagramm ausgewertet werden. Die Verstärkung von 40.4 in Lücke 10.13 ist das Ergebnis der Polauswahl. Wenn wird diesen speziellen Wert der Kompensator-Verstärkung mit der Variablen Verstärkung K ersetzen, dann ist die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises aus Strecke plus Kompensator

10 Kombination aus Regler und Beobachter

10.14



Mit Hilfe der Wurzelortskurve in Abbildung 10.2 können wir die Pole dieser Gleichung in Abhängigkeit von K auswerten. Die WOK geht durch die Pole, die wir in Lücke 10.9 und 10.11 gewählt haben. Bei

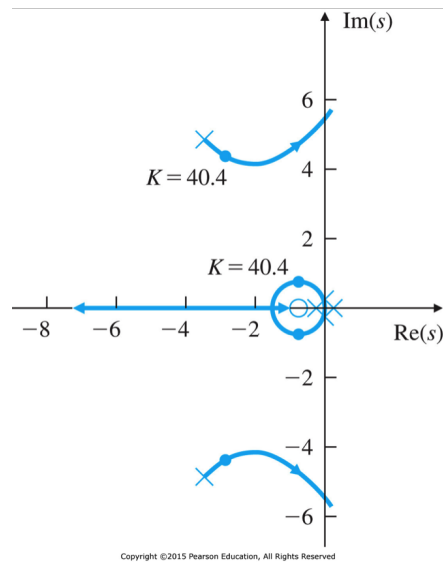


Abbildung 10.2: Wurzelortskurve für den kombinierten Regler und Beobachter [FPE15, Figure 7.36]

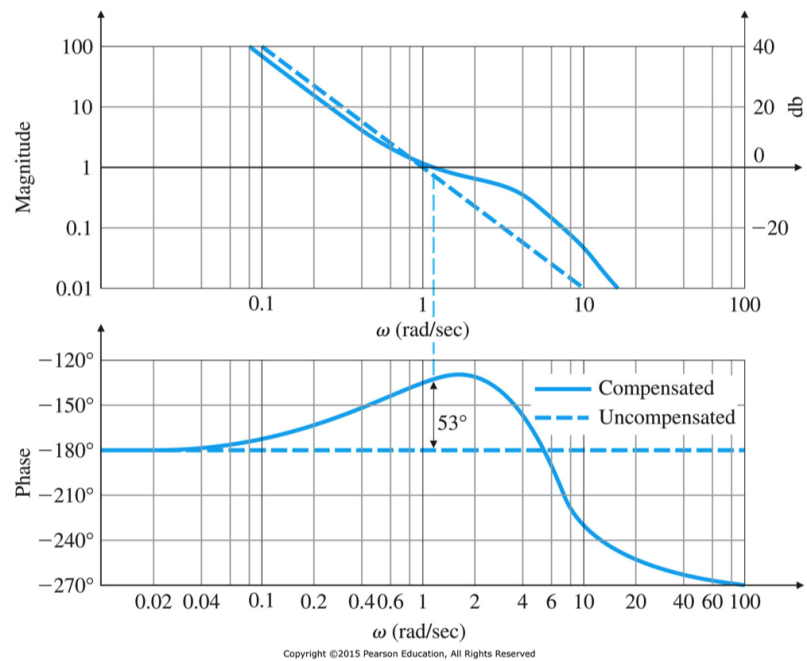


Abbildung 10.3: Bode-Diagramm für $G(s) = 1/s^2$ und $-D_c(s) \cdot G(s)$ [FPE15, Figure 7.37]

$K = 40.4$ sind die vier Pole des geschlossenen Regelkreises gleich wie die spezifizierten. Das Bode-Diagramm in Abbildung 10.3 zeigt, dass die unkompensierte Phasenreserve von 0° auf 53° im kompensierten Fall (also die Reihenschaltung von $G(s)$ und $D_c(s)$) ansteigt. Die Verstärkung $K = 40.4$ führt zu einer Durchtrittskreisfrequenz $\omega_c = 1.35$ rad/sec. Diese beiden Werte passen ungefähr zu den Polen des Reglers mit $\omega_n = 1$ rad/sec und $\zeta = \sqrt{2}$, was wir erwarten würden, weil die langsamen Reglerpole in der Systemantwort über die schnellen Beobachterpole dominieren.

