Jorge Bogarin

ENTSCHEIDBARKEIT UND SEMIOSIS

1. Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Die Turingsche These besagt, daß der durch die Turingmaschine formalisierte Begriff sich mit dem intuitiven Begriff "Algorithmus" deckt.[1] Andererseits stellen formale Grammatiken eine Formalisierung des intuitiven Begriffes "erzeugbare Menge" dar.[2]

Beide Begriffe sind wiederum mit dem Begriff der Berechenbarkeit eng verbunden. Dieser wird benutzt, um zwei Charakterisierungen von Mengen einzuführen: Eine Menge heißt *rekursiv* oder *entscheidbar*, wenn es eine effektive Prozedur gibt, die innerhalb eines endlichen Zeitraumes bestimmen kann, ob ein gegebenes Wort ein Element dieser Menge ist oder nicht. Diese Entscheidung kann z.B. von einer Turingmaschine getroffen werden.
Eine Menge heißt *rekursiv-aufzählbar, effektiv-aufzählbar* oder *effektiv-abzählbar*, wenn es eine berechenbare Abzählung für sie gibt, d.h., wenn ihre Elemente effektiv abgezählt werden können. Wenn eine Menge rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv ist, ist es zwar möglich, für ein beliebiges Wort gegebenenfalls festzustellen, daß es zu dieser Menge gehört, aber es ist nicht möglich, für ein beliebiges Wort festzustellen, daß es nicht zu dieser Menge gehört. Das hängt damit zusammen, daß es, solange die Turingmaschine, die die Akzeptorfunktion definiert, noch nicht angehalten hat, nicht möglich ist vorauszusagen, ob sie zu einem späteren Zeitpunkt anhalten wird oder nicht. Die Entscheidbarkeit des Halteproblems bei Turingmaschinen kommt hier ins Spiel.

Wenn eine Menge nicht *rekursiv-aufzählbar* ist, ist keine dieser Operationen ausführbar. Was die Beziehung zwischen rekursiven und rekursiv-aufzählbaren Mengen betrifft, kann folgendes festgestellt werden:

1. Jede rekursive Menge ist rekursiv-aufzählbar.
2. Eine rekursiv-aufzählbare Menge ist genau dann rekursiv, wenn ihre Komplementärmenge auch rekursiv-aufzählbar ist.
3. Es gibt rekursiv-aufzählbare Mengen, die nicht rekursiv sind.
4. Es gibt abzählbare Mengen, die nicht rekursiv-aufzählbar sind.

Eine Teilmenge einer rekursiven Menge ist nicht unbedingt rekursiv: Wenn eine Sprache L über dem Alphabet V rekursiv-aufzählbar ist, ohne rekursiv zu sein,

1 A. Turing, *Computability and lambda-definability*, S. 153ff.
2 J. Loeckx, *Algorithmentheorie*, S. 183.

dann ist $\tilde{L}$, d.h. die Komplementärsprache von L relativ zu V, nicht rekursiv-aufzählbar; sie ist aber eine Teilmenge der rekursiven Menge V*.
Dies deutet darauf hin,

> ... daß eine rekursive Menge sich von einer nicht rekursiven Menge durch eine geringere "Mannigfaltigkeit" ihrer Elemente unterscheidet und nicht durch eine geringere "Anzahl" ihrer Elemente. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die rekursiv-aufzählbaren Mengen, aber nicht für die abzählbaren Mengen.[3]

Worin diese größere oder geringere *Mannigfaltigkeit* besteht, ist, in Bezug auf die Grundlagen des Problems, sicherlich die entscheidende Frage. Bevor wir uns damit beschäftigen, sollen noch zwei Begriffe eingeführt werden.

2. Prozeduren und Algorithmen

Bis jetzt haben wir die Begriffe "Algorithmus" und "effektive Prozedur" synonym verwendet. Die nun folgende Unterscheidung soll dazu dienen, die folgenden Ausführungen zu erleichtern:

> A mathematical method is said to be a *procedure* if after giving the values of the variables it can be performed fully mechanically without any risk of encountering unexpected situations.[4]

Eine Prozedur hält an, wenn bei gegebenen Anfangsdaten nach einer bestimmten Anzahl von Schriften entweder keine Anweisung mehr auszuführen ist oder aber zuletzt eine Halt-Anweisung ausgeführt wurde.[5]

> A procedure is called *algorithm* if it comes to halt after a finite number of steps no matter what values are given for the variables.[6]

Der entscheidende Unterschied zu einem Algorithmus besteht darin, daß eine Prozedur nicht anhalten muß; solange eine Prozedur läuft, bleibt offen, ob sie eventuell anhalten und ein Ergebnis produzieren wird. Wir können also unsere zwei Typen von Mengen auch folgendermaßen definieren:
Eine Menge M heißt *rekursiv*, wenn es einen Algorithmus gibt, mit dessen Hilfe man für jedes Wort w feststellen kann, ob w zu M gehört oder nicht.
Kann man diese Entscheidung nur mit Hilfe einer Prozedur treffen, so heißt M *rekursiv-aufzählbar*.

3 J. Loeckx, *Algorithmentheorie*, S. 118.
4 G. Rèvèsz, *Introduction to Formal Languages*, S. 94.
5 R. Herschel, *Einführung in die Theorie der Automaten...*, S. 196.
6 G. Rèvèsz, a.a.O., S. 95.

3. Von rekursiven zu rekursiv-aufzählbaren Sprachen

Die Sprache eines Automaten hört auf, rekursiv zu sein, wenn dieser einen unbeschränkten Zugang zum Maschinenband hat, d.h., wenn die Begrenzungszeichen eliminiert werden. Dadurch verwandelt sich der linear beschränkte Automat in eine Turingmaschine. Die Begrenzungszeichen sind nichts anderes als Indices, die folgendermaßen zu interpretieren sind: "links (bzw. rechts) von hier ist das leere Band". Peirce hat "prepositional phrases" wie "on the right (or left) of" eindeutig als Indices kategorisiert.[7] Mit der Eliminierung dieser Indices verschwindet auch die Entscheidbarkeit der akzeptierten Sprache.

