ÜBER DIE ARITHMETISCHEN EIGENSCHAFTEN EINES SYSTEMS MULTIPLIKATIVER MODULFUNKTIONEN VON PRIMZAHLSTUFE

VON

HANS PETERSSON

in Münster

Einleitung

Die vorliegende Abhandlung knüpft an zwei allgemeine Untersuchungen an, die die automorphen Formen von positiver (reeller) Dimension und die multiplikativen Modulfunktionen zu Kongruenzgruppen betreffen ([2], [3])[1]. In beiden handelte es sich um die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten der genannten Funktionen auf der Grundlage analytischer Identitäten; in der zweiten, die wir im folgenden mit (P I) zitieren, wurden überdies die ersten Anwendungen auf eine gewisse *Klasse von Partitionenproblemen* gegeben. Diese Partitionenprobleme waren von so allgemeiner Art, dass die entwickelte Methode gewissermassen nur global angewendet werden konnte. So ergab sich zwar eine Reihe allgemeiner Aussagen, zugleich mit der Möglichkeit der Spezialisierung auf arithmetisch besonders markante Sachverhalte; das globale Verfahren lieferte aber in den interessanten Spezialfällen naturgemäss keine allzu genauen strukturellen Einblicke. Aus diesem Grunde werden jetzt einige Partitionenprobleme mit Kongruenz-Bedingungen nach einem Primzahlmodul q gesondert behandelt. Das Ziel besteht — allgemein ausgedrückt — darin, die entwickelte Theorie im engeren Rahmen *bis in die letzten für sie prinzipiell erreichbaren Einzelheiten auszugestalten*; was dies genauer bedeutet, soll noch erläutert werden.

Dass hier eine lohnende Aufgabe vorliegt, war nach einem speziellen Resultat aus (P I) von vornherein zu erwarten. Ich zitiere diesen Sachverhalt zugleich mit einer *Verschärfung*, die in (P I) noch nicht formuliert wurde.

[1] Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literatur-Verzeichnis am Ende dieser Abhandlung.

Fest gegeben sei eine Primzahl $q \equiv 1 \bmod 4$, $q > 5$. Für jedes natürliche n bezeichne $\pi_n^+(q)$ bzw. $\pi_n^-(q)$ die Anzahl der Partitionen von n in durch q nicht teilbare Summanden, welche sämtlich *quadratische Reste bzw. Nichtreste* mod q sind. Dann gilt

$$\frac{\pi_n^+(q)}{\pi_n^-(q)} = \varepsilon^h \left(1 + c_0(q)\, a_5(q)\, n^{-\frac{1}{4}} + O(n^{-1})\right) \qquad (n \to \infty), \tag{0.1}$$

und hier bedeutet

$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon & \text{die Grundeinheit} > 1 \\ h & \text{die Klassenzahl} \end{array}\right\}$ des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathrm{P}(\sqrt{q})$,

$c_0(q)$ eine triviale Konstante < 0,

$a_5(q)$ die Anzahl der Darstellungen von q als Summe von fünf Quadraten.

Von diesem Ergebnis existieren zahlreiche Verallgemeinerungen. Sie lassen sich sämtlich aus *einer zwischen allgemeinen Partitionenfunktionen bestehenden asymptotischen Relation* ableiten, die ihrerseits aus dem Satz 14 in (P I) durch eine geringfügige Rechnung zu gewinnen ist und die ich, da sie in der vorliegenden Arbeit angewendet werden soll, kurz zitiere.

Bezeichnen

$$p_n = p_n([k], [l], N) \text{ und } p_n^* = p_n([k^*], [l^*], N^*)$$

zwei Partitionenanzahlen, die den Voraussetzungen jenes Satzes genügen, und nennt man

$$\varrho_1^*, \omega_0^*, \beta^*, \eta^* = \tfrac{1}{2} N^* \beta^* \text{ die aus bzw. } \varrho_1, \omega_0, \beta, \eta = \tfrac{1}{2} N \beta$$

beim Übergang von $[k]$, $[l]$, N zu $[k^*]$, $[l^*]$, N^* *entstehenden Grössen, so gilt, falls* $\varrho_1^* = \varrho_1$ *ist:*

$$\frac{p_n^*}{p_n} = \frac{\omega_0^*}{\omega_0}\left(1 + \frac{\varrho_1(\eta^* - \eta)}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (n \to \infty). \tag{0.2}$$

Auf die genaue Erklärung dieser p_n kann hier verzichtet werden; in einer gewissen Spezialisierung werden Partionenanzahlen des gleichen Typus in dieser Einleitung und im § 5 der vorliegenden Darstellung exakt definiert. Zur Orientierung über die allgemeinen Probleme und die Lösungsmethoden empfiehlt sich die Lektüre der einleitenden Abschnitte 1. und 2. von (P I). Die gegenwärtige Untersuchung basiert auf den allgemeinen analytischen Identitäten aus [2] und [3]; diese werden unten in § 1 genau und ausführlich formuliert. Über die prinzipiellen Möglichkeiten der Anwendung der analytischen Identitäten findet sich am Schluss von (P I) 7. eine kurze Beschreibung; danach ist für die vorliegende Abhandlung *das dort mit* A. *bezeichnete Prinzip wirksam.*

Da auch hier neue asymptotische Relationen abgeleitet werden sollen, sei es gestattet, auf diesbezügliche Ergebnisse von (P I) kurz referierend hinzuweisen. Die allgemeinsten

Relationen dieses Typus von arithmetischem Interesse sind gewisse Verallgemeinerungen von (0.1), in denen die *Klassenzahlen der reellen absolut-abelschen Zahlkörper* auftreten und die in (P I) 11. behandelt werden. Sie geben jedoch eine Verallgemeinerung nur bezüglich des Hauptgliedes auf der rechten Seite von (0.1) mit einem Fehler $O(n^{-\frac{1}{2}})$; auch inzwischen war eine ähnlich instruktive Deutung des ersten Fehlergliedes (Faktors von $n^{-\frac{1}{2}}$) wie in (0.1) nicht zu erlangen.

Auf eine Modifikation von (0.1) und ihren Vergleich mit (0.1) bezieht sich der letzte Abschnitt 12. von (P I). Bildet man die oben erklärten Partitionenanzahlen $\pi_n^{\pm}(q)$ unter der Nebenbedingung, dass jeder Summand in den Partitionen beider Arten *höchstens* $(l-1)$*-mal* auftreten darf, wo l eine feste ganze Zahl $\geqq 2$ angibt, so gilt für die durch diese Modifikation entstehenden Anzahlfunktionen $\pi_n^{\pm}(l,\ q)$:

$$\frac{\pi_n^+(l,\ q)}{\pi_n^-(l,\ q)} = 1 + c_1(l,\ q)\, a_5(q)\, n^{-\frac{1}{2}} + O(n^{-1}) \qquad (n \to \infty). \tag{0.3}$$

Dabei bezeichnet wieder $c_1(l,\ q)$ eine triviale Konstante > 0, und die Bestimmung des Faktors von $n^{-\frac{1}{2}}$ erfolgt wie bei (0.1) erst in der vorliegenden Arbeit. (P I) 12. enthält eine eingehende Diskussion über die Frage, wie sich das asymptotische Verhalten einer der allgemeinen Partitionenanzahlen p_n von (P I) Satz 14 *bei der Tilgung eines oder mehrerer gegebenen Summanden* ändert. Dabei ergibt sich ein wesentlicher Unterschied, je nachdem, ob der betreffende Summand *vor* seiner Tilgung einer Häufigkeits-Beschränkung unterworfen war oder nicht. Dieser Unterschied eröffnet ein erstes Verständnis dafür, dass der Limes der Quotienten auf den linken Seiten von (0.1,3) im ersten Falle > 1, im zweiten $= 1$ ist; vgl. dazu auch die einleitenden Bemerkungen in (P I), 12.[1]

Zum Schluss dieses Berichtes sei betont, dass die hier zitierten asymptotischen Relationen zwischen den Partitionenanzahlen p_n nur den äusseren Umriss des in (P I) entwickelten Resultatbereichs wiedergeben. Als Kern der Ergebnisse hat man die *genauen Darstellungen der Partitionenanzahlen durch lineare Aggregate absolut konvergenter Reihen* anzusehen, die der Reihe in der Rademacherschen Partitionenformel entsprechen und ähnliche Eigenschaften aufweisen wie diese. (Zur Frage des asymptotischen Verhaltens der p_n vgl. (P I) 7.)

---

[1] Herr ERDÖS sagte mir, er halte die Relation $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n^+(l,\ q)}{\pi_n^-(l,\ q)} = 1$ für elementar beweisbar. Dagegen beurteilte er elementare Beweisversuche für $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n^+(q)}{\pi_n^-(q)} = \varepsilon^h$ oder die schärferen Relationen (0.1,3) als aussichtslos.

Ich gelange nun zur *Formulierung der Probleme*, die mit den genaueren Methoden der Theorie hier behandelt werden sollen.

I. Es sei q eine Primzahl $\geqq 2$, es seien k_0 und k_1 ganze Zahlen $\geqq 0$ mit der Summe $k = k_0 + k_1 > 0$. Man denke sich die durch q nicht teilbaren natürlichen Zahlen in k verschiedenen Farben vorgelegt und betrachte die Anzahl $r_n(k_0, k_1; q)$ der in der folgenden Art zu bildenden und zu zählenden Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden: Die Summanden treten in den genannten k Farben auf, und zwar in den ersten k_0 Farben beliebig oft, in den restlichen k_1 Farben je höchstens $(q-1)$-mal. Zwei solche Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder Summand in beiden in jeder der k Farben gleich oft auftritt. Das Verschwinden von k_0 oder k_1 bedeutet, dass alle bzw. keine Summanden einer Häufigkeits-Beschränkung unterliegen.

Das Problem führt auf multiplikative Modulfunktionen $F(\tau)$, die in der oberen Halbebene regulär sind und zu der wie folgt erklärten Untergruppe $\Gamma_0^0[q]$ der Modulgruppe Γ gehören: $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma$ liegt genau dann in $\Gamma_0^0[q]$, wenn $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \bmod q$ ist. Die Spitzenanzahl eines Fundamentalbereichs von $\Gamma_0^0[q]$ beträgt $q+1$; die erwähnte allgemeine analytische Identität führt auf besonders einfache Darstellungen für $r_n(k_0, k_1; q)$ infolge des nicht voraussehbaren Umstandes, dass $F(\tau)$ in höchstens zwei der genannten $q+1$ Spitzen Pole besitzt. — Die Untersuchung bietet kein sonderliches arithmetisches Interesse, hat aber den Wert eines instruktiven methodischen Übungsbeispiels.

II. Es sei q eine Primzahl mit den Eigenschaften $q \equiv 1 \bmod 4$, $q > 5$; es seien k^+ und k^- ganze Zahlen $\geqq 0$ mit der Summe $k = k^+ + k^- > 0$. Man denke sich die natürlichen Zahlen m mit $(m/q) = +1$ bzw. $(m/q) = -1$ in k^+ bzw. k^- Farben vorgelegt und betrachte die Anzahl $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$ der in der folgenden Art zu bildenden und zu zählenden Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden: die Summanden m mit $(m/q) = +1$ treten in den gegebenen k^+, die Summanden m mit $(m/q) = -1$ in den gegebenen k^- Farben auf. Die Häufigkeit des Auftretens wird in keiner Farbe beschränkt. Zwei solche Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder Summand in beiden in jeder der für ihn zugelassenen Farben gleich oft auftritt. Das Verschwinden von k^+ oder k^- bedeutet, dass keine Summanden m mit $(m/q) = +1$ bzw. $(m/q) = -1$ auftreten.

Das Problem führt auf multiplikative Modulfunktionen $F(\tau)$, die in der oberen Halbebene regulär sind und zu der wie folgt erklärten Untergruppe $\Gamma^{0+}[q]$ der Modulgruppe Γ gehören: $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma$ liegt genau dann in $\Gamma^{0+}[q]$, wenn $(\alpha/q) = +1$,

$\beta \equiv 0 \bmod q$. Die Spitzenanzahl eines Fundamentalbereichs von $\Gamma^{0+}[q]$ beträgt 4; auch hier ergibt die erwähnte analytische Identität relativ einfache Darstellungen für $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$, weil $F(\tau)$ in höchstens 3 der genannten 4 Spitzen Pole besitzen kann. — Die Untersuchung demonstriert einen nicht-trivialen Idealfall vollständiger Ausreduktion der analytischen Methode.

III. Es seien q, k^+, k^- wie soeben bestimmt, es sei k^0 eine natürliche Zahl. Man färbe die natürlichen $m \not\equiv 0 \bmod q$ gemäss II. und ausserdem die natürlichen $m \equiv 0 \bmod q$ in k^0 Farben. $\varrho_n(\mathfrak{l}, q)$ bezeichne die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in beliebige natürliche Summanden, von denen die $m \not\equiv 0 \bmod q$ gemäss II., die $m \equiv 0 \bmod q$ in ihren k^0 Farben auftreten. Die Häufigkeit des Auftretens wird in keiner Farbe beschränkt. Die Übereinstimmung zweier Partitionen und die Bedeutung des Verschwindens von k^+ oder k^- sind genau analog zu II. erklärt. Das Problem führt auf Modulformen, die in der oberen Halbebene regulär sind; sie gehören zwar zur gleichen Gruppe $\Gamma^{0+}[q]$ wie die Modulfunktionen $F(\tau)$ von II., besitzen aber zum Unterschied von diesen die positive Dimension $\frac{1}{2}k^0$, weshalb zur Darstellung der $\varrho_n(\mathfrak{l}, q)$ die Ergebnisse von [2] anzuwenden sind. Abgesehen vom klassischen Partitionenproblem handelt es sich hier um die erste Anwendung dieser Ergebnisse. Hinsichtlich der Ausreduktion des analytischen Apparats gilt das unter II. Gesagte.

Die hier genannte Ausreduktion des analytischen Apparats soll am Beispiel des Problems II noch kurz erläutert werden. Von dem Apparat ist zunächst zu sagen, dass er für die Fourier-Koeffizienten einer jeden multiplikativen Funktion F, die zu einer Kongruenz-Untergruppe Γ_0 der Modulgruppe Γ und zu einem sog. Kongruenzcharakter v als Multiplikatorsystem gehört, eine fertige Formel bereitstellt, in die die folgenden Daten von F eingehen:

1. Die Gruppe Γ_0; man benötigt ein volles System mod Γ_0 inkongruenter Spitzen ζ von Γ_0 und, wenn $\zeta = A^{-1}\infty$ mit $A \subset \Gamma$ gesetzt wird, für gewisse dieser ζ die genaue Kenntnis des Systems der zweiten Zeilen $\{m_1, m_2\}$ der Matrizen der Nebenklasse $A\Gamma_0$.
2. Der Charakter v; seine Werte treten als Koeffizienten in Exponentialsummen vom Kloostermanschen Typus auf; in diesen Exponentialsummen lokalisiert sich die gesamte arithmetische Struktur der Formel für die Fourier-Koeffizienten von F.
3. Die Hauptteile von F in den unter 1. genannten Spitzen ζ; man benötigt die genauen Werte der Hauptteil-Koeffizienten und insbesondere die Polordnungen von F in jenen Spitzen ζ.

Im konkreten Fall des Problems II ist, wie erwähnt, $\Gamma_0 = \Gamma^{0+}[q]$; ein volles Vertretersystem für die Spitzen und das Bildungsgesetz für die zweiten Zeilen der Matrizen von $A\Gamma_0$

sind leicht zu erlangen. Zum Vergleich sei bemerkt: Bei Anwendung der „globalen" Methode von (P I) hätte man in der Schlussformel nicht drei von den vier Spitzen der $\Gamma^{0+}[q]$, sondern mehr als die Hälfte von den $\frac{1}{2}(q^2-1)$ Spitzen der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[q]$ zu berücksichtigen.

Die Bestimmung der Charakterwerte v ist angesichts der Rolle, die sie gemäss 2. spielen, von entscheidender Bedeutung. Sie gelingt durch *elementar-arithmetische Überlegungen klassischer Art* und führt auf Werte von unerwartet einfacher Struktur. Nicht wesentlich komplizierter sind gewisse Konstanten, die als Faktoren bei der Transformation der vier Funktionen auftreten, die durch die Problemstellung und den Ansatz den vier Spitzen der $\Gamma^{0+}[q]$ zugeordnet werden. In zweien dieser Faktoren erscheinen erstmalig die Zahlen $\varepsilon^{\pm\frac{1}{2}h}$ der bei (0.1) angegebenen Terminologie; sie sind für den Grenzwert ε^h in (0.1) verantwortlich. Von den vier Funktionen haben zwei ganzrationale, die anderen ganz algebraische Fourier-Koeffizienten aus $P(\sqrt{q})$.

Als Hauptteil-Koeffizienten ergeben sich Werte von Anzahlfunktionen vom Partitionentypus; sie müssen in jedem (durch numerische Werte q, $k^{\pm}$ gekennzeichneten) Spezialfall numerisch berechnet werden. Wie weit man hier rechnen muss, hängt von der betreffenden Polordnung ab. Eine der drei Polordnungen und mit ihr eine Konstante, die, als „Anfangsphase" α mit der natürlichen Zahl n aus II. zu $n-\alpha$ verknüpft, den ganzen Formalismus durchzieht, steht in enger Verbindung mit der bei (0.1) genannten Anzahl $a_5(q)$; deren Auftreten in (0.1,3) wird durch die Anfangsphasen der $\pi_n^{\pm}$ bewirkt. Der Parameter $a_5(q)$ übt einen tiefgreifenden Einfluss auf den Mechanismus der $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$ aus. So sieht man, dass die Stelle, an der gewisse Glieder in die asymptotische Entwicklung dieser π_n eintreten, wesentlich durch $a_5(q)$ fixiert wird; elementar lässt sich diese Stelle daher nur in grober und nicht immer hinreichender Näherung abgrenzen. Bemerkenswert ist ferner das Auftreten von $a_5(q)$ in einer Vorzeichen-Bestimmung für die Exponentialsummen W_2.

Nicht zu den erreichbaren Einzelheiten der Theorie darf man die Berechnung der unter 2. genannten Exponentialsummen zählen. Hier sind wir von echten strukturellen Einsichten noch weit entfernt. Jedoch liefern allein die (weiter unten mitgeteilten) Werte der ersten zwei dieser Exponentialsummen (W_1 und W_2) bereits die exakte Kenntnis einer ganzen Reihe von Gliedern der asymptotischen Entwicklung von $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$. In dieser Richtung werden die Ergebnisse von (P I) erheblich übertroffen.

Von den in § 5 dargestellten *Ergebnissen* erwähne ich erstens gewisse asymptotische Relationen zwischen Partitionenanzahlen, die aus denen der Typen II und III durch Tilgung endlich vieler gegebenen Summanden hervorgehen; zweitens einen ziemlich allgemeinen Satz über die *asymptotischen Entwicklungen im strengen Sinne*, die aus den Reihen-Darstellungen für die Fourier-Koeffizienten der Modulformen positiver Dimension zu gewinnen sind.

§ 1

Grundlagen: Formulierung der analytischen Hauptsätze. Die Eigenschaften spezieller Modulfunktionen

Es werden zunächst die weiter unten anzuwendenden Ergebnisse von [3] und [2] mit den erforderlichen Bezeichnungen ohne Beweise zusammengestellt.