10.1.2 Beispiel. Kompensatorentwurf für einen Gleichstrom-Servo [FPE15, Example 7.29]

Entwerfe mit Zustandsraum-Polplatzierungsmethode einen Kompensator für einen Gleichstrom-Servomotor mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

Nutze die Zustandsraumdarstellung in Beobachtungsnormalform, platziere die Reglerpole bei $p_c = [-1.42, -1.04 \pm 2.14j]$ und die Beobachterpole bei $p_e = [-4.25, -3.13 \pm 6.41j]$

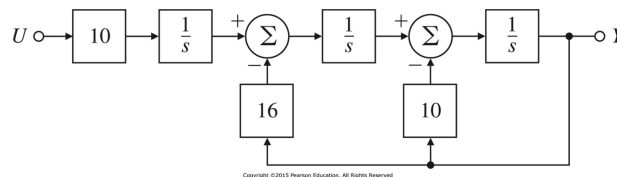


Abbildung 10.4: DC-Servo in Beobachtungsnormalform [FPE15, Figure 7.41] [FPE15, Figure 7.41]

Lösung. Abbildung 10.4 zeigt ein Blockdiagramm dieses Systems in Beobachtungsnormalform. Mit folgenden Matlab-Befehlen werden die Zustandsraummatrizen, die Regler- und Beobacherverstärkungen und die Übertragungsfunktion des Kompensators berechnet und schließlich die Wurzelortskurve von $-D_c(s)G(s)$ geplottet.

```
s=tf('s');
G=10/(s*(s+2)*(s+8))
[A B C D]=ssdata(bn_form(G));
pc=[-1.42 -1.04+2.14*i -1.04-2.14*i];
K=place(A,B,pc)
pe=[-4.25 -3.13+6.41*i -3.13-6.41*i];
Lt=place(A',C',pe);L=Lt'
[num,den]=ss2tf(A-B*K-L*C,L,-K,0);
Dc=tf(num,den);
roots(den)
rlocus(-G*Dc)
```

Der berechnete Kompensator hat einen instabilen Pol bei $s = +1.88$. Ein instabiler Kompensator ist üblicherweise nicht akzeptabel, weil es schwierig ist, den Kompensator oder das System im aufgeschnittenen Regelkreis zu testen. In manchen Fällen kann eine bessere Regelung mit einem instabilen Kompensator erreicht werden, so dass möglicherweise diese Unannehmlichkeit in Kauf genommen werden kann.

Abbildung 10.5 zeigt die WOK und die Pole für die berechnete Verstärkung $K = 190$. Die Pole entsprechen den Sollpolen der geschlossene Regelkreis ist somit stabil. Die WOK zeigt, dass eine direkte

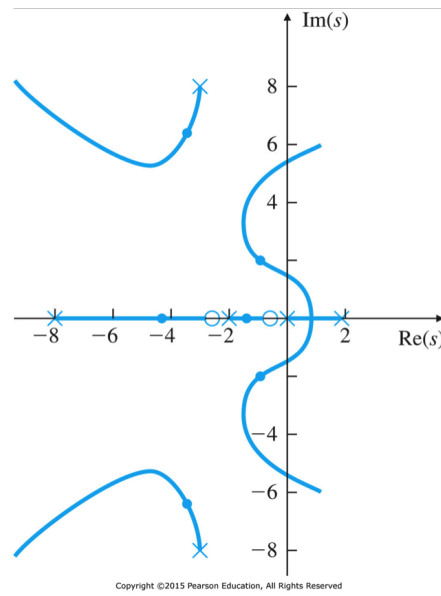


Abbildung 10.5: WOK für die Polplatzierung des DC-Servo [FPE15, Figure 7.42]

Konsequenz des instabilen Kompensators ist, dass das System instabil wird wenn die Verstärkung von ihrem nominalen Wert verringert wird. So ein System nennt man *bedingt stabil* und sollte nach Möglichkeit vermieden werden. Sättigung von Stellgliedern in Folge großer Signale führt zur Verringerung der effektive Verstärkung, so dass ein bedingt stabiles System dann instabil werden kann. Zusätzlich, wenn beim Einschalten des Systems die Verstärkung kontinuierlich von 0 hochgefahren wird, wäre so ein System in Anfangszustand instabil. Zur Lösung dieses Problems lässt sich ein reduzierter Beobachter verwenden, der nur die nicht gemessenen Zustände beobachtet, siehe [FPE15, Kapitel 7.7.2 und Example 7.29].

A Anhang

A.1 Tabellen

Tabelle A.1: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightsquigarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \rightsquigarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - T_1) \rightsquigarrow F(s)e^{-sT_1}$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t) \rightsquigarrow F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{df(t)}{dt} \rightsquigarrow sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \rightsquigarrow s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df}{dt} \right _0$
n -fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightsquigarrow s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right _0$
Differentiation im Bildereich	$-t f(t) \rightsquigarrow \frac{d}{ds} F(s)$
n -fache Differentiation im B'bereich	$(-t)^n f(t) \rightsquigarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightsquigarrow \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \rightsquigarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} (sF(s))$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$

Tabelle A.2: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$f(t), t > 0$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$ oder $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
13	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$1 - e^{-at}(\cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t)$	$\frac{a^2 + \omega_0^2}{s((s+a)^2 + \omega_0^2)}$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.
2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

x_1 :	<i>Einfache</i> Nullstelle	→	$\frac{A}{x-x_1}$
x_1 :	<i>Zweifache</i> Nullstelle	→	$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$
\vdots			
x_1 :	<i>r-fache</i> Nullstelle	→	$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
$x^2 + ax + b$:	<i>1-facher</i> quadratischer Term	→	$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$
$(x^2 + ax + b)^2$:	<i>2-facher</i> quadratischer Term	→	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}$
$(x^2 + ax + b)^r$:	<i>r-facher</i> quadratischer Term	→	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+ax+b)^r}$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.
4. Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich*, oder bei einfachen Nullstellen auch durch Einsetzen der Nullstelle bestimmen.