Bei den Regelgrammatiken liegt eine ähnliche Situation vor. Grammatiken vom Typ 3, 2 und 1 sind entscheidbar, diejenigen vom Typ 0 dagegen nicht. Dieser Umstand resultiert aus dem Unterschied zwischen kontextabhängigen und allgemeinen Regelgrammatiken. Die ersteren generieren rekursive Mengen, die letzteren rekursiv-aufzählbare Mengen.[8] Um die Ursache dafür festzustellen, betrachten wir die Produktionsregeln beider Grammatiktypen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Grammatiken vom Typ 1 *monoton* sind. Das heißt, daß die Wörter einer Sprache vom Typ 1 bei der Ableitung aus dem Startwort S nicht kürzer werden können. Ist also G monoton, dann folgt aus $w \overset{*}{=}> w'$ stets $l(w) \leq l(w')$. Dabei kann das Gleichheitszeichen nur beschränkt hintereinander auftreten. Durch einen Algorithmus ist entscheidbar, ob ein Wort zu einer solchen Sprache gehört oder nicht. Ist ein Wort w mit $l(w)=m$ gegeben, so kann man von S aus alle Wörter der Länge m in endlich vielen Schritten ableiten und nachsehen, ob w darunter vorkommt. Jede monotone Regelsprache ist entscheidbar.

Die Entscheidbarkeit der Sprachen vom Typ 1 beruht auf der Möglichkeit, zuerst alle Wörter der Länge 1, dann als Wörter der Länge 2, usw. zu generieren. Außerdem können Wörter derselben Länge in "alphabetischer Reihenfolge" geordnet werden. Man kann also auch von einer "Vorgänger-Nachfolger"-Beziehung sprechen, die bis zu diesem Punkt die Generierung der Wörter in Form der Monotonie der Grammatik beherrscht. Die Feststellung, daß der Ordnungstyp "Nachfolger" einen indexikalischen Charakter hat, ist eines der festen Ergebnisse der semiotischen Forschung.[9]

Die Produktionsregeln einer Grammatik vom Typ 0 unterliegen keinen Einschränkungen mehr. Die Wörter können während der Ableitung länger oder kürzer werden oder dieselbe Länge behalten. Man kann sie nicht mehr nach ihrer

7 Ch. S. Peirce, CP 2.290.

8 Man darf aber nicht vergessen, daß es auch rekursive Mengen gibt, die keine Sprachen vom Typ 1 sind.

9 Vgl. M. Bense, *Semiotische Prozesse und Systeme*, S. 170. Auch: ders., *Axiomatik und Semiotik*, S. 12.

Länge, sondern nur noch nach der Länge der Ableitungen anordnen. Mit der Monotonie der Grammatik geht auch die Entscheidbarkeit der Sprache verloren.[10] Die generierten Sprachen überschreiten dann den Rahmen der rekursiven Mengen.

THESE: *Sowohl bei den Automaten als auch bei den Grammatiken wird der Übergang von Rekursivität zu Rekursiv-Aufzählbarkeit von dem Verlust eines indexikalischen Elements - die Begrenzungszeichen bzw. die Monotonie - begleitet. Dieser Vorgang wird durch die generative Semiose wiedergegeben, die die Zeichenklasse der Grammatik vom Typ 1 in die Zeichenklasse der Grammatik vom Typ 0 überführt.*

$$\mathrm{Zkl.}_{T1}\quad 3.2\quad (2.2)\quad 1.3 \quad ==> \quad \mathrm{Zkl.}_{TO}\quad 3.2\quad (2.3)\quad 1.3$$

Der Objektbezug gewinnt dabei an Intelligibilität, der Index wird zum Symbol, der Repräsentationswert der Zeichenklasse wird erhöht, aber der Anteil an Zweitheit im Zeichen vermindert. In der Realitätsthematik wird der Index durch eine Zweitheit höherer Ordnung, ein Dicent, ersetzt:

$$\mathrm{Rth.}_{T1}\quad 3.1\quad (2.2)\quad 2.3 \quad \longmapsto \quad \mathrm{Rth.}_{TO}\quad 3.1\quad (3.2)\quad 2.3$$

Gleichzeitig wird das Kräfteverhältnis zwischen Objekt und Interpretant umgekehrt: aus einem Objekt-thematisierten Interpretanten wird ein Interpretanten-thematisiertes Objekt. Beide sind "Mittel-lose" Realitäten.

Sicherlich hat C. S. Peirce diese Problematik der Berechenbarkeit nicht gekannt, aber seine Worte klingen fast prophetisch, wenn er über das dicentisch-indexikalische und das dicentisch-symbolische Legizeichen spricht:

> A Dicent Indexical Legisign is any general type or law, however established, which requires each instance of it to be really affected by its Object in such a manner as to furnish definite information concerning that Object.[11]

Das ist der Fall bei Grammatiken vom Typ 1 (bzw. 2 und 3): Sie sind "affected" von ihren Sprachen "in such a manner", daß man in einer endlichen Zeit bestimmen kann, ob ein gegebenes Wort ein Element dieser Sprache ist oder nicht.