Bezeichnungen: Man verstehe unter

Γ die Gruppe der Modulmatrizen, d.h. der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit ganzen a, b, c, d und $ad - bc = 1$;

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ unbestimmte,}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bestimmte Modulmatrizen;}$$

$\underline{S} = \{c, d\}$ die zweite Zeile von S;

$\tau = x + iy$ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil y;

$\mathfrak{H}$ die obere τ-Halbebene ($y > 0$);

$S\tau = S(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ die S entsprechende Modulsubstitution;

Γ_0 eine Kongruenzgruppe, d.h. eine durch endlich viele Kongruenzen für die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ihrer Matrizen L definierte Untergruppe von Γ; o. B. d. A. wird $-I \subset \Gamma_0$ vorausgesetzt;

$\Gamma[N]$ zu gegebenem natürlichen N die Hauptkongruenzgruppe der Stufe N, bestehend aus den L in Γ mit $L \equiv \pm I \bmod N$;

$\tilde{N}$ eine Stufe von Γ_0, d.h. eine natürliche Zahl derart, dass $\Gamma[\tilde{N}] \subset \Gamma_0$;

$A = A_\zeta$ und $N = N_\zeta$ zu einer gegebenen Spitze ζ von Γ_0 folgendes: A ist eine Modulmatrix mit $A\zeta = \infty$ (d.h. $\zeta = -(a_2/a_1)$, wenn $\underline{A} = \{a_1, a_2\}$), N die kleinste natürliche Zahl mit $A^{-1}U^N A \subset \Gamma_0$; N heisst die Breite der Spitze ζ von Γ_0 und ist durch Γ_0 und ζ eindeutig bestimmt; für $\Gamma_0 = \Gamma[N]$ sind alle $N_\zeta = N$;

$P = P_\zeta$ die Grundmatrix von ζ in Γ_0, d.i. dieses $A^{-1}U^N A$ ($A = A_\zeta$, $N = N_\zeta$);

v ein Multiplikatorsystem zu Γ_0 und der reellen Dimension $-r$; es wird stets $|v| = 1$ d.h. $|v(L)| = 1$ für alle $L \subset \Gamma_0$ vorausgesetzt;

$\varkappa = \varkappa_\zeta$ die durch $0 \leqq \varkappa < 1$, $v(P_\zeta) = e^{2\pi i \varkappa}$ bestimmte Zahl;

$\mathfrak{T}(A, \Gamma_0)$ die Menge der m_1 in den $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \subset A\Gamma_0$;

$\mathfrak{R}_{m_1}(A, \Gamma_0)$ zu gegebenem $m_1 \neq 0$ in $\mathfrak{T}(A, \Gamma_0)$ ein volles System mod $|m_1| N_\infty$ inkongruenter j mit $\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix} \subset A\Gamma_0$;

$v(A)$, wenn A nicht in Γ_0 liegt, eine willkürliche komplexe Zahl des Betrages 1;

$v(M)$ für $M = AL \subset A\Gamma_0$ die Zahl $v(A)\sigma^{(r)}(A, L)v(L)$;

$W_{m_1}(n + \varkappa, A, \mathfrak{K}, \nu + \varkappa^*)$ zu gegebenen $m_1 \neq 0$ in $\mathfrak{T}(A, \Gamma_0)$ und ganzen n, ν, wenn $N_\infty = N$, $N_\zeta = N^*$, $\varkappa_\infty = \varkappa$, $\varkappa_\zeta = \varkappa^*$ gesetzt wird, die Exponentialsumme

$$\sum_{j \subset \mathfrak{R}_{m_1}(A, \Gamma_0)} v^{-1}\left(\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix}\right) \exp 2\pi i \left\{\frac{(n+\varkappa)\, j}{m_1 N} + \frac{(\nu + \varkappa^*)\, j'}{m_1 N^*}\right\}, \tag{1.1}$$

in der $\mathfrak{K}$ die Daten Γ_0, $-r$, v symbolisiert und die Summations-Bedingung $\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix} \subset A\Gamma_0$ hinzuzufügen ist (r wird hier nur zur Definition von v benötigt und tritt erst später explizit auf);

$f(\tau)\,|S$, wenn $f(\tau)$ in $\mathfrak{H}$ höchstens mit Ausnahme einer Menge isolierter Punkte erklärt ist, zu gegebenem reellem r den Operator

$$f(\tau)\,|S = f(S\tau)\,(c\tau + d)^{-r} \qquad (S \subset \Gamma,\ \underline{S} = \{c, d\}); \tag{1.2}$$

$\{\Gamma_0, -r, v\}$ die „Klasse der Modulformen zur Gruppe Γ_0, zur Dimension $-r$ und zum Multiplikatorsystem v"; $f(\tau) \subset \{\Gamma_0, -r, v\}$ („$f(\tau)$ ist eine Form $\{\Gamma_0, -r, v\}$") bedeutet, dass $f(\tau)$ (a) in $\mathfrak{H}$ höchstens mit Ausnahme isolierter Punkte regulär ist; (b), wenn $f \not\equiv 0$, in allen Punkten eines Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}_0$ von Γ_0 (einschliesslich der Spitzen) Entwicklungen nach den Potenzen der ortsuniformisierenden Variablen (in den Spitzen von der Gestalt (1.4)) und in diesen mit höchstens endlich vielen Ausnahmen nicht-negative Ordnungen besitzt und (c) Eigenfunktion aller Operatoren (1.2) $S = L \subset \Gamma_0$ mit den $v(L)$ als zugehörigen Eigenwerten ist: Für das gegebene r gilt, wenn τ und $L\tau$ keine Ausnahmepunkte sind:

$$f(\tau)\,|L = v(L)f(\tau) \qquad (L \subset \Gamma_0); \tag{1.3}$$

$u_N^\lambda = u_N^\lambda(\tau)$ für natürliches N und reelles λ die Potenz $\exp 2\pi i \frac{\lambda\tau}{N}$;

$$f(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} \sum_{n=n_0}^{\infty} b_{n+\varkappa^*}(A, f)\, u_{N^*}^{n+\varkappa^*}(A\tau) \tag{1.4}$$

die Entwicklung von $f(\tau)$ nach Potenzen der Ortvariablen $u_{N^*}(A\tau)$ der Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von Γ_0, also insbesondere $N^* = N_\zeta$, $\varkappa^* = \varkappa_\zeta$ bei festem $A \subset \Gamma$, vgl. (1.1);

$\varkappa'_\zeta = \varkappa^{*\prime}$ die Zahl $1 - \varkappa^* - [1 - \varkappa^*]$ ($[x]$ = grösste ganze Zahl $\leqq x$);

$\zeta_j = A_j^{-1}\infty$ $(A_j \subset \Gamma,\ 1 \leqq j \leqq \sigma_0)$ ein volles System paarweise mod Γ_0 inäquivalenter Spitzen von Γ_0; mit $N_{\zeta_j} = N_j$ bedeutet dies soviel wie

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{l_j \bmod N_j} \Gamma_0 A_j^{-1} U^{l_j} \tag{1.5}$$

im gruppentheoretischen Sinne einer Zerlegung in Nebenklassen; speziell sei stets $A_1 = I$;

$\varkappa_j$ die Zahl $\varkappa_{\zeta_j}$, $\varkappa'_j$ die Zahl $\varkappa'_{\zeta_j}$ $(1 \leqq j \leqq \sigma_0)$; speziell $\varkappa = \varkappa_I = \varkappa_1$;

$\mathfrak{E}_0$ das Grunddreieck der Modulfigur, bestehend aus den τ mit $|\tau| > 1$, $|\mathrm{Re}\,\tau| < \frac{1}{2}$ zuzüglich der Menge der Randpunkte τ mit $\mathrm{Re}\,\tau \leqq 0$ und des in $-\frac{1}{2} \leqq \mathrm{Re}\,\tau < \frac{1}{2}$ zu erreichenden Punktes $\tau = \infty$;

$\mathfrak{F}_0$ die entsprechend (1.5) gebildete höchstens σ_0-teilige Fundamentalmenge

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{l_j \bmod N_j} A_j^{-1} U^{l_j} \mathfrak{E}_0 \tag{1.6}$$

von Γ_0, wo jedes l_j konsekutive Zahlen durchläuft und speziell $A_1 = I$ ist;

$$\sum_{l \bmod N_\zeta} A_\zeta^{-1} U^l \mathfrak{E}_0,$$

wenn l konsekutive Zahlen durchläuft, einen Spitzensektor zur Spitze ζ von Γ_0. —

Es folgt nun die *Formulierung der analytischen Hauptsätze* über die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten $b_{n+\varkappa}(I, F)$ für die in $\mathfrak{H}$ regulären Modulformen $F(\tau)$, die zur Gruppe Γ_0 und der nicht-negativen reellen Dimension $r-2$ gehören. Dabei hat man zwischen den Fällen $r=2$ und $r>2$ zu unterscheiden; in beiden Fällen bezeichnet v das oben eingeführte Multiplikatorsystem zur Gruppe Γ_0 und der reellen Dimension $-r$.

FALL (A): $r=2$. Es wird einschränkend vorausgesetzt, dass v ein *Kongruenzcharakter* auf Γ_0 sei, d.h.: Es gebe eine natürliche Zahl $\bar{N}$ (eine Stufe von Γ_0) derart, dass

$$\Gamma[\bar{N}] \subset \Gamma_0, \quad v(L) = 1 \text{ für alle } L \subset \Gamma[\bar{N}]. \tag{1.7}$$

Wir formulieren im Einzelnen

SATZ 1. *Die in den obigen Bezeichnungen mit*

$$\mathfrak{K} = \{\Gamma_0, -2, v\}, \quad f_1(z) = z\, I_1(z), \quad h + \varkappa^* > 0, \quad n + \varkappa > 0$$

für ganze n, h gebildete Reihe

$$a_{n+\varkappa}(A, \mathfrak{K}, h+\varkappa^*) = \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{T}(A,\,\Gamma_0) \\ m_1 > 0}} v(A)\, W_{m_1}(n+\varkappa, A, \mathfrak{K}, -h-\varkappa^{*\prime})\, f_1\!\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{(n+\varkappa)(h+\varkappa^{*\prime})}{N N^*}}\right)$$

konvergiert absolut. Die mit festen $\alpha>0$, $\mathfrak{K}$, A, h *gebildete Restsumme über die* m_1 *mit* $m_1>\alpha\sqrt{n+\varkappa}$ *genügt für jedes* $\varepsilon>0$ *der Abschätzung*

$$\sum_{\substack{m_1\subset\mathfrak{T}(A,\,\Gamma_0)\\ m_1>\alpha\sqrt{n+\varkappa}}} = O\left(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right) \qquad (n\to\infty).$$

SATZ 2. *Es sei* $F(\tau)$ *eine in* $\mathfrak{H}$ *reguläre multiplikative Funktion der Gruppe* Γ_0 *zum Kongruenzcharakter* v ($F\subset\{\Gamma_0,\,0,\,v\}$) *und es seien*

$$\sum_{0<h+\varkappa'_j\leqq n_{0j}+\varkappa'_j} b_{-h-\varkappa'_j}(A_j,\,F)\,u_{N_j}^{-h-\varkappa'_j}(A_j\,\tau)$$

die Hauptteile von F *in den oben eingeführten repräsentierenden Spitzen* ζ_j $(1\leqq j\leqq\sigma_0)$. *Dabei bezeichnet* $-n_{0j}-\varkappa'_j$ *die Ordnung von* F *in* ζ_j, *und es ist sowohl die genannte als auch die im folgenden auftretende Summe über* h *durch Null zu ersetzen, wenn* $n_{0j}+\varkappa'_j$ *für das betreffende* j *nicht positiv ist. Dann gilt, wieder mit* $\mathfrak{K}=\{\Gamma_0,\,-2,\,v\}$ *und* $\varkappa=\varkappa_1$, *wenn* n *ganz und* $>-\varkappa$ *ist:*

$$b_{n+\varkappa}(I,\,F)=\frac{1}{2(n+\varkappa)}\sum_{j=1}^{\sigma_0}\sum_{\substack{h\\ 0<h+\varkappa'_j\leqq n_{0j}+\varkappa'_j}} b_{-h-\varkappa'_j}(A_j,\,F)\,a_{n+\varkappa}(A_j,\,\mathfrak{K},\,h+\varkappa'_j).-$$

Die entsprechenden Formeln IM FALLE (B) $r>2$ sind der Abhandlung [2] zu entnehmen; sie bedürfen jedoch, bevor sie angewendet werden, einer gewissen Modifikation.

Zunächst kann eine Voraussetzung abgeschwächt werden, unter der in [2] Satz 15 und die hieraus abgeleitete Koeffizientenformel (69) bewiesen wurden: Von den in der Konstruktionsformel (56) für die Funktion $\Lambda(z)$ auftretenden Punkten ζ_j, ω_k, c_ν war angenommen worden, dass sie in einem festen regulären Fundamentalbereich der betreffenden Grenzkreisgruppe Γ liegen. Statt dessen genügt es, vorauszusetzen, dass diese Punkte einer endlich-teiligen Fundamentalmenge $\mathfrak{M}_0$ von Γ angehören, die etwa die auf [2], S. 40 unter b) d) e) angegebenen Eigenschaften hat. Im vorliegenden Falle tritt Γ_0 an die Stelle des zuletzt genannten Γ und das Bereichsystem (1.6) $\mathfrak{F}_0$ an die Stelle des regulären Fundamentalbereichs.

Um die andere Modifikation möglichst allgemein durchzuführen, bedienen wir uns des in [2] entwickelten Apparats und zugleich vorübergehend der dort verwendeten (von der obigen abweichenden) Terminologie. Danach gilt, wenn $F(\tau)$ eine in $\mathfrak{H}$ reguläre automorphe Form $\{\Gamma,\,r-2,\,v^{-1}\}$ bezeichnet, die in den Spitzen ζ_j $(1\leqq j\leqq\sigma_0)$ von $\mathfrak{M}_0$ die Hauptteile

$$(a_{j1}\,\tau+a_{j2})^{r-2}\sum_{0<m+\varkappa_j\leqq m_{0j}+\varkappa_j}\lambda_{j,\,m+\varkappa_j}\,u_{N_j}^{-m-\varkappa_j}(A_j\,\tau)$$

aufweist, für die Fourier-Koeffizienten von F:

$$b_{h+\varkappa'}(I,\ F) = \frac{-1}{2N}\sum_{j=1}^{\sigma_0} N_j \sum_{0<m+\varkappa_j \leqq m_{0j}+\varkappa_j} \lambda_{j,\ m+\varkappa_j}\, a_{A_j,\ m+\varkappa_j}(\mathrm{K},\ I,\ -h-\varkappa'), \tag{1.8}$$

wo
$$a_{A,\ m+\varkappa_A}(\mathrm{K},\ I,\ -h-\varkappa') = v'_{A^{-1}}(A^{-1})\, a_{m+\varkappa_A}(\mathrm{K}\, A^{-1},\ A^{-1},\ -h-\varkappa')$$

mit
$$v'_{A^{-1}}(L') = \frac{\sigma(L,\ A^{-1})}{\sigma(A^{-1},\ L')}\, v(L) \qquad (L' = A\, L\, A^{-1},\ L \subset \Gamma),$$

$$\mathrm{K} = \{\Gamma,\ -r,\ v\}, \qquad \mathrm{K}\, A^{-1} = \{A\,\Gamma\, A^{-1},\ -r,\ v'_{A^{-1}}\}$$

und der allgemeinen Formel

$$a_{m+\varkappa}(\mathrm{K},\ A,\ -h-\varkappa'_A) = (-i)^r\, \frac{4\pi}{N}\left(\frac{m+\varkappa}{N}\right)^{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{h+\varkappa'_A}{N_A}\right)^{-\frac{r-1}{2}} \times$$
$$\times \sum_{m_1 \subset \mathfrak{T}^+(A,\ \Gamma)} m_1^{-1}\, W_{m_1}(\mathrm{K},\ A,\ m+\varkappa,\ -h-\varkappa'_A)\, I_{r-1}\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{(m+\varkappa)\,(h+\varkappa'_A)}{N\, N_A}}\right)$$

einzutragen ist. Man findet zunächst

$$-\frac{1}{2N} N_A\, a_{A,\ m+\varkappa_A}(\mathrm{K},\ I,\ -h-\varkappa') = -\frac{2\pi}{N}(-i)^r\left(\frac{m+\varkappa_A}{N_A}\right)^{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{h+\varkappa'}{N}\right)^{-\frac{r-1}{2}} \times$$
$$\times \sum_{m_1 \subset \mathfrak{T}^+(A^{-1},\ \Gamma_A)} m_1^{-1}\, v'_{A^{-1}}(A^{-1})\, W_{m_1}(\mathrm{K}\, A^{-1},\ A^{-1},\ m+\varkappa_A,\ -h-\varkappa') \times \tag{1.9}$$
$$\times I_{r-1}\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{(m+\varkappa_A)\,(h+\varkappa')}{N\, N_A}}\right).$$

Die entscheidende *Umformung des Faktors*

$$v'_{A^{-1}}(A^{-1})\, W_{m_1}(\mathrm{K}\, A^{-1},\ A^{-1},\ m+\varkappa_A,\ -h-\varkappa') \tag{1.10}$$

in der letzten Summe verläuft folgendermassen:

Die Relation $A^{-1}\Gamma_A = (A\Gamma)^{-1}$ zeigt, dass sich die M^* in $A^{-1}\Gamma_A$ mit $m_1^* > 0$ auf die M in $A\Gamma$ mit $m_1 > 0$ durch $M^* = -M^{-1}$ umkehrbar eindeutig abbilden lassen (m_1^*, m_1 sind die Elemente links unten in M^*, M). Daher gilt

$$\mathfrak{T}^+(A^{-1},\ \Gamma_A) = \mathfrak{T}^+(A,\ \Gamma).$$

Durchläuft nun $Q = \begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix}$ ein System von Matrizen aus $A\,\Gamma$ mit

$$m_1 > 0,\ j \subset \mathfrak{R}_{m_1}(A,\ \Gamma),\ \ -j' \subset \mathfrak{R}_{m_1}(A^{-1},\ \Gamma_A),$$

so kann $-Q^{-1}$ als Summationsmatrix in (1.10) gewählt werden. Zur Bestimmung von $v'_{A^{-1}}(A^{-1})\, v'^{-1}_{A^{-1}}(-Q^{-1})$ stellt man zunächst fest, dass $\sigma(M,\ -I)$ für reell-unimodulares M mit $m_1 < 0$ den Wert 1 hat. Hiernach gibt eine direkte Rechnung, bei der man gemäss

[2] Voraussetzung (F) (S. 56)

$$\sigma(A, A^{-1}) = \sigma(AL, (AL)^{-1}) = 1 \text{ für } L \subset \Gamma$$

zu benutzen hat, die Identität

$$v'_{A^{-1}}(A^{-1})\, v'^{-1}_{A^{-1}}(-Q^{-1}) = e^{\pi i r}\, v^{-1}(A)\, v(Q)$$

und damit für (1.10) die Darstellung

$$e^{\pi i r}\, \bar{v}(A)\, \overline{W}_{m_1}(\mathrm{K},\ A,\ -h-\varkappa',\ m+\varkappa_A);$$

durch den Querstrich werden hier und weiter unten bei $\mathfrak{R}$ konjugiertkomplexe Werte bezeichnet.

Dieser Sachverhalt legt es nahe, im Rahmen der Terminologie von [2] die folgenden Ausdrücke einzuführen: Man setze für positive μ, ϱ mit $\mu \equiv \varkappa_A$, $\varrho \equiv \varkappa'$ mod 1:

$$\mathfrak{R}_\varrho(\mathrm{K},\ A,\ \mu) = \\ = -\frac{(-2\pi i)^r}{N}\left(\frac{\mu}{N_A}\right)^{r-1} \sum_{m_1 \subset \mathfrak{T}^+(A,\,\Gamma)} m_1^{-r}\, v(A)\, W_{m_1}(\mathrm{K},\ A,\ -\varrho,\ \mu)\, f^*_{r-1}\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{\mu\varrho}{N N_A}}\right) \tag{1.11}$$

und hierin

$$f^*_{r-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1-r} I_{r-1}(z) \qquad (z > 0). \tag{1.12}$$

Dann gilt

$$\frac{-1}{2N} N_A\, a_{A,\, m+\varkappa_A}(\mathrm{K},\ I,\ -h-\varkappa') = \overline{\mathfrak{R}}_{h+\varkappa'}(\mathrm{K},\ A,\ m+\varkappa_A)$$

und nach (1.8)

$$b_{h+\varkappa'}(I,\ F) = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{\substack{m \\ 0 < m+\varkappa_j \leq m_{0j}+\varkappa_j}} \lambda_{j,\, m+\varkappa_j}\, \overline{\mathfrak{R}}_{h+\varkappa'}(\mathrm{K},\ A,\ m+\varkappa_j). \tag{1.13}$$

Diese Darstellung entspricht dem durch Symmetrisierung umgeformten Hauptergebnis von [1] (Satz 1 und § 3. c)) und geht daher durch Spezialisierung in die Rademachersche Partitionenformel über.