Abbildung A.1: Algorithmus zur Partialbruchzerlegung

A.2 Asymptoten der Wurzelortskurve

Aus Lücke 5.8 folgt nach Ausmultiplikation der Wurzelfaktoren:

$$K = - \frac{s^n - s^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i + \dots}{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots} \quad (\text{binomische Formel})$$

$$= -s^{n-m} \frac{1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n p_i + \dots}{1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m z_i + \dots} \quad (s^n \text{ bzw. } s^m \text{ ausklammern})$$

Vernachlässigung von Termen mit $\frac{1}{s^k}$ ($k > 1$) führt auf eine Funktion der Form

$$K(x, y) = -s^{n-m} \frac{1-x}{1-y} \quad \text{mit } x = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n p_i \text{ und } y = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m z_i$$

Die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung von $K(x, y)$ um den Punkt $(0, 0)$, also für $s = \infty$, bis zur zweiten Ordnung ist

$$\begin{aligned} K(x, y) &\approx K(0, 0) + x \left. \frac{\partial K}{\partial x} \right|_{(0,0)} + y \left. \frac{\partial K}{\partial y} \right|_{(0,0)} \\ &= -s^{n-m} \left(1 + x \frac{-1}{1-0} + y \frac{1-0}{(1-0)^2} \right) \\ &= -s^{n-m} (1 - (x - y)) \end{aligned}$$

Die Werte von x und y wieder eingesetzt ergibt dann

$$K = -s^{n-m} \left(1 - \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)$$

Daraus folgt schließlich

$$K^{\frac{1}{n-m}} (-1)^{\frac{1}{n-m}} = s \underbrace{\left(1 - \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)^{\frac{1}{n-m}}}_{f(x)=(1-x)^k}$$

Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um $x = 0$: $f(x) \approx 1 + f_x|_0 x = 1 - kx$ führt auf

$$K^{\frac{1}{n-m}} (-1)^{\frac{1}{n-m}} = s \left(1 - \frac{1}{s} \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \right) = s - \alpha \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (\text{A.2})$$

der sogenannte *Polschwerpunkt*. Aus (A.1) ergibt sich

$$s = \alpha + (-1)^{\frac{1}{n-m}} \sqrt[n-m]{K} \quad (\text{A.3})$$

Dies ist zwar eine *Näherung* für die Wurzelortskurve, aber die *exakte* Berechnung für deren *Asymptoten*. Da die $n - m$ Wurzeln der Gleichung

$$z = (-1)^{\frac{1}{n-m}}$$

bekanntlich gleich $z_q = e^{j \frac{2q-1}{n-m} \pi}$ ($q = 1, 2, \dots, n-m$) sind, bilden die Asymptoten einen $(n-m)$ -strahligen Stern mit dem Zentrum im Polschwerpunkt und den Strahlrichtungen

$$\psi_q = \frac{2q-1}{n-m} \pi \quad (\text{A.4})$$

A.3 Zustandstransformation

Betrachte ein System, das durch folgende Zustandsgleichungen beschrieben ist:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (\text{A.5a})$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \quad (\text{A.5b})$$

Wie schon gezeigt ist dies nicht die einzige Beschreibung des dynamischen Systems. Wir betrachten eine Änderung des Zustands \mathbf{x} zu einem neuen Zustand \mathbf{z} , der eine lineare Transformation von \mathbf{x} ist. Mit einer nichtsingulären Transformationsmatrix \mathbf{T} sei

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (\text{A.6})$$

Gleichung (A.6) in die Systemgleichung (A.5a) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \\ \dot{\mathbf{z}} &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}}_{\bar{\mathbf{B}}}u \\ \dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}u \end{aligned}$$

A Anhang

Dann setzen wir Gleichung (A.6) noch in die Messgleichung (A.5b) ein.

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{CT}_{\bar{C}} z + \underbrace{Ju}_{\bar{D}} \\ &= \bar{C}z + \bar{D}u \end{aligned}$$

Das transformierte System ist somit

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}z + \bar{D}u \end{aligned}$$

mit

$$\bar{A} = T^{-1}AT \tag{A.7a}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B \tag{A.7b}$$

$$\bar{C} = CT \tag{A.7c}$$

$$\bar{D} = D \tag{A.7d}$$

Weil T beliebig ist, ist folgende Behauptung bestätigt:

Jede Darstellung einer Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ entspricht unendlich vielen Darstellungen in Zustandsform.