10 Das Wortproblem bei Semi-Thue-Systemen ist lösbar im Fall $l(w) \leq l(w')$.
11 Ch. S. Peirce, CP 2.260.

> [The] intended Interpretant looks upon the Dicent Symbol as a Dicent Indexical Legisign; and if it be true, it does partake of this nature, although this does not represent its whole nature.[12]

Diese Erklärung kann mit zwei Ergebnisen unserer Untersuchungen in Zusammenhang gebracht werden. Erstens sind alle rekursiven Mengen rekursiv-aufzählbar, aber nicht umgekehrt. Zweitens: wenn eine Menge rekursiv-aufzählbar, aber nicht rekursiv ist - wie die Sprachen vom Typ O -, ist es zwar möglich, für ein beliebiges Wort festzustellen, daß es zu dieser Menge gehört, wenn dies der Fall ist ("if it be true, it does partake of this nature"), aber es ist nicht möglich, für ein beliebiges Wort festzustellen, daß es nicht zu dieser Menge gehört ("although this does not represent its whole nature").

Die neue Zeichenklasse (3.2 2.3 1.3) ist zwar immer noch "der Behauptung fähig", aber nur noch in geringerem Maße. Interessanterweise scheint diese Veränderung vom Objekt- und nicht vom Interpretantenbezug beeinflußt zu sein. Das ist nicht selbstverständlich, weil Unterschiede dieser Art mit dem Kontext des Zeichens zusammenhängen, d.h. mit dem Interpretantenbezug, der einen offenen, geschlossenen oder vollständigen Kontext fixiert. Wir wollen dafür zuerst eine formale und dann eine ontologische Begründung geben.

Das formale Argument resultiert aus der Großen Matrix. Wenn wir das von E. Walther[13] eingeführte Schema

$$3.a \quad 3.b \qquad 2.c \quad 2.d \qquad 1.e \quad 1.f$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \{.1., .2., .3.\}$ voraussetzen und die stärkste Einschränkung $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$ annehmen, sind die folgenden Stufen zwischen 3.2 2.2 1.3 und 3.2 2.3 1.3 möglich:

(1)	3.2	3.2	2.2	2.2	1.3	1.3
(2)	3.2	3.2	2.2	2.3	1.3	1.3
(3)	3.2	3.2	2.3	2.3	1.3	1.3
(4)	3.2	3.3	2.3	2.3	1.3	1.3

Eine Grammatik vom Typ 1 wird von der Zeichenklasse (1), eine vom Typ 0 von der Zeichenklasse (4) repräsentiert. *Der symbolische Hauptwert des Objektbezugs wird also von dem argumentischen Stellenwert des Interpretantenbezugs nach dem Geordnetheitsprinzip determiniert.* Dieser Vorgang, der in den Zeichenklassen der Kleinen Matrix verborgen bleibt, kann erst mit den Mitteln der er-

12 Ch. S. Peirce, CP 2.262.

13 E. Walther, "Ergänzende Bemerkungen zur Differenzierung...", S. 31ff. Vgl. J. Bogarin, "Drei, zehn, ...", 1987.

weiterten Matrix dargestellt werden. Entscheidend für den Übergang von Sprachen vom Typ 1 zu Sprachen vom Typ 0 ist demnach der Stellenwert des Interpretantenbezugs, der die generative Semiose bewirkt, wodurch der Index im Objektbezug in ein Symbol verwandelt wird.

Das zweite Argument ist, wie gesagt, ein ontologisches und beruht konsequenterweise auf einer Analyse der Realitätsthematik. Danach hängt die Entscheidbarkeit nicht nur vom Interpretantenbezug ab, sondern auch von einer komplementären Beziehung zwischen Objekt- und Interpretantenbezug als Komponente der Realitätsthematik. Wenn wir die Dualisierungen der drei dicentischen Zeichenklassen und der einzigen argumentischen Zeichenklasse betrachten, stellen wir fest, daß die Zahl der Subzeichen des Objektbezugs 3, 2, 1 oder 0 beträgt, während der Anteil der interpretantenbezogenen Subzeichen umgekehrt proportional ist, d.h. 0, 1, 2 und 3 (s. Bild 1).

(0 I)	$\underline{2.1}$	$\underline{2.2}$	$\underline{2.3}$	(3 O)
(1 I)	3.1	$\underline{2.2}$	$\underline{2.3}$	(2 O)
(2 I)	3.1	3.2	$\underline{2.3}$	(1 O)
(3 I)	3.1	3.2	3.3	(0 O)

Bild 1

Je weiter sich die thematisierte Realität vom Vollständigen Objekt entfernt, desto kleiner wird die Menge ihrer entscheidbaren Eigenschaften. Ich möchte hier von einer abnehmenden "Objekthaftigkeit" sprechen: Den höchsten Grad an *Objekthaftigkeit* (3) erreicht das Objekt-thematisierte bzw. Vollständige Objekt, den niedrigsten Grad (0) der als Grenzwert geltende, objektlose Vollständige Interpretant. Das repertoirielle Mittel spielt in diesem Zusammenhang keine direkte Rolle. Das alles klingt einigermaßen paradox, und zwar deshalb, weil wir gewöhnt sind, syntaktische Probleme mit dem Mittelbezug in Verbindung zu bringen. Bei der Berechenbarkeit geht es um einen Begriff, der sich auf syntaktische Kategorien wie Ableitbarkeit oder Generierbarkeit stützt. Trotzdem haben hier Objekt- und Interpretantenbezug die herausragende Stellung inne. Das zeigt, meiner Überzeugung nach, daß die "unterscheidbaren Phasen der Zeichenentwicklung innerhalb der triadischen Relation" (Bense), d.h. die *Semiosen*, nicht mit den Morrisschen "Dimensionen des Zeichenprozesses" - der syntaktischen, der semantischen und der pragmatischen[14] - zu verwechseln sind. "Alle eigentlichen Semiosen sind zeichen-, also relationsinterne Prozesse ..."[15]
Bemerkenswert sind außerdem die Symmetrie (Drehachse: Hauptdiagonale) und die Diagonalität des Gebildes, das von den vier oben aufgelisteten Realitätsthematiken (Bild 1) erzeugt wird.