Wir kehren zu der am Anfang des gegenwärtigen § 1 eingeführten Terminologie zurück und formulieren

Satz 3. *Es seien r, μ, ϱ positive Zahlen mit*

$$r > 2, \quad \mu \equiv \varkappa_\zeta \bmod 1, \quad \varrho \equiv \varkappa' = \varkappa'_\infty \bmod 1;$$

man setze $N = N_\infty$, $\varkappa = \varkappa_\infty$, $\mathfrak{K} = \{\Gamma_0,\ -r,\ v\}$ und

$$\mathfrak{R}_\varrho(A, \mathfrak{K}, \mu) =$$
$$= -\frac{(-2\pi i)^r}{N}\left(\frac{\mu}{N_\zeta}\right)^{r-1} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{T}(A, \Gamma_0) \\ m_1 > 0}} m_1^{-r}\, v(A)\, W_{m_1}(-\varrho, A, \mathfrak{K}, \mu)\, f^*_{r-1}\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{\mu\varrho}{N N_\zeta}}\right),$$

wo $f^*_{r-1}(z)$ *durch* (1.12) *erklärt ist. Die unendliche Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut. Bildet man den durch* $m_1 > \alpha\sqrt{\varrho}$ *für festes* $\alpha > 0$ *und hinreichend grosses* ϱ *bestimmten Reihenrest, so genügt dieser bei festen* A, $\mathfrak{K}$, μ, α *der Abschätzung*

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{T}(A, \Gamma_0) \\ m_1 > \alpha\sqrt{\varrho}}} = O(\varrho^{-\frac{1}{2}(r-2)}) \qquad (\varrho \to \infty). \tag{1.14}$$

Wenn es zwei höchstens von A, $\mathfrak{K}$, μ *(also nicht von* m_1 *oder* ϱ*) abhängige Konstanten* $C \geqq 0$, $\lambda_0 \geqq 0$ *derart gibt, dass*

$$|W_{m_1}(-\varrho, A, \mathfrak{K}, \mu)| \leqq C m_1^{1-\lambda_0}, \tag{1.15}$$

so lässt sich (1.14) *durch*

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{T}(A, \Gamma_0) \\ m_1 > \alpha\sqrt{\varrho}}} = O(\varrho^{-\frac{1}{2}(r-2+\lambda_0)}) \qquad (\varrho \to \infty) \tag{1.16}$$

ersetzen; (1.15) *ist für* $\lambda_0 = 0$ *trivial.* (1.15) *gilt nicht-trivial für ganzes* r, *wenn* v *ein Kongruenzcharakter ist, d.h. wenn es ein (nur von* $\mathfrak{K}$ *abhängiges) natürliches* $\bar{N}$ *derart gibt, dass*

$$\Gamma[\bar{N}] \subset \Gamma_0, \quad v(L) = (\pm 1)^r \text{ für } L \equiv \pm I \bmod \bar{N}, \tag{1.17}$$

und zwar mit den Werten

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2} - \varepsilon \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0. \tag{1.18}$$

Auch in den für die Partitionenprobleme wichtigen Fällen mit $r \equiv \frac{1}{2} \bmod 1$ dürften sich solche Verschärfungen von (1.15) ableiten lasen; vermutlich gilt (1.16) (mindestens) für alle $\lambda_0 < \frac{1}{3}$. Dass (1.16,18) unter der Voraussetzung (1.17) zutrifft, entspricht genau der Restabschätzung in Satz 1; dabei ist zu berücksichtigen, dass die in Satz 2 angegebene Koeffizientenformel auf der rechten Seite den Faktor $\dfrac{1}{2(n+\varkappa)}$ explizit enthält. In der analogen Koeffizientenformel für $r > 2$, die unter allgemeineren Bedingungen in der Gestalt (1.13) gilt, tritt dieser Faktor nicht explizit auf. Mit den zu Anfang dieses § 1 eingeführten Bezeichnungen ergibt sich für die gesuchten Koeffizienten der folgende

Satz 4. *Es sei* $r > 2$, $\mathfrak{K} = \{\Gamma_0, -r, v\}$, $N = N_\infty$, $\varkappa = \varkappa_\infty$, $\varkappa' = \varkappa'_\infty$. *Die Hauptteile einer in* $\mathfrak{H}$ *regulären Form* $F(\tau)$ *der Klasse* $\{\Gamma_0, r-2, v^{-1}\}$ *in den Spitzen* ζ_j $(1 \leqq j \leqq \sigma_0)$ *von* $\mathfrak{F}_0$ *seien durch*

$$(a_{j1}\tau + a_{j2})^{r-2} \sum_{\substack{h \\ 0<h+\varkappa_j \leqq n_{0j}+\varkappa_j}} b_{-h-\varkappa_j}(A_j, F)\, u_{N_j}^{-h-\varkappa_j}(A_j\tau)$$

gegeben. Dann gilt, wenn n ganz und $> -\varkappa'$ *ist:*

$$b_{n+\varkappa'}(I, F) = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{\substack{h \\ 0<h+\varkappa_j \leqq n_{0j}+\varkappa_j}} b_{-h-\varkappa_j}(A_j, F)\, \overline{\mathfrak{N}}_{n+\varkappa'}(A_j, \mathfrak{K}, h+\varkappa_j).$$

Wir haben schliesslich noch das *Verhalten der speziellen Modulfunktionen* zu bestimmen, auf deren Potenzprodukte die oben formulierten allgemeinen Sätze anzuwenden sind. Dabei kommt den expliziten Multiplikatorwerten eine besondere Bedeutung zu.

Wir setzen

$$\xi_m = \exp \frac{\pi i}{m} \quad \text{für ganzes } m > 0, \tag{1.19}$$

verstehen unter (j/g) für ganze j, g mit $g \equiv 1 \bmod 2$, $g > 0$ den Wert des Legendre-Jacobischen Restsymbols und definieren nun erstens, wenn ganze teilerfremde j, k mit $k \equiv 1 \bmod 2$ gegeben sind:

$$\begin{gathered} \left(\frac{j}{k}\right)^* = \left(\frac{j}{|k|}\right), \quad \left(\frac{j}{k}\right)_* = \left(\frac{j}{k}\right)^* (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} j-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} k-1}{2}} \qquad (j \neq 0), \\ \left(\frac{0}{\pm 1}\right)_* = \left(\frac{0}{\pm 1}\right)^* = 1; \end{gathered} \tag{1.20}$$

zweitens, wenn ein beliebiges $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma$ gegeben ist:

$$\begin{aligned} \lambda(S) &= \left(\frac{d}{c}\right)^* \xi_4^{-c}\, \xi_{12}^{(a+d)c-bd(c^2-1)} && \text{für } c \equiv 1 \bmod 2, \\ \lambda(S) &= \left(\frac{c}{d}\right)_* \xi_4^{d-1-cd}\, \xi_{12}^{(a+d)c-bd(c^2-1)} && \text{für } d \equiv 1 \bmod 2. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Mit $u_m^\varrho = \exp 2\pi i \frac{\varrho\tau}{m} = u_m^\varrho(\tau)$ gilt dann in der üblichen Ausdrucksweise der bekannte

SATZ 5. *Die Funktion* $\eta(\tau) = u_{24} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - u_1^m)$ *ist eine ganze Spitzenform* $\{\Gamma, -\frac{1}{2}, \lambda\}$.

Weiter sei N eine ganze Zahl $\geqq 2$, und es seien b_1, b_2 ganze Zahlen, die nicht beide durch N teilbar sind; unter $\mathfrak{b}$ werde der Zeilenvektor $\{b_1, b_2\}$ verstanden. Wir verabreden, die Argumente b_1, b_2, sobald sie in der Bezeichnung einer Funktion auftreten, durch $\mathfrak{b}$ zu ersetzen und umgekehrt.

Wir bilden die Ausdrücke

$$\omega(\mathfrak{b}, N) = \begin{cases} i\,\xi_N^{-2\left[\frac{b_1}{N}\right] b_2 + b_1 - \left[\frac{b_1}{N}\right] N} & \text{für } b_1 \not\equiv 0 \bmod N \\ i\,\xi_N^{-2\frac{b_1}{N} b_2}\,(1 - \xi_N^{2 b_2}) & \text{für } b_1 \equiv 0 \bmod N \end{cases} \tag{1.22}$$

$$g_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6} \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1,\ g_2(x') = g_2(x) \text{ für } x' \equiv x \bmod 1 \tag{1.23}$$

$$P(\tau, \mathfrak{b}, N) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv b_1 \bmod N}}^{\infty} (1 - \xi_N^{2 b_2} u_N^m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv -b_1 \bmod N}}^{\infty} (1 - \xi_N^{-2 b_2} u_N^m) \tag{1.24}$$

$$Q(\tau, \mathfrak{b}, N) = \omega(\mathfrak{b}, N) \exp\left(\pi i g_2\left(\frac{b_1}{N}\right)\tau\right) P(\tau, \mathfrak{b}, N) \tag{1.25}$$

und formulieren zusammenfassend

S ATZ 6. *Diese Funktionen $Q(\tau, \mathfrak{b}, N)$ haben folgende Eigenschaften:*

$$Q(\tau, -\mathfrak{b}, N) = -\xi_N^{-2(b_1+b_2)} Q(\tau, \mathfrak{b}, N) \qquad (\textit{Spiegelungsregel}); \tag{1.26}$$

$$Q(\tau, \mathfrak{b}^*, N) = \xi_{N^2}^{-2(b_1^* - b_1) b_2} Q(\tau, \mathfrak{b}, N) \qquad (\textit{Verschiebungsregel}), \tag{1.27}$$

wenn $\mathfrak{b}^* = \{b_1^*, b_2^*\} \equiv \mathfrak{b} \bmod N$; $Q(\tau, \mathfrak{b}, N)$ *hängt also von* b_2 *nur* $\bmod N$ *und für* $b_2 \equiv 0 \bmod N$ *auch von* b_1 *nur* $\bmod N$ *ab;*

$$Q(S\tau, \mathfrak{b}, N) = \mu(S, \mathfrak{b}, N)\, Q(\tau, \mathfrak{b} S, N) \qquad (\textit{Transformationsregel}), \tag{1.28}$$

wenn $S \subset \Gamma$; *dabei ist, wenn* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *und* $\mathfrak{b}' = \{b_1', b_2'\} = \mathfrak{b} S$ *gesetzt wird,*

$$\mu(S, \mathfrak{b}, N) = \lambda^2(S)\, \xi_N^{b_1 - b_1' + b_2 - b_2'}\, \xi_{N^2}^{ab\, b_1^2 + 2bc\, b_1 b_2 + cd\, b_2^2}. \tag{1.29}$$

Jedes $Q(\tau, \mathfrak{b}, N)$ stellt eine multiplikative Funktion der Gruppe $\Gamma[N]$ zum Kongruenzcharakter $v_{\mathfrak{b}, N}$ dar, der durch

$$v_{\mathfrak{b}, N}(L) = \mu(L, \mathfrak{b}, N)\, \xi_{N^2}^{-2(b_1' - b_1) b_2} \qquad \textit{für } L \equiv I \bmod N \tag{1.30}$$

erklärt ist; $v_{\mathfrak{b}, N}(L)$ wird auf der Gruppe $\Gamma[\overline{N}]$, wenn $\overline{N}$ = dem k. g. V. von 12 und $2N^2$ gesetzt wird, zu 1. $Q(\tau, \mathfrak{b}, N)$ ist nicht konstant, in $\mathfrak{H}$ überall regulär und von Null verschieden und besitzt in jeder Spitze der $\Gamma[N]$ entweder einen Pol oder eine Nullstelle. Denn die (i. a. nicht ganze) Ordnung von $Q(\tau, \mathfrak{b}, N)$ in der Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von $\Gamma[N]$ ($A \subset \Gamma$) hat den Wert

$$\frac{N}{2} g_2\left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{N}\right) \qquad (\underline{A} = \{a_1, a_2\}). \tag{1.31}$$

Dies folgt aus

$$Q(\tau, \mathfrak{b}, N) = \mu(A^{-1}, \mathfrak{b}, N)\, Q(A\tau, \mathfrak{b}A^{-1}, N) =$$
$$= \mu(A^{-1}, \mathfrak{b}, N)\, \omega(\mathfrak{b}A^{-1}, N) \exp\left(\pi i g_2 \left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{N}\right) A\tau\right) P(A\tau, \mathfrak{b}A^{-1}, N). \tag{1.32}$$

§ 2

Das Problem I

Wir betrachten zunächst die Funktionen $\eta(\tau/q)$ und $\eta(q\tau)$. Es seien die Untergruppen $\Gamma^0[q]$, $\Gamma_0[q]$, $\Gamma_0^0[q]$ von Γ wie folgt erklärt:

$$\left.\begin{aligned} &L \subset \Gamma^0[q] \text{ bedeute } L \subset \Gamma \text{ und } \beta \equiv 0 \bmod q,\\ &L \subset \Gamma_0[q] \text{ bedeute } L \subset \Gamma \text{ und } \gamma \equiv 0 \bmod q,\\ &L \subset \Gamma_0^0[q] \text{ bedeute } L \subset \Gamma \text{ und } \beta \equiv \gamma \equiv 0 \bmod q. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Setzt man

$$L^{(q)} = \begin{pmatrix} \alpha & q^{-1}\beta \\ q\gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{für } L \subset \Gamma^0[q], \qquad L_{(q)} = \begin{pmatrix} \alpha & q\beta \\ q^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{für } L \subset \Gamma_0[q],$$

so findet man

$$(1/q)\, L\tau = L^{(q)}(\tau/q) \quad \text{für } L \subset \Gamma^0[q], \qquad qL\tau = L_{(q)}(q\tau) \quad \text{für } L \subset \Gamma_0[q]$$

und daraus

$$\eta(\tau/q) \subset \{\Gamma^0[q], -\tfrac{1}{2}, \lambda^{(q)}\} \text{ mit } \lambda^{(q)}(L) = \lambda(L^{(q)}) \qquad (L \subset \Gamma^0[q]),$$
$$\eta(q\tau) \subset \{\Gamma_0[q], -\tfrac{1}{2}, \lambda_{(q)}\} \text{ mit } \lambda_{(q)}(L) = \lambda(L_{(q)}) \qquad (L \subset \Gamma_0[q]);$$

beide Funktionen stellen ganze Spitzenformen der betreffenden Gruppen dar, die in $\mathfrak{H}$ nicht verschwinden.

Als *Basiselemente für das Problem* I sind die Funktionen

$$f_q(\tau) = \eta(\tau)\eta^{-1}(\tau/q), \quad \varphi_q(\tau) = \eta^2(\tau)\eta^{-1}(\tau/q)\eta^{-1}(q\tau)$$

anzusehen. Beide Ausdrücke stellen in $\mathfrak{H}$ reguläre und dort nicht verschwindende multiplikative Modulfunktionen dar; man hat

$$f_q(\tau) \subset \{\Gamma^0[q], 0, \lambda\lambda^{(q)-1}\},$$
$$\varphi_q(\tau) \subset \{\Gamma_0^0[q], 0, \lambda^2\lambda^{(q)-1}\lambda_{(q)}^{-1}\}$$

mit den Produkt-Entwicklungen

$$f_q(\tau) = u_{24\,q}^{q-1} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_q^m + u_q^{2m} + \cdots + u_q^{(q-1)m}) = u_{24\,q}^{q-1} \sum_{\substack{m=1\\ m \not\equiv 0 (q)}}^{\infty} (1 - u_q^m)^{-1},$$

$$\varphi_q(\tau) = u_{24\,q}^{-(q-1)^2} \prod_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv 0\,(q)}}^{\infty} (1 + u_q^m + u_q^{2\,m} + \cdots + u_q^{(q-1)\,m}).$$

Daraus folgt

$$f_q^{k_0}(\tau)\,\varphi_q^{k_1}(\tau) = u_{24\,q}^{k_0(q-1)-k_1(q-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} r_n(k_0, k_1, q)\, u_q^n\,;$$

wir bezeichnen diese Funktion mit $F(\tau)$; es ist also

$$F(\tau) = F(\tau;\, k_0, k_1, q) = \eta^{k_0+2k_1}(\tau)\,\eta^{-k_0-k_1}\left(\frac{\tau}{q}\right)\eta^{-k_1}(q\,\tau)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} r_n(k_0, k_1, q)\, u_q^{n-\beta_\infty},$$

wo

$$-\beta_\infty = -\beta_\infty(k_0, k_1, q) = -\frac{q-1}{24}\,(-k_0 + k_1(q-1)) \tag{2.2}$$

die Ordnung der Funktion $F(\tau)$ im Unendlichen angibt, wenn diese in der zuständigen Ortsvariablen u_q gemessen wird.

Wir untersuchen nun das *Verhalten der Funktion* $F(\tau)$ genauer und bemerken vorab, dass wir bereits folgendes wissen: $F(\tau)$ ist eine in $\mathfrak{H}$ reguläre und dort nicht verschwindende multiplikative Funktion der Gruppe $\Gamma_0^0[q]$ (für $k_1 = 0$ sogar der diese umfassenden $\Gamma^0[q]$) mit dem Multiplikatorsystem

$$\Lambda_q = (\lambda\,\lambda^{(q)-1})^{k_0}\,(\lambda^2\,\lambda^{(q)-1}\,\lambda_{(q)}^{-1})^{k_1} = \Lambda_{k_0,\,k_1,\,q}\,. \tag{2.3}$$

Wir haben also lediglich noch erstens dieses Multiplikatorsystem Λ_q, zweitens das Verhalten von $F(\tau)$ in den Spitzen der $\Gamma_0^0[q]$ zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst Λ_q. Nach (1.21) gilt $\lambda(S) = (c/d)_*$ für $S \equiv I \bmod 24$ ($S \subset \Gamma$). Daraus folgt

$$\lambda^{(q)}(L) = \lambda_{(q)}(L) = \left(\frac{q\,\gamma}{\delta}\right)_* = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* \quad \text{für } L \equiv I \bmod 24\,q \qquad (L \subset \Gamma),$$

also $\Lambda_q(L) = 1$ für $L \equiv \pm I \bmod 24q$ ($L \subset \Gamma$) und beliebige k_0, k_1, d.h. Λ_q stellt einen Kongruenzcharakter auf der Gruppe $\Gamma_0^0[q]$ (bzw. $\Gamma^0[q]$) dar.