14 C. W. Morris, *Grundlagen der Zeichentheorie*, S. 23ff.
15 M. Bense, *Das Universum der Zeichen*, S. 23.

Einen ähnlichen Verlust an Objekthaftigkeit hat Max Bense im Übergang vom vollständigen Objekt der klassischen Physik zum unvollständigen Objekt der Quantenmechanik festgestellt.[16] Auch das Objekt als "l'objet de notre conception", wie es Peirce 1903 in der Pragmatischen Maxime definiert, ist ein unvollständiges, regelhaftes, konstruiertes Objekt.[17] Dieses Objekt wird ja durch seine praktischen Wirkungen bzw. durch alle denkbaren experimentellen Phänomene, die die Bejahung oder Verneinung seines Begriffes implizieren könnten, definiert.[18]

Neben der hier behandelten Entscheidbarkeit bzw. Aufzählbarkeit kann man auch von einer relativen Rekursivität bzw. Aufzählbarkeit ausgehen, und zwar mit Hilfe des Begriffs der *Turingmaschine mit Orakel*. Nehmen wir A als eine Sprache $A \subseteq V_T^*$. Eine Turingmaschine mit Orakel A ist in der Lage zu entscheiden, ob eine beliebige Zeichenreihe ein Wort der Sprache A ist oder nicht. Wenn A eine rekursive Menge ist, dann kann das Orakel von einer anderen Turingmaschine simuliert werden, und die Sprache, die von der Turingmaschine mit Orakel A akzeptiert wird, ist rekursiv-aufzählbar. Wenn aber A eine nicht-rekursive Menge ist und ein Orakel für sie zur Verfügung steht, dann wird eine Turingmaschine mit Orakel A eine Menge akzeptieren, die nicht rekursiv-aufzählbar ist.

> We denote the Turing machine M with oracle A by M^A. A set L is *recursively enumerable with respect to A* if $L = L(M^A)$ for some TM M. A set L is *recursive with respect to A* if $L = L(M^A)$ for some TM M^A that always halts.[19]

Das Orakel, in dem hier verwendeten Sinn, hat die Aufgabe, die Leistungsfähigkeit der Turingmaschine so zu steigern, daß sie Mengen niedrigerer Objekthaftigkeit akzeptieren kann.

4. Die nicht rekursiv-aufzählbaren Sprachen

Wenn eine Menge nicht rekursiv-aufzählbar ist, ist es nicht möglich, (a) für ein beliebiges Wort zu entscheiden, ob es zu dieser Menge gehört oder nicht, (b) ihre Elemente aufzuzählen, (c) eine Turingmaschine zu konstruieren, die genau diese Menge akzeptiert oder (d) eine Grammatik zu definieren, die alle und nur die Elemente dieser Menge generiert.

Die Menge aller Mengen $M \subseteq 2^{V_T^*}$ ist nicht abzählbar. Andererseits ist die Menge aller rekursiv-aufzählbaren Mengen $A \subseteq 2^{V_T^*}$ rekursiv-aufzählbar. Das heißt, daß es abzählbar viele Mengen $N \subseteq 2^{V_T^*}$ gibt, die nicht rekursiv-aufzählbar sind.

16 M. Bense, *Vermittlung der Realitäten*, S. 65ff.
17 Ch. S. Peirce, CP 5.18, 5.402.
18 Ch. S. Peirce, CP 5.412.
19 Hopcroft / Ullman, *Introduction to Automata Theory ...*, S. 210.

Die Reihe der unlösbaren Probleme beginnt da, wo eine Sprache (vom Typ 2) die Fähigkeit zu zählen bekommt, d.h., wenn zentralrekursive Produktionsregeln in der Grammatik erlaubt werden bzw. wenn der akzeptierende Automat über eine unbegrenzte Speichereinheit verfügt.

> ... many properties of families of languages are undecidable because of the "ability to count" or "compare" in these languages.[20]

Die nächste große Veränderung, der Verlust der Rekursivität, findet in dem Moment statt, in dem die Grammatik aufhört, monoton zu sein bzw. wenn der Automat einen uneingeschränkten Zugang zum Maschinenband hat. Das erste Phänomen wird semiotisch durch eine generative Semiose im Mittelbezug (1.2 → 1.3) wiedergegeben. Das Mittel der Repräsentation wird abstrakt, allgemein, regelhaft. Der zweite Übergang stellt ebenfalls eine generative Semiose dar, diesmal aber im Objektbezug (2.2 → 2.3): Die Zweitheit der Zweitheit verschwindet; sie wird durch ein Symbol ersetzt.

Und nun stellt sich die Frage, wie man den Vorgang des Überschreitens der Grenze der Aufzählbarkeit semiotisch fundieren kann. Geht es hier um die generative Semiose, die zur argumentischen Zeichenklasse führt? Oder haben wir es mit einer in mehreren Bezügen gleichzeitig auftretenden Retrosemiose zu tun? Ich muß gestehen, daß ich keine definitive Antwort auf diese Fragen geben kann. Eine (oder mehrere) der folgenden Alternativen könnten jedoch zutreffen:

VERMUTUNGEN

(1) Man könnte eine Weise finden, die Zeichenklasse 3.3 2.3 1.3 als Repräsentation des Grenzwertes einer Reihe von immer stärkeren formalen Systemen zu definieren. Dieses Zeichen würde dann zumindest bestimmte nicht rekursiv-aufzählbare Sprachen repräsentieren.

(2) Es kann sein, daß, wenn die "Mannigfaltigkeit" der Elemente einer Menge bzw. Sprache zu groß wird, eine degenerative Semiose hervorgerufen wird, die ein rhematisches Zeichen erzeugt. In Frage kommen dabei Zeichenklassen, die trotz ihres offenen Konnexes eine hohe Semiotizität haben, z.B. 3.1 2.2 1.3 (Rpw. = 12) und 3.1 2.3 1.3 (Rpw. = 13).

(3) Es ist auch möglich, daß es verschiedene Arten von nicht rekursiv-aufzählbaren Sprachen gibt und daß diese nicht mit der Kleinen Matrix, sondern erst mit den präziseren Differenzierungen der Großen Mattix bestimmt werden können.

20 Hartmanis / Hopcroft, "What makes ...", S. 368.

Einen Zugang zu den nicht rekursiv-aufzählbaren Mengen kann man sich auch dadurch verschaffen, daß man das Verhältnis zwischen axiomatischen Systemen und interpretierten Theorien beobachtet.

Ein axiomatisches System besteht im wesentlichen aus einer Liste von *Axiomen*, und aus *Regeln*, die besagen, wie man aus diesen Axiomen die übrigen Sätze oder *Theoreme* der Theorie gewinnen kann. Seiner Natur nach definiert ein axiomatisches System eine rekursiv-aufzählbare Menge. Gödel hat bewiesen, daß die Theorie der natürlichen Zahlen nicht durch ein axiomatisches System definiert werden kann. Das rührt daher, daß die Menge der Sätze dieser Theorie nicht rekursiv-aufzählbar ist.[21] Es gibt also keine Turingmaschine, die genau die Wörter (bzw. Sätze) der Zahlentheorie akzeptiert. Entsprechendes gilt für die Regelgrammatik: Keine Grammatik (vom Typ 0) kann genau die Sätze der genannten Theorie generieren.

1939 publizierte Turing einen Aufsatz[22], in dem er versuchte, den Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu überwinden,

> ... by replacing a single given logic by a system of logics obtained from one another by transfinite iterations. What is iterated is the addition of principles which are intuitively as evident as the given system, but which yield stronger logics; e.g. one iterates the adjunction of a sentence which asserts that the given logic is consistent.[23/24]

In demselben Artikel führte Turing die Idee der Turingmaschine mit "oracle" ein, mit deren Hilfe die unentscheidbaren Probleme analysiert und klassifiziert werden können.

Es ist in diesem Zusammenhang nicht ohne Interesse, daß die einzige Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit der Turingmaschine (ohne Orakel) zu steigern, "... is to allow for infinitely many steps."[25] Das Wortproblem einer rekursiv-aufzählbaren Sprache ist in abzählbar unendlichen Schritten entscheidbar. Leider würde in einer auf diese Art verallgemeinerten Theorie der berechenbaren Funktionen der *formale* Begriff "Berechenbarkeit" nicht mehr dem *intuitiven* Begriff "Berechenbarkeit" entsprechen. Handelt es sich hier jedoch um Einschränkungen des axiomatisch-deduktiven Vorgehens, der mathematischen Systeme oder des menschlichen Bewußtseins überhaupt?

21 Vgl. J. Loeckx, *Algorithmentheorie*, S. 119.

22 A. Turing, "Systems of Logic Based on Ordinals", S. 155ff.

23 M. Davis, *The Undecidable*, S. 154.

24 s. auch H. Wang, "The formalisation of mathematics", 1954, wo ein ins Unendliche "wachsendes" System entworfen wird.

25 G. Rèvèsz, *Introduction to Formal languages*, S. 107.

5. Unlösbare Probleme und menschliche Intelligenz

Die Existenz unlösbarer Entscheidungsprobleme im allgemeinen und des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes im besonderen wurde von manchen Philosophen und Wissenschaftstheoretikern als der Beweis dafür angesehen, "... that no machine can be a complete or adequate model of the mind, that minds are essentially different from machines."[26]

Diese Position wurde u.a. von J. R. Lucas vertreten und von F. H. George folgendermaßen zusammengefaßt:

> Gödel's theorem shows that any consistent formal system strong enough to produce arithmetic fails to prove, within its own structure, theorems that we, as humans ("minds"), can nevertheless see to be true. From this he argues that "minds" can do more than machines, since machines are essentially formal systems of this same type, and subject to the limitations implied by Gödel's theorem.[27]

Auch Nagel und Newman sind der Überzeugung, daß

> ... the discovery that there are arithmetical truths which cannot be demonstrated formally [means] ... that the resources of the human intellect have not been, and cannot be, fully formalised ...[28]

Andere Autoren sind der Auffassung, daß der Unvollständigkeitssatz Gödels

> ... says nothing to suggest that a human being is not just as much as a logistic system or formal system or an axiomatic system as a formal system we ourselves construct.[29]

Der Gödelsche Beweis "... does not demonstrate a difference between minds and machines"[30] und sei als solcher "... no more an obstacle to a computer than to ourselves".[31] Emil Post war der Meinung, daß die Existenz unentscheidbarer Probleme eher auf "... limitations of the mathematicizing power of Homo Sapiens"[32] hindeutet.

Dieser letzte Gedanke ist von großem Interesse, vor allem wenn man bedenkt, daß die semiotische Repräsentation der mathematischen Wissenschaft die maxi-

26 J. R. Lucas, "Minds, Machines and Gödel", S. 44.
27 F. H. George, "Minds, Machines and Gödel: Another Reply to Mr. Lucas", S. 62.
28 E. Nagel und J. Newman, *Gödel's Proof*, S. 101.
29 F. H. George, *Philosophical Foundations of Cybernetics*, S. 36.
30 C. H. Whiteley, "Minds, Machines and Gödel: a reply to Mr. Lucas", S. 62.
31 M. A. Arbib, *Brains, Machines and Mathematics*, 1965.
32 E. Post, "Finite Combinatory Processes", S. 291.

male Extension besitzt. Das heißt,

> daß tatsächlich für jede der 10 Zeichenklassen ein Begriff existiert, der zu den Grundlagen der Mathematik gehört und ... zur Konstituierung eines formalen, axiomatisch-deduktiven Systems der Mathematik, notwendig zu sein scheint.[33]

Das würde bedeuten, daß die Existenz unentscheidbarer Fragen gleichzeitig auf eine Begrenzung der Menschen hindeutet, Zeichensysteme aufzustellen und zu gebrauchen. Ferner, da wir anscheinend "kein Vermögen haben, ohne Zeichen zu denken"[34], geht es hier vielleicht sogar um Einschränkungen des menschlichen Bewußtseins überhaupt. Die in der Theorie der rekursiven Funktionen gewonnenen Ergebnisse würden uns also "tiefste Einblicke in die Endlichkeit unseres Denkvermögens"[35] gewinnen lassen.