Die *explizite Bestimmung der Werte von* $\lambda\lambda^{(q)-1}$ *und* $\lambda\lambda_{(q)}^{-1}$ ist auf (1.21) zurückzuführen. In den Fällen $q > 3$ ergeben sich folgende Vereinfachungen: Für $L \subset \Gamma^0[q]$ gilt

$$\lambda(L)\,\lambda^{-1}(L^{(q)}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\delta}{q}\right)^* \xi_4^{(q-1)\gamma}\,\xi_{12}^{-(q-1)\{(\alpha+\delta)\gamma-\beta\delta(\gamma^2-1)\}}, & \text{wenn } \gamma \equiv 1\,(2), \\[2ex] \left(\dfrac{q}{\delta}\right)_* \xi_4^{(q-1)\gamma\delta}\,\xi_{12}^{-(q-1)\{(\alpha+\delta)\gamma-\beta\delta(\gamma^2-1)\}}, & \text{wenn } \delta \equiv 1\,(2). \end{cases}$$

Nach genau denselben Formeln berechnen sich die Werte $\lambda(L)\lambda^{-1}(L_{(q)})$ für $L \subset \Gamma_0[q]$ $(q > 3)$. Die Übereinstimmung der Alternativen für $\gamma \equiv \delta \equiv 1$ (2) ist hier unmittelbar als Konsequenz des quadratischen Reziprozitätsgesetzes zu erkennen. Schliesslich folgt

$$\lambda^2(L)\,\lambda^{-1}(L^{(q)})\,\lambda^{-1}(L_{(q)}) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\gamma}\,\xi_3^{-\frac{q-1}{2}\{(\alpha+\delta)\gamma-\beta\delta(\gamma^2-1)\}},$$

wenn $L \subset \Gamma_0^0[q]$ und $q > 3$. —

Man gewinnt ein *volles Vertretersystem inkongruenter Spitzen* mod $\Gamma_0^0[q]$ aus einer gruppentheoretischen Zerlegung des Typus (1.5). Eine solche ist, wie man mit elementaren Mitteln bestätigt, für $\Gamma_0 = \Gamma_0^0[q]$ durch

$$\Gamma = \sum_{l \bmod q} \Gamma_0 U^l + \sum_{l \bmod q} \Gamma_0 T U^l + \sum_{\substack{g,\, l \bmod q \\ (g,\, q)=1}} \Gamma_0 T U^g T U^l$$

gegeben. Das Vertretersystem wird also von den Spitzen ∞, 0, $-1/g$ gebildet; alle Breiten sind $= q$; als Matrizen $A = A_j$ treten auf:

$$A = A_j = I,\ T,\ T^{-1} U^{-g} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix} \quad (g \bmod q,\ (g,\, q) = 1;\ \sigma_0 = q + 1).$$

Der Fall $A = I$ ist erledigt. Wir betrachten den Fall $A = T$. Man findet

$$f_q(T\tau) = q^{-\frac{1}{2}} f_q^{-1}(q\tau) = q^{-\frac{1}{2}} u_{24}^{-(q-1)} \prod_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv 0 \bmod q}}^{\infty} (1 - u_q^{q\,m}),$$

$$\varphi_q(T\tau) = \varphi_q(\tau),$$

und daher

$$F(T\tau;\, k_0,\, k_1,\, q) = q^{-\frac{1}{2}k_0} \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(0)}(k_0,\, k_1,\, q)\, u_q^{n-\beta_0},$$

wo

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(0)}(k_0,\, k_1,\, q)\, u_q^n = \prod_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv 0 (q)}}^{\infty} \{(1 - u_q^{q\,m})^{k_0} (1 + u_q^m + u_q^{2\,m} + \cdots + u_q^{(q-1)\,m})^{k_1}\} =$$

$$= \prod_{\substack{m=1 \\ m \not\equiv 0 (q)}}^{\infty} \{(1 - u_q^m)^{k_0} (1 + u_q^m + u_q^{2\,m} + \cdots + u_q^{(q-1)\,m})^{k_0+k_1}\}$$

und

$$-\beta_0 = -\beta_0(k_0,\, k_1,\, q) = -\frac{q-1}{24}(k_0 q + k_1(q-1)),\quad q^{-\frac{1}{2}k_0} > 0. \tag{2.4}$$

Damit ist auch der Fall $A = T$ erledigt.

Zu einem ganzen $g \not\equiv 0 \bmod q$ bestimme man ganze g', ν mit $gg' = \nu q + 1$ und setze

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} \subset \Gamma^0[q], \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} q & g' \\ -g & -\nu \end{pmatrix} \subset \Gamma.$$

Dann wird

$$f_q(A^{-1}\tau) = \lambda(A^{-1})\lambda^{(q)-1}(A^{-1}) f_q(\tau),$$

$$q\, A^{-1}\tau = B^{-1}\frac{\tau - g'}{q},$$

$$\varphi_q(A^{-1}\tau) = \lambda^2(A^{-1})\,\lambda^{(q)-1}(A^{-1})\,\lambda^{-1}(B^{-1})\,q^{\frac{1}{2}}\,\eta^2(\tau)\,\eta^{-1}\left(\frac{\tau}{q}\right)\eta^{-1}\left(\frac{\tau - g'}{q}\right),$$

$$\varphi_q(A^{-1}\tau) = c_{q,g}\, u_q^{\frac{q-1}{12}}\, \mathfrak{P}_{q,g}(u_q),$$

wo $c_{q,g}$ eine gewisse Konstante des Betrages $\sqrt{q}$, $\mathfrak{P}_{q,g}(u)$ eine gewisse in $|u| < 1$ reguläre Potenzreihe bezeichnet. Diese Formeln zeigen, dass $F(\tau)$ in allen Spitzen $A^{-1}\infty = -1/g$ regulär ist und verschwindet; *$F(\tau)$ besitzt also stets in der Spitze $\zeta = 0$ und ausserdem höchstens noch in der Spitze $\zeta = \infty$ einen nicht verschwindenden Hauptteil.*

Zur Reihendarstellung der Partitionenfunktionen $r_n(k_0, k_1, q)$ benötigt man noch die Kenntnis der *in der Reihe auftretenden $m_1 \subset \mathfrak{T}(A_j, \Gamma_0)$ und* ausserdem *der Restsysteme* $\mathfrak{R}_{m_1}(A_j, \Gamma_0)$, mit denen die Exponentialsummen W_{m_1} gebildet werden. Man ermittelt zweckmässig zunächst die genauen Bedingungen dafür, dass der mit ganzen m_1, m_2 versehene Vektor $\{m_1, m_2\}$ die zweite Zeile einer Matrix M aus $A\Gamma_0$ sei, und danach das System $\mathfrak{T}(A, \Gamma_0)$, beides für $A = I$ oder T, $\Gamma_0 = \Gamma_0^0[q]$. Als notwendige und hinreichende Bedingungen ergeben sich,

TABELLE 1

wenn $A =$	für $\{m_1, m_2\} = \underline{M}$, $M \subset A\Gamma_0$:	für $m_1 \subset \mathfrak{T}(A, \Gamma_0)$:
I	$(m_1, m_2) = 1$, $m_1 \equiv 0 \bmod q$	$m_1 \equiv 0 \bmod q$
T	$(m_1, m_2) = 1$, $m_2 \equiv 0 \bmod q$	$(m_1, q) = 1$

Wir *berechnen* auf Grund dieser Tabelle *die Werte $v(A)W_1$ und,* wenn $q > 2$, *auch* $v(A)W_2$ ($v = \Lambda_q$, vgl. Satz 2; wir setzen den willkürlichen Wert $\Lambda_q(T)$ im folgenden $= 1$). Der Fall $m_1 = 1$ tritt nur für $A = T$ ein. Das System $\mathfrak{R}_1(T, \Gamma_0)$ wird durch $j \bmod q$, $j \equiv 0 \bmod q$ beschrieben, so dass die (einzige) zugehörige Matrix $\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix}$ mit T identifiziert werden kann, was

$$W_1(n - \beta_\infty, T, \mathfrak{R}, m - \beta_0) = 1 \tag{2.5}$$

zur Folge hat. Dabei ist $\mathfrak{K} = \{\Gamma_0, -2, \Lambda_q\}$, $\Gamma_0 = \Gamma_0^0[q]$. Merkwürdigerweise findet sich auch für $v(A)\, W_2$, wenigstens solange $q > 2$ ist, ein höchst einfacher Ausdruck. $m_1 = 2$ erfordert für $q > 2$ ebenfalls $A = T$ und gibt für $j \subset \mathfrak{R}_2(T, \Gamma_0)$ die Bedingungen

$$j \equiv 0 \bmod q,\ j \bmod 2q,\ (j, 2) = 1,$$

die durch $j = q$ erfüllt werden können. Mit

$$\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \frac{1}{2}(q^2-1) \\ 2 & q \end{pmatrix}$$

erhält man unter Benutzung der angegebenen Multiplikatorwerte

$$W_2(n-\beta_\infty, T, \mathfrak{K}, m-\beta_0) = (-1)^{m+n} \qquad (q > 2); \tag{2.6}$$

es empfiehlt sich, die Rechnung für $q = 3$ nach (1.21), (2.3) gesondert auszuführen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun Satz 2 anwenden und die *Reihendarstellung für die* $r_n(k_0, k_1, q)$ explizit formulieren. Es ergibt sich, wenn $n > 0$ und $> \beta_\infty$ ist:

$$r_n(k_0, k_1, q) = \frac{1}{2n-2\beta_\infty} \mathfrak{S}_n^{(\infty)}(k_0, k_1, q) + \frac{1}{2n-2\beta_\infty} q^{-\frac{1}{2}k_0} \mathfrak{S}_n^{(0)}(k_0, k_1, q), \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{S}_n^{(\infty)}(k_0, k_1, q) = \sum_{0 \leq m < \beta_\infty} r_m(k_0, k_1, q)\, a_{n-\beta_\infty}(I, \mathfrak{K}, \beta_\infty - m), \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{S}_n^{(0)}(k_0, k_1, q) = \sum_{0 \leq m < \beta_0} r_m^{(0)}(k_0, k_1, q)\, a_{n-\beta_\infty}(T, \mathfrak{K}, \beta_0 - m), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} a_{n-\beta_\infty}&(I, \mathfrak{K}, \beta_\infty - m) = \\ &= \sum_{m_1'=1}^{\infty} W_{q m_1'}(n-\beta_\infty, I, \mathfrak{K}, m-\beta_\infty)\, f_1\!\left(\frac{4\pi}{q^2 m_1'} \sqrt{(n-\beta_\infty)(\beta_\infty - m)}\right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} a_{n-\beta_\infty}&(T, \mathfrak{K}, \beta_0 - m) = \\ &= \sum_{\substack{m_1=1 \\ (m_1, q)=1}}^{\infty} W_{m_1}(n-\beta_\infty, T, \mathfrak{K}, m-\beta_0)\, f_1\!\left(\frac{4\pi}{q\, m_1} \sqrt{(n-\beta_\infty)(\beta_0 - m)}\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit den Daten (2.2) β_∞, (2.4) β_0, $\mathfrak{K} = \{\Gamma_0^0[q], -2, \Lambda_q\}$ (vgl. (2.1, 3)) und mit $\Lambda_q(T) = 1$, $f_1(z) = z\, I_1(z)$, $f_1(2\pi t) \sim \sqrt{t}\, e^{2\pi t}$ $(t > 0,\ t \to \infty)$. Die Summe (2.8) $\mathfrak{S}_n^{(\infty)}(k_0, k_1, q)$ verschwindet, wenn $\beta_\infty \leq 0$, d. h. $k_1(q-1) \leq k_0$.

Aus dieser Darstellung lassen sich, wie wir zeigen wollen, auf Grund von (2.5,6) die genauen *Wachstumsverhältnisse* einiger *der asymptotisch grössten Glieder* leicht ablesen. Eine vollständige Übersicht im Sinne einer allgemein gültigen Rangordnung des Wachstums, die das asymptotische Verhalten sämtlicher Glieder berücksichtigt, ist gegenwärtig deshalb nicht zu erlangen, weil von den Exponentialsummen (1.1) W_{m_1} ausser scharfen Abschätzungen des Betrages nach oben so gut wie nichts bekannt ist. Man muss sich also hier mit den Aussagen von (P I) 7. begnügen. Die erwähnten Konsequenzen der obigen Darstellung ergeben sich zwangsläufig aus der Bestimmung der Glieder von (2.10,11), in denen f_1 mit den grössten Argumenten auftritt. Dies koinzidiert ersichtlich mit $A = T$, $m_1 = 1$, so dass die Frage entsteht, welche dieser Glieder alle anderen überwiegen; nach ihnen sind dann an zweiter Stelle die Glieder mit $A = T$, $m_1 = 2$ zu berücksichtigen.

Die erste Frage führt, wenn die Glieder von (2.11) in Betracht gezogen werden, auf $\sqrt{\beta_0 - m} > \sqrt{\frac{1}{4}\beta_0}$, d. h. $0 \leqq m < \frac{3}{4}\beta_0$. Wegen $\frac{1}{4}\beta_0 \geqq \frac{1}{4}\beta_\infty \geqq \frac{1}{q^2}\beta_\infty$ können die Glieder von (2.10) gegenüber den mit $0 \leqq m < \frac{3}{4}\beta_0$ gebildeten Gliedern von (2.11) vernachlässigt werden und man erhält

SATZ 7. *Mit* $\gamma = \gamma_q(k_0, k_1) = \frac{4}{q^2}\beta_0 = \frac{1}{6}\left\{k_0\left(1 - \frac{1}{q}\right) + k_1\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2\right\}$ *gilt*

$$r_n(k_0, k_1, q) = q^{-\frac{1}{2}k_0}\frac{1}{2n - 2\beta_\infty}\sum_{0 \leqq m < \frac{3}{16}q^2\gamma} r_m^{(0)}(k_0, k_1, q)\, f_1\left(2\pi\sqrt{\gamma - \frac{4m}{q^2}}\sqrt{n - \beta_\infty}\right) +$$
$$+ O\left((n - \beta_\infty)^{-1} f_1\left(2\pi\sqrt{\frac{1}{4}\gamma}\sqrt{n - \beta_\infty}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

Hieraus ergibt sich das asymptotische Hauptglied von $r_n(k_0, k_1, q)$ *für* $m = 0$ *mit dem Werte* $r_0^{(0)}(k_0, k_1, q) = 1$.

Im Falle $q = 2$ tritt $m_1 = 2$ in (2.11) nicht auf, weshalb man, wenn nur (2.11) in Betracht käme, die obere Summationsschranke

$$\frac{3}{16}q^2\gamma = \frac{3}{4}\beta_0 = \frac{k_1 + 2k_0}{32} \text{ in Satz 5 durch } \frac{8}{9}\beta_0 = \frac{k_1 + 2k_0}{27}$$

ersetzen dürfte. Die Berücksichtigung von (2.10) führt auf $\beta_0 - m > \frac{1}{4}\beta_\infty$, und man findet daher

SATZ 8. *Im Falle* $q = 2$ *setze man*

$$\delta_2 = \delta_2(k_0, k_1) = \min\left(\frac{k_1 + 2k_0}{27}, \frac{k_1 + 3k_0}{32}\right), \qquad \varrho_2 = \varrho_2(k_0, k_1) = \max\left(\frac{k_1 + 2k_0}{216}, \frac{k_1 - k_0}{96}\right).$$

Dann gilt mit $\beta_\infty = \frac{k_1 - k_0}{24}$:

$$r_n(k_0, k_1, 2) = 2^{-\frac{1}{2}k_0}\frac{1}{2n - 2\beta_\infty}\sum_{0 \leqq m < \delta_2} r_m^{(0)}(k_0, k_1, 2)\, f_1\left(2\pi\sqrt{\frac{k_1 + 2k_0}{24} - m}\sqrt{n - \beta_\infty}\right) +$$
$$+ O\left((n - \beta_\infty)^{-1} f_1\left(2\pi\sqrt{\varrho_2}\sqrt{n - \beta_\infty}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

Das analoge Vorgehen liefert für $q > 2$ nach (2.6)

Satz 9. *Im Falle $q > 2$ gilt*

$$r_n(k_0, k_1, q) = q^{-\frac{1}{2}k_0} \frac{1}{2n - 2\beta_\infty} \sum_{0 \leq m < \frac{2}{9} q^2 \gamma} r_m^{(0)}(k_0, k_1, q) f_1\left(2\pi \sqrt{\gamma - \frac{4m}{q^2}} \sqrt{n - \beta_\infty}\right) +$$

$$+ q^{-\frac{1}{2}k_0} \frac{(-1)^n}{2n - 2\beta_\infty} \sum_{0 \leq m' < \frac{5}{36} q^2 \gamma} (-1)^{m'} r_{m'}^{(0)}(k_0, k_1, q) f_1\left(2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{4} - \frac{m'}{q^2}} \sqrt{n - \beta_\infty}\right) +$$

$$+ O\left((n - \beta_\infty)^{-1} f_1\left(2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{9}} \sqrt{n - \beta_\infty}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

Man bestätigt, dass eine Koinzidenz zweier Argumente von f_1 in diesen Summen über m und über m' (d.h. $4m - m' = \frac{3}{4} q^2 \gamma = 3\beta_0$) nur eintreten kann, wenn $\frac{q-1}{2}(k_0 q + k_1(q-1))$ $= 12\beta_0 \equiv 0 \mod 4$ gilt. Wenn eine solche Koinzidenz eintritt, so gilt für die beteiligten m, m':

$$m - m' > \frac{1}{12} q^2 \gamma = \frac{1}{3}\beta_0.$$

Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen zu den *Sonderfällen $k_1 = 0$ und $k_0 = 0$* Platz finden. Im Falle $k_1 = 0$ gehört $F(\tau) = f_q^{k_0}(\tau)$ zur Gruppe $\Gamma^0[q]$, deren Fundamentalbereich nur zwei Spitzen (etwa ∞ und 0) enthält. Beim Übergang von $\Gamma^0[q]$ zu $\Gamma_0^0[q]$ bleibt die Spitze 0 unzerlegt, während ∞ in q Spitzen der Breite q, entsprechend ∞ und den $-\frac{1}{g}$ ($g \mod q$, $(g, q) = 1$), zerfällt. Da f_q als Funktion der $\Gamma^0[q]$ nur in der Spitze 0 einen Pol hat, so gilt folglich das Gleiche für f_q als Funktion der $\Gamma_0^0[q]$ $\left(\beta_\infty(k_0, 0, q) = -\frac{q-1}{24} k_0 < 0\right)$, und es ergibt sich mithin in den obigen Resultaten weder inhaltlich noch formal die geringste Vereinfachung dadurch, dass man $F(\tau)$ im Falle $k_1 = 0$ als Funktion der $\Gamma_0^0[q]$ umfassenden Gruppe $\Gamma^0[q]$ betrachtet.

Im Falle $k_0 = 0$ gehört $F(\tau) = \varphi_q^{k_1}(\tau)$ zu derjenigen Obergruppe

$$\Gamma_0^* = \Gamma_0^{0*}[q] \text{ von } \Gamma_0 = \Gamma_0^0[q],$$

welche von Γ_0 und der Matrix T erzeugt werd; Γ_0 hat in Γ_0^* offenbar den Index 2. Für $q = 2$ fällt Γ_0 mit $\Gamma[2]$ und daher Γ_0^* mit der von U^2 und T erzeugten ϑ-Gruppe Γ_ϑ zusammen. Für $q > 2$ bezeichne N^* eine Spitzenbreite in Γ_0^*. Da sowohl $2N^*$ durch q, als auch q durch N^* teilbar ist, gilt $N^* = q$, sodass ein Fundamentalbereich der Γ_0^* genau $\frac{1}{2}(q+1)$ Spitzen enthält, die sämtlich die Breite q haben. Im übrigen sind 0 und ∞ einerseits, $-\frac{1}{g}$ und $-\frac{1}{g'}$ andrerseits einander nach Γ_0^* äquivalent, wenn $(g, q) = 1$, $g + g' \equiv 0 \mod q$.

Man erkennt leicht, dass man formal in den obigen Resultaten keine Vereinfachung erzielt, indem man $F = \varphi_q^{k_1}$ als Funktion der Γ_0 umfassenden Γ_0^* betrachtet. Inhaltlich ergibt sich eine Vereinfachung dadurch, dass nun

$$r_m^{(0)}(0, k_1, q) = r_m(0, k_1, q) \geqq 1$$

zutrifft; im allgemeinen Falle weiss man von $r_m^{(0)}(k_0, k_1, q)$ so gut wie nichts. Die Möglichkeit einer Koinzidenz im oben genannten Sinne mit genauer Kompensation der betreffenden Summenglieder lässt sich nicht ohne weiteres ausschliessen, da, wie man an numerischen Beispielen für kleine m, q und $k_1 = 1$ sieht, r_m für verschiedene m den gleichen Wert annehmen kann.

§ 3

Die Funktionen Q und R

Es sei q eine (fest gewählte) Primzahl mit $q \equiv 1 \bmod 4$, $q > 5$. Wir verabreden die folgende *Bezeichnung*: Ein oberer Index $^+$ bzw. $^-$ an einer Summe oder einem Produkt bedeute, dass der laufende Buchstabe — etwa m — sowohl den sonst noch angegebenen Bedingungen, als auch der zusätzlichen Bedingung $(m/q) = +1$ bzw. $(m/q) = -1$ unterliegt. Obere oder untere Indices $\pm$ und $\mp$ dienen wie üblich der alternativen Zusammenfassung solcher Formalismen. Der Buchstabe h an einer Summe oder einem Produkt durchläuft stets die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(q-1)$, soweit sich dies mit einer evt. gestellten weiteren Bedingung verträgt. Es sei $h \subset \mathfrak{M}$ eine solche Bedingung; dann schreiben wir also genauer

$$\sum_{h \subset \mathfrak{M}} \mathfrak{A}_h = \sum_{\substack{h=1 \\ h \subset \mathfrak{M}}}^{\frac{1}{2}(q-1)} \mathfrak{A}_h, \qquad \sum_{h \subset \mathfrak{M}}^{\pm} \mathfrak{A}_h = \sum_{\substack{h=1 \\ h \subset \mathfrak{M},\, \left(\frac{h}{q}\right) = \pm 1}}^{\frac{1}{2}(q-1)} \mathfrak{A}_h.$$

Entsprechendes gelte für Produkte über h.

Nach (1.22–25) ist für $1 \leqq h \leqq (q-1)/2$:

$$Q(\tau, h, 0, q) = i\, \xi_q^h \exp\left(\pi i\, g_2\left(\frac{h}{q}\right)\tau\right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv \pm h\,(q)}}^{\infty} (1 - u_q^m); \tag{3.1}$$

setzt man also

$$e_q^{\pm} = \sum_h{}^{\pm} h, \quad \beta_q^{\pm} = \sum_h{}^{\pm} g_2\left(\frac{h}{q}\right), \tag{3.2}$$

$$P_{\pm}(\tau, q) = \prod_{m=1}^{\infty}{}^{\pm} (1 - u_q^m), \tag{3.3}$$

$$Q_{\pm}(\tau, q) = \prod_h^{\pm} Q(\tau, h, 0, q), \tag{3.4}$$

so erhält man

$$Q_{\pm}(\tau, q) = i^{\frac{1}{2}(q-1)} \xi_q^{e_q^{\pm}} e^{\pi i \beta_q^{\pm} \tau} P_{\pm}(\tau, q). \tag{3.5}$$

Weiter wird nach (1.28, 29) für $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma$

$$Q_{\pm}(S\tau, q) = \mu_{\pm}(S, q) \hat{Q}_{\pm}(\tau, S, q) \tag{3.6}$$

mit

$$\begin{gathered} \mu_{\pm}(S, q) = \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}(S)\, \xi_q^{(1-a-b)e_q^{\pm}} \xi_{q^2}^{a b e_q^{(2)\pm}}, \\ e_q^{(2)\pm} = \sum_h^{\pm} h^2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\hat{Q}_{\pm}(\tau, S, q) = \prod_h^{\pm} Q(\tau, ah, bh, q). \tag{3.8}$$

Aus (3.8) ist bereits zu erkennen, wie man eine *maximale Invarianzgruppe der Funktionen* $Q_{\pm}(\tau, q)$ zu bestimmen hat: Damit jedes $Q_{\pm}(\tau, q)$ bei Anwendung eines S aus Γ bis auf einen konstanten Faktor in sich übergehe, genügt es jedenfalls, $b \equiv 0 \bmod q$ und $(a/q) = +1$ zu verlangen. Im übrigen zeigen die zwischen den logarithmischen Ableitungen der $Q(\tau, \mathfrak{b}, q)$ bestehenden linearen Relationen, dass der gewünschte Effekt nicht mit geringeren Forderungen an S zu erreichen ist. Wir definieren also die Gruppe

$$\Gamma^{0+}[q] \quad \text{als Menge der } L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma \quad \text{mit} \quad \beta \equiv 0 \bmod q, \quad \left(\frac{\alpha}{q}\right) = +1. \tag{3.9}$$

Nach (1.27) ergibt sich für $L \subset \Gamma^{0+}[q]$:

$$\hat{Q}_{\pm}(\tau, L, q) = \prod_h^{\pm} Q(\tau, \alpha h, 0, q)$$

und nach (1.26), wenn allgemein $R_q(g) = g - \left[\frac{g}{q}\right] q$ den nicht-negativen reduzierten Rest der ganzen Zahl g mod q bezeichnet:

$$\hat{Q}_{\pm}(\tau, L, q) = \Big(\prod_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} (-\xi_q^{2\alpha h}) \Big) Q_{\pm}(\tau, q).$$

Daher wird insgesamt

$$Q_{\pm}(L\tau, q) = v_{\pm}(L, q) Q_{\pm}(\tau, q) \qquad (L \subset \Gamma^{0+}[q]) \tag{3.10}$$

mit

$$v_{\pm}(L, q) = \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}(L)\, w_{\pm}(L, q) \tag{3.11}$$

$$w_\pm (L, q) = \xi_q^{(1-\alpha-\beta) e_q^\pm} \xi_{q^2}^{\alpha\beta e_q^{(2)\pm}} \prod_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} (-\xi_q^{2\alpha h}). \tag{3.12}$$

Wegen $q \equiv 1 \bmod 4$ hängt der Faktor $\lambda^{\frac{1}{4}(q-1)}(L)$ von L nur mod 12 ab [(1.21)]; er ist nicht weiter zu vereinfachen. Dagegen gestattet der Ausdruck (3.12), wie wir jetzt zeigen, eine überraschend starke *Vereinfachung.* Wir betrachten zunächst die beiden Vorzeichen

$$\mu_\pm (\alpha, q) = \prod_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} (-1).$$

Nach dem Gaußschen Lemma ist ihr Produkt $= (\alpha/q) = +1$. Andrerseits folgt aus

$$\prod_h^+ (\alpha h) = \alpha^{\frac{q-1}{4}} \prod_h^+ h \equiv \mu_+ (\alpha, q) \prod_h^+ h \mod q,$$

dass $\mu_+ (\alpha, q) \equiv \alpha^{\frac{q-1}{4}} \bmod q$. Insgesamt ergibt sich

$$\mu_+ (\alpha, q) = \mu_- (\alpha, q) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{q}\right) = \left(\frac{\varrho}{q}\right) \quad (\alpha \equiv \varrho^2 \mod q),$$

wo also $\sqrt{\alpha}$ eine Kongruenzwurzel ϱ aus $\alpha \bmod q$ darstellt, und daher nach (3.12)

$$\begin{gathered} w_\pm (L, q) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{q}\right) w'_\pm (L, q), \quad w'_\pm (L, q) = \xi_q^{\psi_\pm (\alpha, \beta, q)}, \\ \psi_\pm (\alpha, \beta, q) = (1 - \alpha - \beta) e_q^\pm + \alpha \frac{\beta}{q} e_q^{(2)\pm} + \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} 2 \alpha h. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Hier treten alle Paare teilerfremder ganzer α, β mit $(\alpha/q) = +1$, $\beta \equiv 0 \bmod q$ als Argumente auf; zu bestimmen ist das Verhalten der mit diesen α, β zu bildenden arithmetischen Funktionen $\psi_\pm(\alpha, \beta, q) \bmod 2q$.

Wir bedienen uns zu diesem Zwecke der folgenden Tatsachen und Überlegungen: Erstens hat $s_l (m) = \sum_{\nu=1}^{m} \nu^l$ für natürliche m und $l = 1, 2, 4$ bekanntlich die Werte

$$\begin{gathered} s_1(m) = \tfrac{1}{2} m (m+1), \quad s_2(m) = \tfrac{1}{6} m (m+1)(2m+1), \\ s_4(m) = \tfrac{1}{30} m (6m^4 + 15m^3 + 10m^2 - 1) = \tfrac{1}{30} m (m+1)(2m+1)(3m^2 + 3m - 1). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Zweitens setze man für ganze zu q teilerfremde α:

$$\eta_\alpha^\pm (q) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} h, \qquad \eta_\alpha'^{\pm} (q) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) < \frac{q}{2}}}^{\pm} h.$$

Dann findet man nach (3.2) im Falle $(\alpha/q) = +1$:

$$\eta_\alpha^\pm(q) + \eta_\alpha'^\pm(q) = e_q^\pm, \quad -\alpha\,\eta_\alpha^\pm(q) + \alpha\,\eta_\alpha'^\pm(q) \equiv e_q^\pm \bmod q,$$

also

$$\sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{q}{2}}}^{\pm} 2\,\alpha\,h = 2\,\alpha\,\eta_\alpha^\pm(q) \equiv (\alpha-1)e_q^\pm \bmod q. \tag{3.15}$$

Drittens hat man nach der zweiten Formel (3.7) und nach (3.14)

$$e_q^{(2)+} + \sum_h{}^{+} (q-h)^2 \equiv \sum_h h^4 = s_4\left(\frac{q-1}{2}\right) \equiv 0 \bmod q,$$

$$e_q^{(2)+} - \sum_h{}^{+} (q-h)^2 = \sum_h{}^{+} (2\,h\,q - q^2) \quad \equiv 0 \bmod q,$$

$$e_q^{(2)+} + e_q^{(2)-} = \sum_h h^2 = s_2\left(\frac{q-1}{2}\right) \equiv 0 \bmod q,$$

also

$$e_q^{(2)+} \equiv e_q^{(2)-} \equiv 0 \bmod q. \tag{3.16}$$

Aus (3.15,16) folgt für die genannten α, β:

$$\psi_\pm(\alpha, \beta, q) \equiv 0 \bmod q;$$

überdies ist $e_q^{(2)\pm} \equiv e_q^\pm \bmod 2$ und daher wegen $(\alpha, \beta) = 1$:

$$\psi_\pm(\alpha, \beta, q) \equiv (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)e_q^\pm \equiv 0 \bmod 2.$$

Nach (3.11,12,13) besagt dies (für beide Vorzeichen)

$$v_\pm(L, q) = \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}(L)\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{q}\right) \qquad (L \subset \Gamma^{0+}[q]);$$

wir formulieren das Ergebnis als

SATZ 10. *Für jede Primzahl $q > 5$ mit $q \equiv 1 \bmod 4$ stellen die beiden Funktionen $Q_+(\tau, q)$ und $Q_-(\tau, q)$ [vgl. (3.1–5)] multiplikative Modulfunktionen auf der Gruppe (3.9) $\Gamma^{0+}[q]$ dar. Sie sind beide in der oberen τ-Halbebene regulär und von Null verschieden. Ihre Multiplikatorsysteme stimmen miteinander und mit dem in der folgenden Art definierten geraden abelschen Charakter v_q der Gruppe $\Gamma^{0+}[q]$ überein: Es sei*

$$v_q(L) = \lambda^{\frac{q-1}{2}}(L)\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{q}\right), \quad \textit{wenn}\ L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \subset \Gamma^{0+}[q] \tag{3.17}$$

und $(\sqrt{\alpha}/q) = (\varrho/q)$ für ein ganzes ϱ mit $\alpha \equiv \varrho^2 \bmod q$ gesetzt wird.

Wenn man direkt bestätigen will, dass v_q einen geraden abelschen Charakter auf $\Gamma^{0+}[q]$ darstellt, muss man zunächst benutzen, dass λ^2 einen (ungeraden) abelschen Charakter auf Γ und $(\sqrt{\alpha}/q)$ einen solchen auf $\Gamma^{0+}[q]$ darstellt. Das erstere folgt aus $\eta^2 \subset \{\Gamma, -1, \lambda^2\}$, das letztere ist unmittelbar einzusehen. Ersetzt man in $v_q(L)$, um die Parität zu bestimmen, L durch $-L$, so nimmt $\lambda^{(q-1)/2}(L)$ den Faktor $(-1)^{(q-1)/4}$, $(\sqrt{\alpha}/q)$ den Faktor $(\sqrt{-1}/q)$ auf. Aus

$$-1 \equiv \left(\frac{q-1}{2}!\right)^2 \bmod q, \quad \frac{q-1}{2}! = \prod_h^+ h \cdot \prod_h^- h$$

ergibt sich in der Tat $(\sqrt{-1}/q) = (-1)^{(q-1)/4}$. Man erkennt ferner auch leicht, dass $v_q(L)$ sogar einen Kongruenzcharakter auf der Gruppe $\Gamma^{0+}[q]$ darstellt. Denn nach (1.21) gilt $v_q(L) = 1$ für $L \equiv I \bmod 12q$, mithin für $L \subset \Gamma[12q]$.

Wir bestimmen jetzt das *Verhalten der Funktionen* $Q_{\pm}(\tau, q)$ *in den Spitzen eines Fundamentalbereiches der* $\Gamma^{0+}[q]$ und demgemäss zunächst eine Zerlegung vom Typus (1.5) für $\Gamma_0 = \Gamma^{0+}[q]$. Es seien (zu gegebenem q) u, u', ν feste ganze Zahlen folgender Beschaffenheit:

$$\left(\frac{u}{q}\right) = -1, \quad uu' \equiv 1 \bmod q, \quad uu' = \nu q + 1,$$

und es sei

$$S_{1,u} = \begin{pmatrix} u & \nu q \\ 1 & u' \end{pmatrix}, \quad S_{2,u} = \begin{pmatrix} q & -u' \\ u & -\nu \end{pmatrix}.$$

Man bestätigt, dass diese Zerlegung mit $\sigma_0 = 4$ und den in der folgenden Tabelle angegebenen Daten besteht:

TABELLE 2

j	ζ_j	N_j	A_j	$\underline{A_j}$	$h a_{j2}, -h a_{j3}$
1	∞	q	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{0, 1\}$	$h, 0$
2	u	q	$-S_{1,u}^{-1} = \begin{pmatrix} -u' & \nu q \\ 1 & -u \end{pmatrix}$	$\{1, -u\}$	$-hu, -h\nu q$
3	0	1	$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{1, 0\}$	$0, h$
4	$\frac{q}{u}$	1	$-S_{2,u}^{-1} = \begin{pmatrix} \nu & -u' \\ u & -q \end{pmatrix}$	$\{u, -q\}$	$-hq, hu'$

Die Entwicklung der Funktionen $Q_\pm(\tau, q)$ im Unendlichen ($j = 1$, $A = I$) ist durch (3.5) gegeben. In den anderen Spitzen benutzen wir (3.6,7,8) mit $S = \pm A_j^{-1}$ und erhalten zunächst für $j = 2$, $S = -A_2^{-1} = S_{1,u}$ nach (1.26):

$$\hat{Q}(\tau, -A_2^{-1}, q) = \Big(\prod_{\substack{h \\ R_q(uh) > \frac{q}{2}}}^{\pm} (-\xi_q^{2uh})\Big)\, Q_\mp(\tau, q),$$

$$Q_\pm(S_{1,u}\tau, q) = \chi_\pm(S_{1,u}, q)\, Q_\mp(\tau, q), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \chi_\pm(S_{1,u}, q) &= \lambda^{\frac{q-1}{2}}(S_{1,u})\, \chi_\pm^*(S_{1,u}, q), \\ \chi_\pm^*(S_{1,u}, q) &= \xi_q^{(1-u-\nu q)e_q^\pm + u\nu e_q^{(2)\pm}} \prod_{\substack{h \\ R_q(uh) > \frac{q}{2}}}^{\pm} (-\xi_q^{2uh}). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Um diesen Ausdruck zu *vereinfachen*, untersuchen wir an erster Stelle den Beitrag der Faktoren -1 im Produkt auf der rechten Seite. Bezeichnet $\sigma_q^\pm(u)$ die Anzahl der h mit $1 \leqq h \leqq (q-1)/2$, $(h/q) = \pm 1$, $R_q(uh) > q/2$, so liefert die Betrachtung des Produkts $\prod_h (uh) = \prod_h^+ (uh) \prod_h^- (uh)$ zunächst

$$\sigma_q^+(u) + \sigma_q^-(u) \equiv 1 \bmod 2. \tag{3.20}$$

Weiter schliesst man aus den Kongruenzen

$$(-1)^{\frac{q-1}{4}} \prod{}^+ h^2 \equiv \prod{}^+ h \prod{}^+ (q-h) \equiv \prod h^2 = \left(\frac{q-1}{2}!\right)^2 \quad \bmod q,$$

$$u^{\frac{q-1}{4}} \prod{}^+ h = \prod{}^+ (uh) \equiv (-1)^{\sigma_q^+(u)} \prod{}^- h \quad \bmod q,$$

dass

$$\frac{q-1}{2}! = \prod{}^+ h \prod{}^- h \equiv (-1)^{\sigma_q^+(u)} u^{\frac{q-1}{4}} \prod{}^+ h^2 \equiv (-1)^{\sigma_q^+(u)} (-u)^{\frac{q-1}{4}} \left(\frac{q-1}{2}!\right)^2 \bmod q.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (3.20):

$$(-1)^{\sigma_q^+(u)} = -(-1)^{\sigma_q^-(u)} \equiv (-u)^{\frac{q-1}{4}} \frac{q-1}{2}! \bmod q; \tag{3.21}$$

man bestätigt im übrigen direkt, dass das Quadrat der rechten Seite $\equiv 1 \bmod q$ ist.

(3.21) gibt die erste Reduktion von $\chi_\pm^*(S_{1,u}, q)$; wir schreiben gemäss (3.19)

$$\begin{gathered} \chi_\pm^*(S_{1,u}, q) = (-1)^{\sigma_q^\pm(u)} \xi_q^{\vartheta_\pm(u,\nu,q)} \\ \vartheta_\pm(u, \nu, q) = (1 - u - \nu q) e_q^\pm + u\nu e_q^{(2)\pm} + 2u\eta_u^\pm(q) \end{gathered} \tag{3.22}$$

und erhalten mit den oben angewendeten Schlüssen:

$$2\,u\,\eta_u^{\pm} \equiv u\,e_q^{\pm} - e_q^{\mp} = (u-1)\,e_q^{\pm} \mp h_q' \bmod q, \tag{3.23}$$

wo

$$h_q' = e_q^- - e_q^+ = -\sum_h \left(\frac{h}{q}\right) h$$

gesetzt wurde. Nach (3.15) ergibt sich mit Rücksicht auf $(u, v) = 1$

$$\vartheta_{\pm}(u, v, q) \equiv \mp (q+1) h_q' \bmod 2q,$$

$$\chi_{\pm}^{*}(S_{1,u}, q) = (-1)^{\sigma_q^{\pm}(u)} \left(\frac{2}{q}\right) \xi_q^{\mp h_q'} \tag{3.24}$$

und schliesslich nach (1.21)

$$\chi_{\pm}(S_{1,u}, q) = i^{\frac{q-1}{4}}\, \xi_6^{\frac{q-1}{4}(u+u')} (-1)^{\sigma_q^{\pm}(u)} \xi_q^{\mp h_q'} \tag{3.24 a}$$

Ersetzt man hier u durch einen anderen Nichtrest u_1 mod q, so gewinnt man auf Grund von Satz 10 die Übereinstimmung der entstehenden Formel mit (3.18,19,24), indem man benutzt, dass

$$S_{1,u_1} S_{1,u}^{-1} \subset \Gamma^{0+}[q], \qquad -(u\,u_1)^{\frac{q-1}{4}} \equiv \left(\frac{\sqrt{u_1\,u'}}{q}\right) \bmod q.$$

Im Falle $A = A_3 = T$ findet man nach (1.22,23,25) und (3.6,8) mit $S = T^{-1}$:

$$Q_{\pm}(T\tau, q) = i^{\frac{q-1}{4}}\, e^{\pi i \frac{q-1}{24}\tau} \prod_h{}^{\pm} \{\omega(0, h, q)\, P(\tau, 0, h, q)\}.$$