Sicher ist aber, daß der Begriff des Zeichens in diesem Zusammenhang eine entscheidende Rolle spielt. Wie Bense in "Berichte über die Eigenrealität von Zeichen"[36] hervorgehoben hat, wird die Zeichenklasse des "Zeichens" als solchem und der "Zahl" als solcher hauptsächlich durch Bestimmungen wie Diagonalität, Selbst-Referenz und Rekursion[37] charakterisiert. Bemerkenswert ist, daß sie auch bei der Untersuchung der unlösbaren Entscheidungsprobleme bzw. des Gödelschen Satzes von großer Bedeutung sind.

Es wird oft behauptet, daß "... the incompleteness theorem is primarily a problem in self-reference".[38] Auch daß "... the essence of the Gödelian formula is that it is self-referring".[39] Vieles spricht aber dafür, daß es sich dabei um eine "relative" Selbst-Referenz handelt:

> ... this self-reference is not any intrinsic property of the Gödel-sentence *but is relative to the Gödel-numbering*, e.g. it may express the proposition that a certain natural number has a certain arithmetical property, but relative to the Gödel- numbering g, this number happens to be the one which g assigns to the sentence expressing this proposition.[40]

33 M. Bense, *Axiomatik und Semiotik*, S. 59.

34 Ch. S. Peirce, CP 5.265.

35 W. Stegmüller, *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit*, S. 1.

36 Vgl. Semiosis 42 (1986) S. 5-13; 43 (1986) S. 5-7; 44 (1986) S. 7-12; 45 (1987) S. 5-13; 46/47 (1987) S. 19-27; 48 (1987) S. 3-8.

37 Über Rekursion s. J. Bogarin, "Semiotische Ansätze ...", 1986.

38 F. H. George, *Philosophical Foundations of Cybernetics*, S. 48.

39 J. R. Lucas, "Minds, Machines and Gödel", S. 56f.

40 J. Webb, "Metamathematics and the Philosophy of Mind", S. 163.

Wenn wir aber eine andere Gödel-Numerierung *g'* wählen, hat die Gödel-Formel *Hh*,

> ... though still expressing the same arithmetical proposition (because it is still the same formula with the same arithmetical interpretation), clearly ... ceased referring to itself, because *h*, relative to *g'*, is no longer the Gödel-number of *H*.[41]

Andererseits ist "... the Gödelian argument [to show that you can produce a formula which is primitive recursive but which is not provable in the formal system] essentially the same as the Cantor argument [for proving the non-enumerability of the real numbers]."[42] Also ist "self-reference closely related to diagonalization".[43] Judson Webb stimmt mit Turing überein, wenn er behauptet:

> ... when we "apply the diagonal process argument correctly", we prove not non-denumerability, but rather, in effect, the non-existence of a positive solution to the *Entscheidungsproblem*.[44]

Die Theorie der rekursiven Funktionen, die sich mit der Berechenbarkeit und den unlösbaren Entscheidungsproblemen beschäftigt, verwendet das Diagonalverfahren als eines ihrer wichtigsten Forschungsinstrumente. H. Rogers, Autor eines klassischen Werks in dieser Disziplin, hat sogar gesagt, daß

> [it] is not inaccurate to say that our theory [the Recursive Functions Theory] is, in large part, a "theory of diagonalization".[45]

Unsere Überlegungen haben uns dazu geführt, "Entscheidbarkeit" durch die verschiedenen Stufen oder Schichten des dicentischen Interpretanten zu definieren. Wir sind von dem kombinatorischen Begriff der Manipulation von uninterpretierten Grundzeichen ausgegangen, wobei nur die Generierbarkeit von Zeichenreihen mit Hilfe von mechanischen Prozeduren (Algorithmen) berücksichtigt wurde, ohne auf den Begriff der *Wahrheit* zurückzugreifen. Dies zeigt, daß die betreffenden automatentheoretischen Prozesse auf einer anderen (tieferen) Stufe der Theorienbildung liegen als die Logik (als die Theorie der logischen Wahrheiten). Zur Charakterisierung und Fundierung solcher Vorgänge bietet sich also der fundamentalkategoriale, ordinale und relationale Begriff der Repräsentation an, in diesem konkreten Fall die dicentischen Dualitätssysteme mit ihren verschiedenen Ordnungs- bzw. Repräsentationswerten.

41 J. Webb, "Metamathematics and the Philosophy of Mind", S. 163.

42 F. H. George, *Philosophical Foundations of Cybernetics*, S. 30.

43 H. Rogers, *Theory of Recursive Functions ...*, S. 291.

44 J. Webb, a.a.O., S. 165n. Webb bezieht sich dabei auf Turing, "On computable numbers with an application ...", S. 132.