Hier gilt nach den Ausführungen von (P I), § 11 [vgl. (P I) (11.3,4,5)]:

$$\prod_h{}^{\pm} \omega(0, h, q) = \xi_q^{e_q^{\pm}} \prod_h{}^{\pm} 2 \sin \frac{\pi h}{q} = \xi_q^{e_q^{\pm}}\, q^{\frac{1}{4}}\, \varepsilon_0^{\mp\frac{1}{2}h_0}, \tag{3.25}$$

wo $\varepsilon_0 > 1$ die Grundeinheit, h_0 die Klassenzahl des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathrm{P}(\sqrt{q})$ bezeichnet (P = Körper der rationalen Zahlen). Ferner ist nach (1.24)

$$P_{\pm}^{*}(\tau, q) = \prod_h{}^{\pm} P(\tau, 0, h, q) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j \bmod q}{}^{\pm} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m); \tag{3.26}$$

jede dieser Funktionen $P_{\pm}^{*}(\tau, q)$ gestattet eine Darstellung als reguläre Potenzreihe in der Variablen $e^{2\pi i \tau}$ mit dem konstanten Glied 1 und Koeffizienten, die ganze algebraische Zahlen des Körpers $\mathrm{P}(\sqrt{q})$ sind. Insgesamt gilt also

$$Q_{\pm}(T\tau, q) = i^{\frac{q-1}{4}}\, \xi_q^{e_q^{\pm}}\, q^{\frac{1}{4}}\, \varepsilon_0^{\mp\frac{1}{2}h_0}\, e^{\pi i \frac{q-1}{24}\tau}\, P_{\pm}^{*}(\tau, q). \tag{3.27}$$

Schliesslich ergibt sich *im Falle* $A = A_4$ mit $S = -S_{2,u}$, wenn in ähnlicher Weise wie oben die Formeln (1.21–25) (3.6–8,23,25,26) angewendet werden:

$$Q_\pm (S_{2,u}\,\tau,\,q) = i^{\frac{q-1}{4}}\,\xi_q^{e_q^\pm}\,\xi_6^{-q\frac{q-1}{4}(u+u'+3)}\,(-1)^{\sigma_q^\pm(u')}\,q^{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_0^{\pm\frac{1}{2}h_0}\,e^{\pi i\frac{q-1}{24}\tau}\,P_\mp^*(\tau,\,q). \tag{3.28}$$

Um diese Ergebnisse übersichtlich zu ordnen, führen wir die Funktionen

$$R_\pm(\tau,\,q) = i^{-\frac{q-1}{4}}\,\xi_q^{-e_q^\pm}\,Q_\pm(\tau,\,q) \tag{3.29}$$

ein. Da sie sich von den entsprechenden $Q_\pm(\tau, q)$ nur um konstante Faktoren des Betrages 1 unterscheiden, gilt zunächst für sie anstelle der $Q_\pm(\tau, q)$ der Wortlaut des Satzes 10. Darüber hinaus gilt der folgende

Satz 11. *Es seien u, u', v ganze Zahlen mit $(u/q) = -1$, $uu' = vq + 1$. Die mit den Matrizen*

$$S_{1,u} = \begin{pmatrix} u & vq \\ 1 & u' \end{pmatrix}, \quad S_{2,u} = \begin{pmatrix} q & -u' \\ u & -v \end{pmatrix}$$

zu lesende Tabelle 2 beschreibt eine gruppentheoretische Zerlegung von Typus (1.5) der Modulgruppe in Nebenklassen nach ihrer Untergruppe $\Gamma^{0+}[q]$. Es werde

$$\varepsilon_q^\pm(u) \text{ durch } \varepsilon_q^\pm(u) \equiv \pm(-u)^{\frac{q-1}{4}}\,\frac{q-1}{2}! \bmod q, \quad (\varepsilon_q^\pm(u))^2 = 1,$$

$$\beta_q^\pm \qquad \text{durch } \beta_q^\pm = \sum_h{}^{\pm}\left(\frac{h^2}{q^2} - \frac{h}{q} + \frac{1}{6}\right),$$

$P_\pm(\tau, q)$ durch (3.3), $P_\pm^*(\tau, q)$ durch (3.26), $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(q)$ als Grundeinheit und $h_0 = h_0(q)$ als Klassenzahl des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathrm{P}(\sqrt{q})$ mit der Diskriminante q erklärt. Dann ergeben sich die Entwicklungen der $R_\pm(\tau, q)$ nach den Ortsvariablen der vier Spitzen ζ_j der Tabelle 2 aus den Formeln

$$R_\pm(\tau, q) = e^{\pi i \beta_q^\pm \tau}\,P_\pm(\tau,\,q),$$

$$R_\pm(S_{1,u}\,\tau,\,q) = i^{\frac{q-1}{4}}\,\xi_6^{\frac{q-1}{4}(u+u')}\,\varepsilon_q^\pm(u)\,R_\mp(\tau,\,q),$$

$$R_\pm(T\,\tau, q) = q^{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_0^{\mp\frac{1}{2}h_0}\,e^{\pi i\frac{q-1}{24}\tau}\,P_\pm^*(\tau,\,q),$$

$$R_\pm(S_{2,u}\,\tau, q) = i^{-\frac{q-1}{4}}\,\xi_6^{-q\frac{q-1}{4}(u+u')}\,\varepsilon_q^\mp(u)\,q^{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_0^{\pm\frac{1}{2}h_0}\,e^{\pi i\frac{q-1}{24}\tau}\,P_\mp^*(\tau,\,q). \text{ —}$$

Dass die Summe der Ordnungen jeder dieser Funktionen $R_\pm(\tau, q)$ in den vier Spitzen ζ_j verschwindet, lässt sich direkt nach (3.14) bestätigen.

Aus den letzten Formeln von Satz 11 folgt, dass die $2q+2$ Funktionen

$$R_\pm(\tau + l,\,q) \qquad (l \bmod q) \quad \text{und} \quad u_{48}^{q-1}(\tau)\,P_\pm^*(\tau,\,q)$$

bei Anwendung der Substitutionen der vollen Modulgruppe lediglich konstante Faktoren aufnehmen und überdies permutiert werden.

Zum Schluss dieses Paragraphen geben wir noch ein Verfahren an, das eine *kombinatorische Deutung für die* in Satz 11 und (3.23) auftretenden *Konstanten* $\beta_q^{\pm}$, h_q' liefert (hinsichtlich eines Ergebnisses der im folgenden entwickelten Zusammenhänge vgl. [5]). Zwischen ihnen und der weiteren Konstanten h_q'', die sogleich erklärt wird, bestehen nach (3.2,7,14) die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} h_q' &= e_q^- - e_q^+ = -\sum_h \left(\frac{h}{q}\right) h, \\ h_q'' &= e_q^{(2)-} - e_q^{(2)+} = -\sum_h \left(\frac{h}{q}\right) h^2, \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\beta_q^{\pm} = \sum_h{}^{\pm} g_2 \left(\frac{h}{q}\right) = \frac{1}{q^2} e_q^{(2)\pm} - \frac{1}{q} e_q^{\pm} + \frac{q-1}{24}, \tag{3.31}$$

$$\beta_q^+ + \beta_q^- = -\frac{q-1}{12\,q}, \quad \beta_q^+ - \beta_q^- = -\frac{1}{q^2} h_q'' + \frac{1}{q} h_q'. \tag{3.32}$$

Der wichtigste Schritt des Verfahrens besteht in einer *Umformung der Differenz* $\beta_q^+ - \beta_q^-$, die sich letztlich auf eine bekannte analytische Identität gründet: Es ist dies die Darstellung von

$$\vartheta^5(\tau) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau m^2}\right)^5 = \sum_{m=0}^{\infty} a_5(m)\, e^{\pi i m \tau} \tag{3.33}$$

durch eine Eisensteinsche Reihe von der Dimension $-\frac{5}{2}$ zur ϑ-Gruppe Γ_ϑ (vgl. [4]). — Aus der klassischen Beziehung (vgl. (1.23))

$$g_2(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^2}$$

folgt zunächst (vgl. (1.19), (3.31)):

$$\beta_q^{\pm} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{j \bmod q}{}^{\pm} \xi_q^{2mj}.$$

Benutzt man die Vorzeichen-Bestimmung für die Gaußschen Summen, speziell

$$\sum_{j \bmod \gamma}{}^{\pm} \xi_\gamma^{-j^2\delta} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^* \xi_4^{\gamma-1} \qquad (\gamma \equiv 1,\ \delta \equiv 0 \bmod 2,\ (\gamma, \delta) = 1,\ \sqrt{\gamma} > 0), \tag{3.34}$$

so findet man mit den üblichen Schlüssen

$$\sum_{\bmod q}{}^{\pm} \xi_q^{2mj} = \frac{1}{2}\left(\pm \sqrt{q} \left(\frac{m}{q}\right) - 1\right) \qquad (m \not\equiv 0 \bmod q,\ \sqrt{q} > 0).$$

Daher gilt, wenn

$$L_q(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{q}\right) m^{-s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

gesetzt wird:

$$\beta_q^+ - \beta_q^- = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{q}\, L_q(2). \tag{3.35}$$

Mit einiger Mühe extrahiert man aus [4] die Relation

$$a_5(q) = \begin{Bmatrix} 60 \\ 140 \end{Bmatrix} \frac{1}{\pi^2} q^{\frac{3}{2}} L_q(2) \quad \text{für} \begin{Bmatrix} q \equiv 1 \bmod 8 \\ q \equiv 5 \bmod 8 \end{Bmatrix}, \tag{3.36}$$

wo $a_5(q)$ die gemäss (3.33) zu verstehende Anzahl der Darstellungen von q als Summe von fünf Quadraten bezeichnet. In den Abkürzungen

$$c_q^{(8)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{60} & \text{für } q \equiv 1 \bmod 8 \\ \dfrac{1}{140} & \text{für } q \equiv 5 \bmod 8 \end{pmatrix}, \qquad a_5^*(q) = \frac{1}{4} c_q^{(8)} a_5(q) \tag{3.37}$$

ergibt sich nun

$$q\beta_q^+ - q\beta_q^- = \frac{1}{2\pi^2} L_q(2)\, q^{\frac{3}{2}} = 2 a_5^*(q). \tag{3.38}$$

Im übrigen ist $q\beta_q^+ - q\beta_q^-$ nach (3.16,31,32) ganz und, wie man leicht feststellt, sogar gerade; dies besagt, dass $a_5^*(q)$ ganz, also $a_5(q)$ durch 240 bzw. 560 teilbar ist, je nachdem, ob $q \equiv 1$ oder $q \equiv 5 \bmod 8$.

Wir geben sogleich *drei Anwendungen dieser Zusammenhänge*. Die *erste* betrifft die Vorzeichen und die Grössenordnung der $\beta_q^{\pm}$. Nach (3.32,38) erhält man zunächst

$$q\beta_q^{\pm} = -\frac{q-1}{24} \pm a_5^*(q) = -\frac{q-1}{24} \pm \frac{1}{4\pi^2} L_q(2)\, q^{\frac{3}{2}}. \tag{3.39}$$

Konkrete Ungleichungen, die auch das asymptotische Verhalten der $\beta_q^{\pm}$ für $q \to \infty$ umreissen, lassen sich aus (3.39) mit Hilfe der leicht beweisbaren Abschätzung

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)} < L_q(2) < \frac{\pi^2}{6}$$

gewinnen: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{60} q^{\frac{3}{2}} - \frac{q-1}{24} &< q\beta_q^+ < \frac{1}{24} q^{\frac{3}{2}} - \frac{q-1}{24}, \\ -\frac{1}{24} q^{\frac{3}{2}} - \frac{q-1}{24} &< q\beta_q^- < -\frac{1}{60} q^{\frac{3}{2}} - \frac{q-1}{24}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Wegen $q > 5$ ist $q \geqq 13$ und dann die untere Schranke in der ersten Zeile von (3.40), also der Ausdruck

$$\frac{1}{60} q^{\frac{3}{2}} - \frac{q-1}{24} > \frac{1}{24} + \frac{1}{200} q^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Dies gibt die Vorzeichen der sämtlichen $\beta_q^{\pm}$ gemäss $\beta_q^{-} < 0 < \beta_q^{+}$. Nach (3.39) sind beide Zahlen $q\beta_q^{\pm} + \frac{q-1}{24}$ stets ganz, nach (3.16, 31) sind beide Zahlen $q\beta_q^{\pm} - \frac{q(q-1)}{24}$ sogar stets gerade. Hieraus folgt

$$q\beta_q^{\pm} + \frac{q-1}{24} \equiv \frac{q-1}{4} \bmod 2, \quad \text{also } a_5^*(q) \equiv \frac{q-1}{4} \bmod 2 \tag{3.41}$$

(vgl. (3.39)); es ist daher $a_5(q)$ für $q \equiv 1 \bmod 8$ durch 480, für $q \equiv 5 \bmod 8$ durch 560 teilbar.

Zweitens wollen wir die h_q', h_q'' durch $a_5^*(q)$ ausdrücken. Nach (3.30) ist einerseits

$$-h_q'' + q h_q' = \sum_h \left(\frac{h}{q}\right)\left(\frac{q}{2} - h\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{q}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \bmod 2}}^{q-1} \left(\frac{j}{q}\right) j^2.$$

Andrerseits findet man

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left(\frac{j}{q}\right) j^2 = \sum_h \left(\frac{h}{q}\right) h^2 + \sum_h \left(\frac{h}{q}\right)(q-h)^2 = 2(-h_q'' + q h_q') =$$
$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \bmod 2}}^{q-1} \left(\frac{j}{q}\right) j^2 - 4\left(\frac{2}{q}\right) h_q''.$$

Der Vergleich beider Relationen ergibt

$$2\left(\frac{2}{q}\right)(-h_q'' + q h_q') = \left(2\left(\frac{2}{q}\right) - 1\right) h_q'' + q h_q',$$

also $3h_q'' = q h_q'$ für $q \equiv 1 \bmod 8$, $5h_q'' = 3q h_q'$ für $q \equiv 5 \bmod 8$, oder nach (3.32, 38):

$$\left\{\begin{matrix} h_q' = 3a_5^*(q) \\ h_q'' = q a_5^*(q) \end{matrix}\right\} \text{ für } q \equiv 1 \bmod 8, \qquad \left\{\begin{matrix} h_q' = 5a_5^*(q) \\ h_q'' = 3q a_5^*(q) \end{matrix}\right\} \text{ für } q \equiv 5 \bmod 8. \tag{3.42}$$

Diese Relationen sind in gewissem Sinne als Analoga der Dirichletschen Klassenzahlformel für den imaginär-quadratischen Zahlkörper anzusehen.

Die *dritte Anwendung* betrifft den Quotienten der Funktionen (3.29) $R_{\pm}(\tau, q)$. Man erhält unmittelbar aus Satz 11 und den inzwischen gewonnenen Aussagen den folgenden

SATZ 12. (*Bezeichnungen von Satz* 11 *und* (3.33,37)). *Der Quotient*

$$R(\tau, q) = R_+(\tau, q) R_-^{-1}(\tau, q)$$

stellt eine vollinvariante automorphe Funktion der Gruppe $\Gamma^{0+}[q]$ *dar, die die folgenden Eigenschaften aufweist:*

a. $R(\tau, q)$ *ist in der oberen* τ*-Halbebene regulär und von Null verschieden.*

b. *In zweien der vier Spitzen* ζ_j, *nämlich in* ∞ *und in* u, *hat* $R(\tau, q)$ *von Null verschiedene Ordnungen; diese haben die Werte* $a_5^*(q)$ *bzw.* $-a_5^*(q)$. *In den anderen beiden Spitzen* (0 *und* q/u) *ist* $R(\tau, q)$ *regulär und von Null verschieden.*

c. *Die Entwicklung nach der Ortsuniformisierenden* t_∞ *der Spitze* $\zeta_1 = \infty$ *hat die Gestalt*

$$R(\tau, q) = t_\infty^{a_5^*(q)}\, \mathfrak{P}(t_\infty) \qquad \left(t_\infty = u_q(\tau) = e^{2\pi i \frac{\tau}{q}}\right),$$

wo $\mathfrak{P}(t)$ *eine in* $|t| < 1$ *reguläre und nicht verschwindende Potenzreihe mit dem konstanten Glied* 1 *und lauter ganzrationalen Koeffizienten bezeichnet.*

d. *Für jede Modulmatrix* $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *mit* $\left(\frac{a}{q}\right) = -1$, $b \equiv 0 \bmod q$ *gilt*

$$R(S\tau, q) = -R^{-1}(\tau, q);$$

speziell enthält also

$$R(\tau, q) = -t_u^{-a_5^*(q)}\, \mathfrak{P}^{-1}(t_u) \qquad (t_u = u_q(S_{1,u}^{-1}\tau))$$

die Entwicklung von $R(\tau, q)$ *nach der Ortsvariablen* t_u *der Spitze* $\zeta_2 = u$.

e. *Die Entwicklung von* $R(\tau, q)$ *nach der Ortsvariablen* t_0 *der Spitze* $\zeta_3 = 0$ *hat die Gestalt*

$$R(\tau, q) = \varepsilon_0^{-h_0}\, \mathfrak{P}^*(t_0) \qquad \left(t_0 = u_1\left(\frac{-1}{\tau}\right),\ u_1(\tau) = e^{2\pi i \tau}\right),$$

wo $\mathfrak{P}^*(t)$ *eine in* $|t| < 1$ *reguläre und nicht verschwindende Potenzreihe mit dem konstanten Glied* 1 *und lauter ganzalgebraischen Koeffizienten des Zahlkörpers* $\mathrm{P}(\sqrt{q})$ *bezeichnet.*

f. *Die Entwicklung von* $R(\tau, q)$ *nach der Ortsvariablen* t'_u *der Spitze* $\zeta_4 = q/u$ *hat die Gestalt*

$$R(\tau, q) = -\varepsilon_0^{h_0}\, \mathfrak{P}^{*-1}(t'_u) \qquad (t'_u = u_1(S_{2,u}^{-1}\tau)).$$

§ 4

Das Problem II

Wir stellen jetzt den analytischen Apparat zusammen, in dem sich die *Reihenentwicklungen der unter* II *genannten Partitionenfunktionen* $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$ formulieren lassen. Zunächst geben wir in tabellarischer Form und ohne Beweise auszuführen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass die Zeile $\{m_1, m_2\}$ mit der zweiten Zeile einer Matrix aus $A_j\Gamma^{0+}[q]$ koinzidiert und bestimmen die Menge der in diesen $\{m_1, m_2\}$ tatsächlich auftretenden m_1; dabei läuft j von 1 bis 4 und A_j bezeichnet die in Tabelle 2 genannte Modulmatrix.

TABELLE 3

j	A_j	Notw. u. hinr. Bedingungen für m_1, m_2	Menge der m_1
1	I	$(m_1, m_2) = 1, \ \left(\frac{m_2}{q}\right) = +1$	Alle ganzen Zahlen m_1
2	$-S_{1,u}^{-1}$	$(m_1, m_2) = 1, \ \left(\frac{m_2}{q}\right) = -1$	Alle ganzen Zahlen $m_1 \neq 0$
3	T	$(m_1, m_2) = 1, \ \left(\frac{m_1}{q}\right) = +1, \ m_2 \equiv 0 \bmod q$	Alle ganzen Zahlen m_1 mit $\left(\frac{m_1}{q}\right) = +1$
4	$-S_{2,u}^{-1}$	$(m_1, m_2) = 1, \ \left(\frac{m_1}{q}\right) = -1, \ m_2 \equiv 0 \bmod q$	Alle ganzen Zahlen m_1 mit $\left(\frac{m_1}{q}\right) = -1$

In den folgenden Symbolen verwenden wir die nachstehend mit ihrer Komponentensumme notierten Vektoren:

$$\mathfrak{k} = \{k^+, k^-\}, \qquad \mathfrak{k}' = \{k^-, k^+\}, \qquad k = k^+ + k^-$$

und schreiben

$$\beta_q(\mathfrak{k}) = k^+ \beta_q^+ + k^- \beta_q^-, \qquad \varepsilon_q(u, \mathfrak{k}) = (\varepsilon_q^+(u))^{k^+} (\varepsilon_q^-(u))^{k^-}. \tag{4.1}$$

Nach (3.36–39) ist

$$q \beta_q(\mathfrak{k}) = -k \frac{q-1}{24} + (k^+ - k^-) a_5^*(q) = -k \frac{q-1}{24} + (k^+ - k^-) \frac{1}{4\pi^2} L_q(2) q^{\frac{3}{2}} \tag{4.2}$$

und nach der Erklärung der $\varepsilon_q^{\pm}(u)$ in Satz 11:

$$\varepsilon_q(u, \mathfrak{k}) = (-1)^{k^-} (\varepsilon_q^+(u))^k = (-1)^{k^+} (\varepsilon_q^-(u))^k.$$

In einer weiteren Tabelle definieren wir gewisse Einheitswurzeln $\chi_q(A_j, \mathfrak{k})$ und geben zugleich eine Verteilungsvorschrift für die Vektoren $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ auf die $j = 1, \ldots, 4$:

TABELLE 4

j	1	2	3	4
$\chi_q(A_j, \mathfrak{k})$	1	$i^{-k \frac{q-1}{4}} \xi_6^{-k \frac{q-1}{4}(u+u')} \varepsilon_q(u, \mathfrak{k})$	1	$i^{k \frac{q-1}{4}} \xi_6^{k q \frac{q-1}{4}(u+u')} \varepsilon_q(u, \mathfrak{k}')$
$\mathfrak{k}_j$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{k}'$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{k}'$

Nun sei (vgl. (3.3,29))

$$R(\tau, \mathfrak{k}, q) = R_+^{-k^+}(\tau, q)\, R_-^{-k^-}(\tau, q), \qquad P(\tau, \mathfrak{k}, q) = P_+^{-k^+}(\tau, q)\, P_-^{-k^-}(\tau, q); \tag{4.3}$$

nach Satz 11, (4.1) und II ist also

$$R(\tau, \mathfrak{k}, q) = e^{-\pi i \beta_q(\mathfrak{k}) \tau}\, P(\tau, \mathfrak{k}, q) \subset \{\Gamma^{0+}[q], 0, v_q^{-k}\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k}, q)\, u_q^{n-\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})}. \tag{4.4}$$

In Analogie hierzu werde

$$P^*(\tau, \mathfrak{k}, q) = P_+^{*-k^+}(\tau, q)\, P_-^{*-k^-}(\tau, q) =$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j \bmod q}^{+} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m)^{-k^+} \prod_{j \bmod q}^{-} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m)^{-k^-} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{k}, q)\, u_1^n \tag{4.5}$$

gesetzt. Dann gilt nach Satz 11 und Tabelle 4:

$$\left.\begin{aligned} R(S_{1,u}\tau, \mathfrak{k}, q) &= \chi_q(-S_{1,u}^{-1}, \mathfrak{k}) \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k}', q)\, u_q^{n-\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}')} \\ R(T\tau, \mathfrak{k}, q) &= q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+ - k^-) h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{k}, q)\, u_1^{n-k\frac{q-1}{48}} \\ R(S_{2,u}\tau, \mathfrak{k}, q) &= \chi_q(-S_{2,u}^{-1}, \mathfrak{k})\, q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}(k^+ - k^-) h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{k}', q)\, u_1^{n-k\frac{q-1}{48}} \end{aligned}\right\}. \tag{4.6}$$

Diese Formeln geben zusammen mit (4.4) die Entwicklungen der Funktion $R(\tau, \mathfrak{k}, q)$ nach den Ortsvariablen der vier Spitzen $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$ von $\Gamma^{0+}[q]$ $(j = 1, \ldots, 4)$; wegen

$$\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}) + \frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}') = -k \frac{q-1}{24} < 0 \tag{4.7}$$

sind ζ_1 und ζ_2 nicht zugleich Pole von $R(\tau, \mathfrak{k}, q)$. Man findet nach Satz 2, wenn $n > 0$ und $> \frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})$ ist:

$$\pi_n(\mathfrak{k}, q) = \frac{1}{2n - q\beta_q(\mathfrak{k})} \sum_{j=1}^{4} \mathfrak{S}_n(A_j, \mathfrak{k}, q); \tag{4.8}$$

hier ist für $j = 1,2$:

$$\mathfrak{S}_n(A_j, \mathfrak{k}, q) = \chi_q(A_j, \mathfrak{k}) \sum_{0 \leq m < \frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}_j)} \pi_m(\mathfrak{k}_j, q)\, a_{n-\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})}\left(A_j, \mathfrak{K}, \tfrac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}_j) - m\right) \tag{4.9}$$

und für $j = 3,4$:

$$\mathfrak{S}_n(A_j, \mathfrak{k}, q) =$$
$$= \chi_q(A_j, \mathfrak{k})\, q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\pm\frac{1}{2}(k^+ - k^-) h_0} \sum_{0 \leq m < k\frac{q-1}{48}} \pi_m^*(\mathfrak{k}_j, q)\, a_{n-\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})}\left(A_j, \mathfrak{K}, k\frac{q-1}{48} - m\right). \tag{4.10}$$

$\mathfrak{K}$ steht zur Abkürzung für $\{\Gamma^{0+}[q], -2, v_q^{-k}\}$ (vgl. Satz 10); das obere bzw. untere Vorzeichen trennt die Fälle $j = 3$ bzw. 4. Mindestens eine der Reihen (4.9) ($j = 1,2$) und keine der Reihen (4.10) ($j = 3,4$) verschwindet identisch.

Diese Formeln enthalten in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen von (P I), 7. das *erste Hauptergebnis über die* $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$. Alles Weitere beruht auf genauerer Auswertung der obigen Reihen-Darstellungen. Wir beabsichtigen, aus ihnen *ein endliches Aggregat von explizit bestimmten Gliedern abzuspalten, die für* $n \to \infty$ *stärker anwachsen als die restlichen Glieder* und die demgemäss eine asymptotische Entwicklung der betreffenden Funktion π_n liefern. Im übrigen sollen hier nur einigermassen „glatte" Resultate formuliert werden; wir verzichten insbesondere dann auf die Hervorhebung möglicher Verschärfungen, wenn diese nur auf Grund zusätzlicher Annahmen über die Farbenanzahlen $k^{\pm}$ zu erreichen sind. Für eine solche Möglichkeit geben wir am Schluss dieses Paragraphen einen kurzen Hinweis.

Nach der Formel für die $a_{n+\varkappa}$ in Satz 1 hat man erstens sich zu überlegen, welche Argumente von f_1 in (4.9,10) die grössten Faktoren von $\sqrt{n+\varkappa}$ tragen, zweitens die W_{m_1} für die dabei zugelassenen m_1 zu berechnen. Im vorliegenden Falle ist $n+\varkappa$ durch $n - \frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})$ zu ersetzen. Die gesuchten Argumente von f_1 sind

$$\frac{4\pi}{m_1 q} \sqrt{\left(n - \frac{1}{2} q \, \beta_q(\mathfrak{k})\right)\left(\frac{1}{2} q \, \beta_q(\mathfrak{k}_j) - m\right)} \quad (j = 1, 2);$$

$$\frac{4\pi}{m_1 \sqrt{q}} \sqrt{\left(n - \frac{1}{2} q \, \beta_q(\mathfrak{k})\right)\left(k \frac{q-1}{48} - m\right)} \qquad (j = 3, 4).$$

m durchläuft in jedem Falle die ganzen Zahlen von 0 an so weit, wie der zweite Faktor des Radikanden > 0 ist; da mindestens ein $\beta_q(\mathfrak{k}_j)$ ($j = 1,2$) negativ ausfällt, tritt höchstens einer der für $j = 1,2$ angegebenen Ausdrücke auf. m_1 durchläuft die positiven Zahlen in den Mengen der Tabelle 3.

Ersichtlich handelt es sich um einen Vergleich zwischen den Zahlen

$$\frac{1}{m_1} \sqrt{\frac{1}{2} \beta_q(\mathfrak{k}_j) - \frac{m}{q}} \quad (j = 1 \text{ oder } 2) \quad (4.11\text{ a}); \qquad \frac{1}{m_1} \sqrt{k \frac{q-1}{48} - m} \quad (j = 3 \text{ oder } 4). \quad (4.11\text{ b})$$

Nach (4.2) erkennt man, dass die Maximalwerte von (4.11 b) *beträchtlich grösser* sind als alle Werte (4.11 a). Mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten, die der Berechnung der W_{m_1} entgegenstehen, wollen wir wie folgt verfahren:

Wir vereinigen zu dem angekündigten Aggregat die Glieder, die sich für $j = 3,4$, $m_1 = 1$ bzw. $m_1 = 1,2$ und diejenigen m ergeben, welche einen grösseren Wert (4.11 b) liefern, als er aus (4.11 b) für $m_1 = 2$ bzw. $m_1 = 3$ und $m = 0$ entsteht. Es zeigt sich, dass der so entstehende Wert (4.11 b) „meistens“ auch grösser ist, als alle Werte (4.11 a). In der Tat genügt es, wenn man eine asymptotische Entwicklung erlangen will, die die genannten Glieder mit $m_1 = 1$ und $m_1 = 2$ $(j = 3,4)$ sämtlich enthält, $q \neq 17$ vorauszusetzen; treten dagegen nur die genannten Glieder mit $m_1 = 1$ auf, so bedarf es keiner zusätzlichen Annahme.

Im Einzelnen findet man: Unter der Voraussetzung $j = 3,4$ wird $m_1 = 1$ nur für $j = 3$; $m_1 = 2$ nur für $j = 3$. wenn $q \equiv 1 \bmod 8$ und nur für $j = 4$, wenn $q \equiv 5 \bmod 8$. Besteht das Aggregat nur aus Gliedern mit $m_1 = 1$, so unterliegt m der Bedingung $0 \leqq m < k\frac{q-1}{64}$; nimmt man dagegen die genannten Glieder mit $m_1 = 2$ hinzu, so hat man die Bedingungen

$$0 \leqq m < k\frac{q-1}{54} \quad \text{für } m_1 = 1, \qquad 0 \leqq m < 5k\frac{q-1}{432} = k\frac{q-1}{86{,}4} \quad \text{für } m_1 = 2 \tag{4.12}$$

zu erfüllen. Wir bezeichnen die beiden Aggregat-Typen mit $\mathfrak{A}_1\,(m_1 = 1)$ und $\mathfrak{A}_{12}\,(m_1 = 1{,}2)$; von den folgenden Sätzen beziehen sich Satz 13 auf $\mathfrak{A}_1$, Satz 14 und 15 auf $\mathfrak{A}_{12}$.

Der für $j = 1$ oder 2 gebildete Wert $\frac{1}{2}\beta_q(\mathfrak{k}_j) > 0$ genügt, falls vorhanden, nach (3.39) und (4.2) der Ungleichung

$$0 < \frac{1}{2}\,\beta_q(\mathfrak{k}_j) \leqq -k\,\frac{q-1}{48q} + k\,\frac{a_5^*(q)}{2q} < -k\,\frac{q-1}{48q} + k\,\frac{\sqrt{q}}{48}. \tag{4.13}$$

Die rechte Seite ist für alle $q(\geqq 13)$ kleiner als $\frac{1}{4}k\,\frac{q-1}{48}$, womit der Fall $\mathfrak{A}_1$ erledigt ist. Dagegen ist sie nur für $q \geqq 73$ kleiner als $\frac{1}{9}\,k\,\frac{q-1}{48}$, was eine genauere Diskussion der sieben Primzahlen q mit $q \equiv 1 \bmod 4$, $13 \leqq q \leqq 61$ erforderlich macht. Auf Grund von (3.30,42) errechnet man für die zugehörigen und die drei folgenden $a_5^*(q)$ mit geringem Aufwand die Werte

TABELLE 5

q	13	17	29	37	41	53	61	73	89	97
$a_5^*(q)$	1	2	3	5	8	7	11	22	26	34

Sie zeigen in der Tat, dass die kleinere der oberen Schranken von $\frac{1}{2}\beta_q(\mathfrak{k}_j)$ in (4.13) unterhalb von $\frac{1}{9}\,k\,\frac{q-1}{48}$ liegt, wenn $q \neq 17$. In dem einen Sonderfall $q = 17$ modifizieren sich die Bedingungen (4.12) wie folgt:

$$\begin{aligned} &0 \leqq m < \frac{5k}{17} \quad \left(\text{anstelle von} \quad \frac{8k}{27} = \frac{5k}{17} + \frac{k}{459}\right) \quad \text{für } m_1 = 1 \\ &0 \leqq m < \frac{3k}{17} \quad \left(\text{anstelle von} \quad \frac{5k}{27} = \frac{3k}{17} + \frac{4k}{459}\right) \quad \text{für } m_1 = 2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dies besagt natürlich, dass man, um für $q = 17$ eine asymptotische Entwicklung vom Typus $\mathfrak{A}_{12}$ zu erhalten, bei hinreichend grossem k auf gewisse der weiter oben genannten Glieder verzichten muss.

Es erübrigt, *die* W_{m_1} *für* $j = 3,4$ *und* $m_1 = 1,2$ *zu berechnen.* Unmittelbar ergibt sich

$$v(T)\, W_1\left(n - \frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k}),\ T,\ \mathfrak{K},\ m - k\frac{q-1}{48}\right) = 1. \tag{4.15}$$

Für $m_1 = 2$ hat man die Fälle $q \equiv 1$ bzw. 5 mod 8 zu trennen. In beiden Fällen besteht W_2 aus genau einem Glied; als zugehörige Matrix (vgl. (1.1)) kann für $q \equiv 1$ bzw. $q \equiv 5$ mod 8

$$\begin{pmatrix} j' & * \\ m_1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{q+1}{2} \\ 2 & q \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{q+1}{2} \\ 2 & -q \end{pmatrix} = -S_{2,2}^{-1}$$

gewählt werden; im zweiten Falle wurde zweckmässig $u = 2$ gesetzt. Die damit eindeutig bestimmten Monome W_2 lassen sich durch elementare Rechnung auf eine ziemlich einfache Gestalt bringen, was hier nicht reproduziert werden soll; bei der Umformung von $\exp\left(\pm\frac{\pi i}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})\right)$ erweisen sich die in § 4 abgeleiteten Beziehungen zwischen den h_q', h_q'' und die zweite Kongruenz (3.41) als nützlich.

Das *Ergebnis* besagt: Setzt man $\eta = -\frac{1}{2} q \beta_q(\mathfrak{k})$, $\mu = k\frac{q-1}{48} - m$, so gilt (vgl. (3.41))

$$\begin{aligned} &v(T)\, W_2(n+\eta,\ T,\ \mathfrak{K},\ -\mu) = (-1)^{\frac{1}{2}k\left(a_5^*(q) - \frac{q-1}{4}\right)} \left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)^k (-1)^{m+n}, \\ &\chi_q(A_4, \mathfrak{k})\, v(A_4)\, W_2(n+\eta,\ A_4,\ \mathfrak{K},\ -\mu) = (-1)^{\frac{1}{2}k\left(a_5^*(q) - \frac{q-1}{4}\right)} (\varepsilon_q^+(2))^k (-1)^{m+n}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

je nachdem ob $q \equiv 1$ oder $\equiv 5$ mod 8.

Nach (4.8,9,10,12,14,15,16) bestehen die folgenden Aussagen:

S A T Z 13. *Für alle Primzahlen* $q > 5$ *mit* $q \equiv 1$ mod 4 *gilt, wenn* n *über die natürlichen Zahlen gegen Unendlich strebt:*

$$\pi_n(\mathfrak{k}, q) =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \frac{1}{2n - q\beta_q(\mathfrak{k})} \sum_{0 \leqq m < k\frac{q-1}{64}} \pi_m^*(\mathfrak{k}, q)\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{48} - m\right)\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{2n - q\beta_q(\mathfrak{k})} f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k\frac{q-1}{192}\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right)\right).$$

Satz 14. *Für alle Primzahlen $q > 17$ mit $q \equiv 1 \bmod 8$ gilt, wenn n über die natürlichen Zahlen gegen Unendlich strebt:*

$$\pi_n(\mathfrak{k}, q) =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \frac{1}{2n - q\,\beta_q(\mathfrak{k})} \sum_{0 \leqq m < k\frac{q-1}{54}} \pi_m^*(\mathfrak{k}, q)\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{48} - m\right)\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right) +$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}k\left(a_5^*(q) - \frac{q-1}{4}\right)} \left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)^k q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \frac{(-1)^n}{2n - q\,\beta_q(\mathfrak{k})} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq m' < k\frac{q-1}{86,4}} (-1)^{m'} \pi_{m'}^*(\mathfrak{k}, q)\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{192} - \frac{m'}{4}\right)\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{2n - q\,\beta_q(\mathfrak{k})} f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k\frac{q-1}{432}\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right)\right).$$

Für $q = 17$ gilt eine Formel von genau gleicher Struktur; sie unterscheidet sich von der obigen durch die folgenden drei Modifikationen: In der ersten bzw. zweiten Summe über m bzw. m' ist die Summations-Bedingung durch (*vgl.* (4.14))

$$0 \leqq m < \frac{5k}{17} \quad \textit{bzw.} \quad 0 \leqq m' < \frac{3k}{17}$$

zu ersetzen; im O-Glied ist der erste Faktor unter der Wurzel im Argument von f_1, also $k\frac{q-1}{432} = \frac{k}{27}$, durch $\frac{2k}{51}$ zu ersetzen.

Satz 15. *Für alle Primzahlen $q > 5$ mit $q \equiv 5 \bmod 8$ gilt, wenn n über die natürlichen Zahlen gegen Unendlich strebt:*

$$\pi_n(\mathfrak{k}, q) =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \frac{1}{2n - q\beta_q(\mathfrak{k})} \sum_{0 \leqq m < k\frac{q-1}{54}} \pi_m^*(\mathfrak{k}, q)\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{48} - m\right)\left(n - \frac{1}{2}\, q\,\beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right) +$$

$$+ (-1)^{\frac{1}{2}k\left(a_5^*(q) - \frac{q-1}{4}\right)} (\varepsilon_q^+(2))^k\, q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \frac{(-1)^n}{2n - q\,\beta_q(\mathfrak{k})} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq m' < k\frac{q-1}{86,4}} (-1)^{m'} \pi^*_{m'}(\mathfrak{k}', q)\, f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k\frac{q-1}{192} - \frac{m'}{4}\right)\left(n - \frac{1}{2}\, q\, \beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{2n - q\,\beta_q(\mathfrak{k})} f_1\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k\frac{q-1}{432}\left(n - \frac{1}{2}\, q\, \beta_q(\mathfrak{k})\right)}\right)\right).$$

An den Formeln der Sätze 13, 14, 15 ist folgendes hervorzuheben: Die ersten Ausdrücke auf den rechten Seiten (also das, was jeweils dem ersten $+$-Zeichen vorangeht) unterscheiden sich nur hinsichtlich des Nenners in der Summationsbedingung für m. Dieser ist $= 64$ in Satz 13 und $= 54$ in Satz 14, 15. Der entsprechende Nenner in der Summationsbedingung für m' (Satz 14, 15) hat den Wert $86{,}4 = \frac{1}{5} 432$. Das asymptotisch grösste Glied ergibt sich nach Satz 13 aus der Summe über m für $m = 0$; dabei ist $\pi^*_0(\mathfrak{k}, q) = 1$.

Die Möglichkeit, dass zwischen den beiden Summen in den Formeln von Satz 14 oder Satz 15 Interferenz stattfindet, d.h. dass die Summen Glieder gleich starken Anwachsens für $n \to \infty$ enthalten, lässt sich ebensowenig ausschliessen wie in der analogen Formel des Satzes 9. Diese Interferenz ändert jedoch am Charakter der asymptotischen Entwicklung nichts, weil zwei solche Glieder die gleiche Bauart haben und daher zu einem Glied dieser selben Bauart vereinigt werden können. Eine Interferenz kann nur eintreten, wenn $k(q-1)$ durch 16 teilbar ist und betrifft dann die Gliederpaare, die zu Wertepaaren m, m' mit $4m - m' = \frac{1}{16} k(q-1)$ gehören.