45 H. Rogers, *Theory of Recursive Functions ...*, S. 31.

Die nach dem regelhaften Prozeß der Selektion und Verkettung der Elemente aus dem Repertoire aufgetauchte wesentliche Einschränkung der "Unentscheidbarkeit" wird auch ohne Gebrauch des Wahrheitsbegriffs festgestellt und bewiesen. Die Begrenzungen von formalen Systemen, die mit Hilfe von äquivalenten Begriffsbildungen wie "Turing-Berechenbarkeit" (Turing), "Lambda-Definierbarkeit" (Church) oder "rekursive Funktionen" (Gödel) definiert werden können, können ohne den Begriff der Wahrheit ausgedrückt werden. Die Kleenesche Hierarchie von arithmetischen Prädikaten, die als eine Verallgemeinerung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und des Churchschen Satzes über die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik der ersten Stufe verstanden werden kann[46], spielt in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle, denn sie führt "to a purely structural, i.e. syntactical, account of the limitations of formal systems".[47] Der Gödelsche Satz, zum Beispiel, "predicates a simple syntactic property of members of a large class of formal systems".[48] Diese "Gödelschen Divergenzen" (Bense) stellen also in diesem Sinne ein prä-logisches Problem dar.

Es stellt sich nun die Frage, wie man die Unentscheidbarkeit semiotisch bestimmen kann. Nun, wir haben gesehen, daß eine grundlegende Eigenschaft der unentscheidbaren Probleme ihre Selbst-Referenz ist. In dem typischen Fall geht es darum, daß eine Turingmaschine mit bestimmten Eingabedaten nicht fertig werden kann, die die Gödelnummer der betreffenden Maschine darstellen. Die Begrenzung jeder Turingmaschine hat stets mit der Relation der Maschine mit sich selbst zu tun und verkörpert sich in den unentscheidbaren Fragen. Dabei sind zwei Momente von Selbst-Bezug zu unterscheiden:

> The first is that of the Gödel *sentence* in relation to itself [saying of itself that it cannot be proved in the system] ... the second kind of selfreference is that of the formal system or machine in relation to itself. This is simply the fact that the Gödel sentence can be expressed in the symbolism of the formal system.[49]

In der letzteren Variation von Selbst-Referenz ist das formale System oder die Maschine in der Lage, über sich selbst zu "reden". Durch den gedanklichen Trick der Gödelisierung oder Arithmetisierung ist es möglich, metatheoretische Aussagen über das System S in S selbst auszudrücken.

Zu der oben erwähnten Abhängigkeit der Selbst-Referenz von einer bestimmten Gödel-Numerierung muß noch ein anderes indexikalisches Element hinzugenommen werden:

46 S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, S. 272.
47 J. Webb, "Metamathematics and the philosophy of mind", S. 166n.
48 D. Auerbach, "Intentionality and the Gödel Theorems", S. 341.
49 P. Slezak, "Gödel's Theorem and the Mind", S. 49.

> ... the Gödel limitation involves a sentence which is capable of an "indexical" interpretation in view of its specifity to the formal system in which it is expressed.[50]

Alle diese Ideen (Diagonalität, Selbst-Referenz, Indexikalität) deuten darauf hin, daß die Unentscheidbarkeit eng mit dem durch die Zeichenklasse 3.1 2.2 1.3 repräsentierten Begriff des "Zeichens selbst" (bzw. der "Zahl", bzw. des "ästhetischen Zustands") verbunden ist; trotzdem fällt es schwer, die Unentscheidbarkeit mit dieser (oder irgendeiner anderen) Zeichenklasse zu repräsentieren. Ich verfüge nicht über eine genaue Charakterisierung der Beziehung zwischen Unentscheidbarkeit und "Eigenrealität", würde sie aber folgendermaßen umreißen:

(1) Die Unlösbarkeit wird mit dem Zeichen geboren. Unentscheidbarkeit entsteht in dem kreativen, hypothetischen Prozeß der Zeichensetzung bzw. in der algorithmischen Selektion bzw. Generierung der Wörter aus dem Repertoire mit Hilfe von Produktions- oder Zuordnungsregeln.

(2) Jedes Zeichen trägt in sich einen Keim von Unentscheidbarkeit. Ein Zeichen kann, wie auch ein Kunstwerk, "immer auch anders gedacht werden" (Nietzsche). Ein vollständig interpretiertes Zeichen gibt es nicht; denn dann müßte es ein "letztes" Zeichen geben, mit dem der rekursive Prozeß der Interpretation "ausläuft" ("bottoms out").

(3) Unentscheidbarkeit ist kein Zeichen, sondern eine Grenze des Zeichens; sie zeigt die Schranken des "Universums der Zeichen".

(4) Eine präzisere semiotische Bestimmung der Unentscheidbarkeit könnte vielleicht mit Hilfe eines "komplementären" bzw. "negativen" Zeichens oder eines "Anti-Zeichens" erreicht werden. Für diesen Zweck würde die Haupt-Diagonale der Kleinen Matrix (Peirces genuine Kategorien) in Frage kommen. Auf Grund der Äquivalenzen und Affinitäten zwischen der Haupt- und der Nebendiagonale (der "Eigenrealität") spricht Bense in Bezug auf die erstere von einer "Eigenrealität schwächerer Repräsentation" und nennt die Subzeichenfolge 1.1 2.2 3.3 "Kategorienklasse" oder "Kategorienrealität".[51]

Viele Schwierigkeiten, die bei der Untersuchung und Anwendung von Begriffen wie "Diagonalität", "Selbst-Bezug", "Rekursion" oder "(Un-)Entscheidbarkeit" auftreten, können sicherlich mit Hilfe der Abstrakten Semiotik mindestens teilweise beseitigt werden.

50 P. Slezak, "Gödel's Theorem and the Mind", S. 49.
51 M. Bense, "Bericht IV über die 'Eigenrealität' von Zeichen", S. 7, 10.

LITERATUR

Arbib, M. A. *Brains, Machines and Mathematics.* New York: McGraw Hill 1965

Auerbach, David D. "Intentionality and the Gödel Theorems". In: Philosophical Studies 48 (1985) 337-351

Bense, Max. "Semiotische Prozesse und Systeme". In: *Wissenschaftstheorie und Design, Ästhetik und Mathematik.* Baden-Baden: Agis 1975

-----. *Vermittlung der Realitäten: Semiotische Erkenntnistheorie.* Baden-Baden: Agis 1976

-----. *Axiomatik und Semiotik in Mathematik und Naturerkenntnis.* Baden-Baden: Agis 1981

-----. *Das Universum der Zeichen: Essays über die Expansion der Semiotik.* Baden- Baden: Agis 1983

-----. "Die Eigenrealität des Zeichens". In: Semiosis 42, Heft 2 (1986) 5-22

-----. "Bericht II über die 'Eigenrealität' von 'Zeichen'". In: Semiosis 43, Heft 3 (1986) 5-7

-----. "Bericht III über die 'Eigenrealität' von Zeichen". In: Semiosis 44, Heft 4 (1986) 7-12

-----. "Bericht IV über die 'Eigenrealität' von Zeichen". In: Semiosis 45, Heft 1 (1987) 5-13

-----. "Bericht V über die 'Eigenrealität' von Zeichen und das Möbiussche Band". In: Semiosis 46/47, Heft 2/3 (1987) 19-27

-----. "Bericht VI über die 'Eigenrealität' von Zeichen. Die 'Eigenrealität' der Zeichenrelation und ihr Zusammenhang mit der Idee eines kosmologischen Zeichenbandes". In: Semiosis 48, Heft 4 (1987) 3-8

Bogarin, Jorge. "Semiotische Ansätze zur Analyse der rekursiven Funktionen". In: Semiosis 42, Heft 2 (1986) 14-22

-----. "Drei, zehn, Vierundzwanzigtausenddreihundertundzehn: Ein Bericht über die Große Matrix". In Semiosis 48, Heft 4 (1987) 9-17

Davis, Martin (Hsg.). *The Undecidable: Basic Papers On Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* New York: Raven Press 1965

George, Frank Honywill. "Minds, Machines and Gödel: Another Reply to Mr. Lucas". In: Philosophy 37 (1962) 62-63

-----. *Philosophical Foundations of Cybernetics.* Kent, G.B.: Abacus Press 1979

Hartmanis, J. und J. E. Hopcroft. "What makes Some Language Theory Problems Undecidable". In: Journal of Computer and System Sciences 4 (1970) 368-376

Herschel, Rudolf. *Einführung in die Theorie der Automaten, Sprachen und Algorithmen.* München: Oldenbourg 1974

Hopcroft, John E und Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Reading, Mass.: Addison-Wesley 1979

Kleene, Stephen Cole. *Mathematical Logic.* New York: John Wiley and Sons 1967

Loeckx, Jacques. *Algorithmentheorie.* Berlin: Springer 1976 (Hochschultext)

Lucas, J. R. "Minds, Machines and Gödel". In: Philosophy 36 (1961) 112-127. Abgedruckt in/zitiert nach: A. R. Anderson (Hsg.). *Minds and Machines.* New Jersey: Prentice-Hall 1964, 43-59

Morris, Charles W. *Grundlagen der Zeichentheorie. Ästhetik und Zeichentheorie.* Frankfurt/M.: Ullstein 1979. Orig.: *Foundations of the Theory of Signs,* 1938 und *Esthetics and the Theory of Signs,* 1939

Nagel, Ernst und James R. Newman. *Gödel's Proof.* London: Routledge & Kegan Paul 1981.

Peirce, Charles Sanders. *Collected Papers.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press. Bd. I-VI Hg. Charles Harthorne und Paul Weiss, 1931-1935; Bd. VII und VIII Hg. Arthur W. Burks, 1958

Post, Emil L. "Finite Combinatory Processes. Formulation I." In: The Journal of Symbolic Logic, vol. 1 (1936) 103-105. Abgedruckt in/zitiert nach: M. Davis. *The Undecidable,* 288-291

Rèvècz, György E. *Introduction to Formal Languages.* New York: McGraw-Hill 1983

Rogers, Hartley Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* New York: McGraw-Hill 1967

Slezak, Peter. "Gödel's Theorem and the Mind". In: British Journal for the Philosophy of Science 33 (1982) 41-52

Stegmüller, Wolfgang. *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit: Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung.* Wien: Springer 1959

Turing, Alan. "Computability and Lambda-Definability". In: The Journal of Symbolic Logic, Vol. 2, No. 4 (1937) 153-163

-----. "System of Logic based on ordinals". In: Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 45 (1939) 161-228. Abgedruckt in/zitiert nach: M. Davis, *The Undecidable,* 155-222

Walther, Elisabeth. "Ergänzende Bemerkungen zur Differenzierung der Subzeichen". In: Semiosis 17/18, Heft 1/2 (1980) 30-33

Wang, Hao: "The formalisation of mathematics". In: The Journal of Symbolic Logic 19 (1954) 241-266

Webb, Judson. "Metamathematics and the Philosophy of Mind". In: Philosophy of Science 35 (1968) 156-178

Whiteley, C. H. "Minds, Machines and Gödel: a reply to Mr. Lucas". In: Philosophy 37 (1962) 61-62

SUMMARY

The number of undecidable characteristics of generated languages increases together with the increased efficiency of abstract automats resp. formal grammars. The sign-theoretical determination of these transitions, as well as the characterization of the undecidability or insolubility as such are the aim of this essay. Also briefly demonstrated is a connection between the attained results and the semiotic theory of consciousness.

SEMIOSIS 53

Internationale Zeitschrift
für Semiotik und Ästhetik
14. Jahrgang, Heft 1, 1989

INHALT