Es kann auch durchaus vorkommen, dass *beide* Summen (4.9) ($j = 1,2$) leer sind, also identisch verschwinden. Hierfür (d.h. für $\beta_q(\mathfrak{k}) \leq 0$ und zugleich $\beta_q(\mathfrak{k}') \leq 0$) ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung, wenn der uninteressante Fall $k^+ = k^-$ ausgeschlossen wird:

$$\frac{k^+ + k^-}{|k^+ - k^-|} \geq \frac{24}{q-1} a^*_5(q) = \frac{6}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1} L_q(2)\sqrt{q}. \tag{4.17}$$

Eine übersichtliche, hinreichende Bedingung für das Zusammentreffen von $\beta_q(\mathfrak{k}) < 0$ und $\beta_q(\mathfrak{k}') < 0$ besagt

$$\frac{k^+ + k^-}{|k^+ - k^-|} \geq \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Die untere Schranke in (4.17) hat für die q der Tabelle 5 die niedrigen Werte

$$2,\quad 3,\quad \frac{18}{7},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{24}{5},\quad \frac{42}{13},\quad \frac{22}{5},\quad \frac{22}{3},\quad \frac{78}{11},\quad \frac{17}{2}.$$

7 – 563801. *Acta Mathematica.* 95. Imprimé le 6 mars 1956.

Für $q=17$ und $\dfrac{k^+ + k^-}{|k^+ - k^-|} \geq 3$ gilt also Satz 14 in der ursprünglichen (nicht modifizierten) Gestalt.

Wir behandeln schliesslich noch die Aufgabe, *das Produkt* (4.5) $P^*(\tau, \mathfrak{k}, q)$ *in eine Reihe nach Potenzen von* u_1 *zu entwickeln.* Die Koeffizienten dieser Reihe sind ganze Zahlen im reell-quadratischen Zahlkörper $\mathrm{P}(\sqrt{q})$, und es soll nun noch eine kombinatorische Darstellung der Koeffizienten gegeben werden, die die genannte Eigenschaft in Evidenz setzt.

Man lasse den Restklassen j mod q die Exponenten k_j gemäss

$$k_j = k^+ \quad \text{für} \left(\frac{j}{q}\right) = +1, \qquad k_j = k^- \quad \text{für} \left(\frac{j}{q}\right) = -1, \qquad k_j = 0 \quad \text{für } j \equiv 0\,(q)$$

entsprechen und schreibe demgemäss

$$P^*(\tau, \mathfrak{k}, q) = \prod_{j \bmod q} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m)^{-k_j}.$$

Es bezeichne $\mathfrak{P}_n(f)$ die Menge, $p_n(f)$ die Anzahl aller Partitionen der natürlichen Zahl n in beliebige natürliche Summanden, die in genau f Farben und in allen diesen ohne Häufigkeits-Beschränkung auftreten. Ferner bezeichne $\mu(\mathfrak{p})$ für jedes $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{P}_n(f)$ die Anzahl aller Summanden der Partition $\mathfrak{p}$. Dann wird zunächst

$$P^*(\tau, \mathfrak{k}, q) = \prod_{j \bmod q} \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}_{n_j}(k_j)} \xi_q^{2j\mu(\mathfrak{p})} \right) u_1^{n_j};$$

im Falle $k_j = 0$ ist die innere Summe für $n_j > 0$ gleich 0, für $n_j = 0$ gleich 1 zu setzen.

Nun seien der Restklasse j mod q genau k_j Farben zugeordnet; man denke sich die sämtlichen $f = \sum_{j \bmod q} k_j = k\dfrac{q-1}{2}$ Farben verschieden gewählt, betrachte die Menge $\mathfrak{P}_n(f)$ der Partitionen von n in diesen f Farben und bezeichne mit $\mu_j(\mathfrak{p})$ die Anzahl derjenigen Summanden der Partition $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}_n(f)$, welche die der Restklasse j zugeordneten Farben tragen. Dann findet man

$$P^*(\tau, \mathfrak{k}, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}_n(f)} \xi_q^{\sum\limits_{j \bmod q} 2j\mu_j(\mathfrak{p})} \right) u_1^n.$$

Da der Koeffizient $\pi_n^*(\mathfrak{k}, q)$ bei Anwendung der Substitutionen $\xi_q^2 \to \xi_q^{2g^2}$ $((g, q) = 1)$ invariant ist, ergibt sich durch eine Spurbildung nach (3.34)

$$(q-1)\, \pi_n^*(\mathfrak{k}, q) = \sqrt{q} \sum_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}_n(f)} \left(\frac{\sum\limits_{j \bmod q} j\, \mu_j(\mathfrak{p})}{q} \right)^{(0)} - p_n(f), \tag{4.18}$$

wo $(a/q)^{(0)} = (a/q)$ für $(a, q) = 1$, $(a/q)^{(0)} = \sqrt{q} > 0$ für $a \equiv 0 \mod q$ geschrieben wurde. Die Summe auf der rechten Seite von (4.18) hat offenbar einen Wert $r_n + s_n\sqrt{q}$ mit ganzen rationalen $r_n = r_n(\mathfrak{k}, q)$, $s_n = s_n(\mathfrak{k}, q)$, es ist sowohl $r_n(\mathfrak{k}, q)$ als auch $s_n(\mathfrak{k}, q) - p_n(\mathfrak{f})$ durch $(q-1)/2$ teilbar, und es gilt $r_n \equiv s_n - p_n \mod (q-1)$.

§ 5

Das Problem III. Asymptotische Relationen und Entwicklungen

Zur Aufstellung der *Reihenentwicklungen für die* einleitend unter III genannten *Partitionenanzahlen* ϱ_n bedarf es nur noch der Angabe eines geeigneten Formalismus. Wir bedienen uns der in § 4 mitgeteilten Terminologie und bilden zusätzlich die folgenden analogen Symbole:

$$\mathfrak{l} = \{k^0, k^+, k^-\}, \qquad \mathfrak{l}' = \{k^0, k^-, k^+\}; \tag{5.1}$$

$$\gamma_q(\mathfrak{l}) = \frac{1}{12} k^0 + \beta_q(\mathfrak{k}); \tag{5.2}$$

$$S(\tau, \mathfrak{l}, q) = \eta^{-k^0}(\tau)\, R(\tau, \mathfrak{k}, q) \subset \{\Gamma^{0+}[q],\ \tfrac{1}{2}k^0,\ \lambda^{-k^0} v_q^{-k}\}. \tag{5.3}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nach Satz 5, (3.3) und (4.3) mit

$$e^{-\pi i \gamma_q(\mathfrak{l})\tau} \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv 0 \bmod q}}^{\infty} (1 - u_q^m)^{-k^0} \right) P(\tau, \mathfrak{k}, q)$$

übereinstimmt, ist

$$S(\tau, \mathfrak{l}, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n(\mathfrak{l}, q)\, u_q^{n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l})}. \tag{5.4}$$

Ferner definieren wir die (ganz-algebraischen in $\mathrm{P}(\sqrt{q})$ enthaltenen) $\varrho_n^*(\mathfrak{l}, q)$ durch

$$\left(\prod_{m=1}^{\infty} (1 - u_1^m)^{-k^0} \right) P^*(\tau,\ \mathfrak{k},\ q) = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^*(\mathfrak{l}, q)\, u_1^n$$

und die Einheitswurzeln $\psi_q(A_j, \mathfrak{l})$ für $j = 1, 2, 3, 4$ durch

$$\psi_q(A, \mathfrak{l}) = \lambda^{k^0}(A)\, \chi_q(A, \mathfrak{k}) \qquad (A = A_j,\ 1 \leqq j \leqq 4).$$

Nach (4.6) ergeben sich als Entwicklungen von $S(\tau, \mathfrak{l}, q)$ nach den Ortsvariablen der Spitzen $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$:

$$S(\tau, \mathfrak{l}, q) = \psi_q(-S_{1,u}^{-1}, \mathfrak{l})\, (\tau - u)^{\frac{1}{2}k^0} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n(\mathfrak{l}', q)\, u_q^{n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l}')}(S_{1,u}^{-1}\tau),$$

$$S(\tau, \mathfrak{l}, q) = \xi_4^{-k^0} q^{-\frac{1}{4}k} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+ - k^-)h_0} \tau^{\frac{1}{2}k^0} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^*(\mathfrak{l}, q)\, u_1^{n - \frac{1}{24}k^0 - \frac{1}{48}k(q-1)} \left(\frac{-1}{\tau} \right),$$

$$S(\tau, \mathfrak{l}, q) = \psi_q(-S_{2,u}^{-1}, \mathfrak{l})\, q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{-\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} (u\tau - q)^{\frac{1}{2}k^0} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^*(\mathfrak{l}', q)\, u_1^{n-\frac{1}{24}k^0-\frac{1}{48}k(q-1)}(S_{2,u}^{-1}\tau).$$

Neben den hier bereits eingesetzten Werten $\lambda(I) = 1$, $\lambda(T) = \xi_4^{-1}$ berechnet man nach (1.21)

$$\lambda(-S_{1,u}^{-1}) = \xi_4^{-1}\, \xi_{12}^{-u-u'},\quad \lambda(-S_{2,u}^{-1}) = i(-1)^{\frac{q-1}{4}+\frac{\operatorname{sgn} u-1}{2}}\, \xi_{12}^{q(u+u')}.$$

Nunmehr folgt aus Satz 4

$$\varrho_n(\mathfrak{l}, q) = \sum_{j=1}^{4} \mathfrak{T}_n(A_j, \mathfrak{l}, q), \quad \left(n > 0 \text{ und } > \frac{1}{2} q\gamma_q(\mathfrak{l})\right); \tag{5.5}$$

verteilt man die $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ auf die Indices $j = 1, \ldots, 4$ ebenso wie die $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$ gemäss Tabelle 4, so ist hier für $j = 1, 2$

$$\mathfrak{T}_n(A_j, \mathfrak{l}, q) = \psi_q(A_j, \mathfrak{l}) \sum_{0 \leq m < \frac{1}{2} q\gamma_q(\mathfrak{l}_j)} \varrho_m(\mathfrak{l}_j, q)\, \overline{\mathfrak{R}}_{n-\frac{1}{2}q\gamma_q(\mathfrak{l})}(A_j, \mathfrak{K}, \tfrac{1}{2} q\gamma_q(\mathfrak{l}_j) - m), \tag{5.6}$$

hingegen für $j = 3, 4$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_n(A_j, \mathfrak{l}, q) = \psi_q(A_j, \mathfrak{l})\, q^{-\frac{1}{4}k}\, \varepsilon_0^{\pm\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \times \\ \times \sum_{0 \leq m < \frac{1}{24}k^0 + \frac{1}{48}k(q-1)} \varrho_m^*(\mathfrak{l}_j, q)\, \overline{\mathfrak{R}}_{n-\frac{1}{2}q\gamma_q(\mathfrak{l})}\left(A_j, \mathfrak{K}, \frac{1}{24}k^0 + \frac{1}{48}k(q-1) - m\right).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Dabei hat man unter $\mathfrak{K}$ die Komplementärklasse der Formenklasse in (5.3) zu verstehen:

$$\mathfrak{K} = \{\Gamma^{0+}[q],\ -2 - \tfrac{1}{2}k^0,\ \lambda^{k^0} v_q^k\};$$

das Vorzeichen im Exponenten von ε_0 kann durch $(-1)^{j-1}$ beschrieben werden.

Aus den Formeln (5.5, 6, 7) leiten wir zunächst eine *asymptotische Entwicklung für* $\varrho_n(\mathfrak{l}, q)$ dadurch ab, dass wir die in ihrem Anwachsen mit n überwiegenden Glieder einfachster Bauart abspalten. Wir beschränken uns hier im Gegensatz zu § 4 auf diejenigen Glieder, welche in (5.7) mit $m_1 = 1$ auftreten. Mit dem Verfahren von § 4 ergibt sich

SATZ 16. *In der Bezeichnung*

$$m^0(\mathfrak{l}, q) = \min\left(\frac{k^0}{32} + \frac{k}{64}(q-1),\ \frac{k}{48}\left(q - \sqrt{q} - \frac{1}{q}\right)\right)$$

$$m_0(\mathfrak{l}, q) = \max\left(\frac{1}{4}\left(\frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1)\right),\ \frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}\left(\sqrt{q} - 1 + \frac{1}{q}\right)\right)$$

gilt für $n \to \infty$

$$\varrho_n(\mathfrak{l}, q) = (2\pi)^{2+\frac{1}{2}k^0} q^{-1-\frac{1}{4}k} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} \sum_{0 \leq m < m^0(\mathfrak{l}, q)} \varrho_m^*(\mathfrak{l}, q) \left(\frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1) - m\right)^{1+\frac{1}{2}k^0} \times$$

$$\times f_{1+\frac{1}{2}k^0}^*\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(\frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1) - m\right)\left(n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l})\right)}\right) +$$

$$+ O\left(f_{1+\frac{1}{2}k^0}^*\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{m_0(\mathfrak{l}, q)\left(n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l})\right)}\right)\right).$$

Dabei ist $f_{r-1}^*(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1-r} I_{r-1}(z)$. *Mit Benutzung der Funktion*

$$f_{r-1}(z) = z I_{r-1}(z) \sim \sqrt{\frac{z}{2\pi}}\, e^z \qquad (z > 0,\ z \to \infty)$$

schreibt sich dieselbe Formel in der Gestalt

$$\varrho_n(\mathfrak{l}, q) = \tfrac{1}{2} q^{\frac{1}{4}(k^0-k)} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+-k^-)h_0} (n - \tfrac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l}))^{-1-\frac{1}{4}k^0} \times$$

$$\times \sum_{0 \leq m < m^0(\mathfrak{l}, q)} \varrho_m^*(\mathfrak{l}, q) \left(\frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1) - m\right)^{\frac{1}{4}k^0} \times$$

$$\times f_{1+\frac{1}{2}k^0}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(\frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1) - m\right)\left(n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l})\right)}\right) +$$

$$+ O\left((n - \tfrac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l}))^{-1-\frac{1}{4}k^0} f_{1+\frac{1}{2}k^0}\left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{m_0(\mathfrak{l}, q)\left(n - \frac{1}{2} q \gamma_q(\mathfrak{l})\right)}\right)\right). \ -$$

Da stets $m_0(\mathfrak{l}, q) < \frac{k^0}{24} + \frac{k}{48}(q-1)$, liefern beide Formeln das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung von $\varrho_n(\mathfrak{l}, q)$ für $m = 0$ mit dem Werte $\varrho_0^*(\mathfrak{l}, q) = 1$. Satz 16 gilt auch für $k_0 = 0$ und ist dann *mit Satz* 13 *identisch.*

Die *asymptotischen Relationen* zwischen Partitionenanzahlen, die wir zunächst aufstellen wollen, ergeben sich aus der allgemeinen Relation (0.2) durch Spezialisierung und eine darauf folgende Konstanten-Bestimmung. Wir betrachten das allgemeinste Problem von dem in (P I) behandelten Typus, welches sich durch eine Klassen-Einteilung in quadratische Reste und Nichtreste nach einem Primzahlmodul q erklären lässt ($q \equiv 1$ mod 4, $q > 5$):

Gegeben seien für jedes der beiden Vorzeichen, die als obere Indices erscheinen, ganze Zahlen

$$k_0^\pm \geq 0, \quad f^\pm \geq 0; \quad k_\nu^\pm \geq 1, \quad l_\nu^\pm \geq 2 \qquad (1 \leq \nu \leq f^\pm).$$

mit der Eigenschaft $k_0^+ + k_0^- + f^+ + f^- > 0$; die Doppelvorzeichen sind hier und weiterhin disjunktiv zu verwenden. Man denke sich die natürlichen Zahlen m mit $(m/q) = \pm 1$ in $\sum_{0 \leqq \nu \leqq f^\pm} k_\nu^\pm$ monochromatischen Farben realisiert; $\pi_n([k], [l], q)$ bezeichne die in der folgenden Art zu bestimmende Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden m: Alle Summanden erscheinen in den genannten Farben und zwar darf m mit $(m/q) = \pm 1$ in den ersten $k_0^\pm$ Farben beliebig oft, in den darauf folgenden $k_1^\pm$ Farben höchstens $(l_1^\pm - 1)$-mal, in den auf diese folgenden $k_2^\pm$ Farben höchstens $(l_2^\pm - 1)$-mal usw. erscheinen; der untere Index wächst bis $f^\pm$. Das Verschwinden von $f^\pm$ bzw. $k_0^\pm$ bedeutet, dass die m mit $(m/q) = \pm 1$, wenn überhaupt, so ohne Häufigkeits-Beschränkung bzw. nur mit den genannten Häufigkeitsschranken auftreten; $f^\pm + k_0^\pm = 0$ bedeutet, dass nur Summanden m mit $(m/q) = \mp 1$ auftreten. Zwei Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder solche Summand in beiden in jeder der für ihn vorgesehenen Farben gleich oft auftritt.

Mit diesem Partitionenproblem sind die folgenden Konstanten verknüpft:

$$\bar{K} = \frac{q-1}{4}\left\{k_0^+ + k_0^- + \sum_{1 \leqq \nu \leqq f^+} k_\nu^+ \left(1 - \frac{1}{l_\nu^+}\right) + \sum_{1 \leqq \nu \leqq f^-} k_\nu^- \left(1 - \frac{1}{l_\nu^-}\right)\right\} > 0,$$

$$k_0 = k_0^+ + k_0^-, \qquad \omega_0 = q^{-\frac{1}{4} k_0}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k_0^+ - k_0^-) h_0} > 0, \qquad \varrho_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{K}}{3q}} > 0,$$

$$\gamma^\pm = -k_0^\pm + \sum_{1 \leqq \nu \leqq f^\pm} k_\nu^\pm (l_\nu^\pm - 1), \qquad \gamma = \gamma^+ + \gamma^-,$$

$$\eta = \frac{q}{2}\beta = \gamma^+ \frac{q}{2}\beta_q^+ + \gamma^- \frac{q}{2}\beta_q^-.$$

Wir denken uns neben dem genannten ein zweites Problem der gleichen Art gegeben, dessen Parameter und Konstanten wir durch einen Akzent von denen des ersten Problems unterscheiden. In diesem Sinne setzen wir

$$q' = q, \quad \bar{K}' = \bar{K} \quad (\text{also } \varrho_1' = \varrho_1)$$

voraus. Dann gilt nach (0.2)

$$\frac{\pi_n([k], [l], q)}{\pi_n([k'], [l'], q)} = \frac{\omega_0}{\omega_0'}\left(1 + \frac{\varrho_1(\eta - \eta')}{2\sqrt{n}} + O(n^{-1})\right) \qquad (n \to \infty), \tag{5.8}$$

und hier ist

$$\frac{\omega_0}{\omega_0'} = q^{\frac{1}{4}(k_0' - k_0)}\, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k_0^+ - k_0'^+ - k_0^- + k_0'^-) h_0}, \tag{5.9}$$

$$\eta - \eta' = (\gamma' - \gamma)\frac{q-1}{48} + \frac{1}{2}(\gamma^+ - \gamma'^+ - \gamma^- + \gamma'^-)\, a_5^*(q). \tag{5.10}$$

Der Quotient ω_0/ω_0' enthält mithin genau dann die Klassenzahl h_0 von $P(\sqrt{q})$ nicht, wenn $k_0^+ - k_0^- = k_0'^+ - k_0'^-$. Analog dazu enthält die Differenz $\eta - \eta'$ genau dann die Darstellungsanzahl $a_5(q)$ nicht, wenn $\gamma^+ - \gamma^- = \gamma'^+ - \gamma'^-$.

Wir *spezialisieren* dieses Ergebnis, indem wir — neben $q' = q$ — voraussetzen, dass das zweite Partitionenproblem zu dem ersten „konjugiert" sei, was

$$k_0'^\pm = k_0^\mp, \quad f'^\pm = f^\mp, \quad k_\nu'^\pm = k_\nu^\mp, \quad l_\nu'^\pm = l_\nu^\mp \qquad (1 \leqq \nu \leqq f^\mp)$$

bedeute. Dann ist $\overline{K}' = \overline{K}$, und aus (5.9,10) ergibt sich

$$\frac{\omega_0}{\omega_0'} = \varepsilon_0^{(k_0^+ - k_0^-)h_0}, \qquad \eta - \eta' = (\gamma^+ - \gamma^-)\, a_5^*(q). \tag{5.11}$$

Insbesondere findet man anstelle von (0.1,3) genauer

$$\frac{\pi_n^+(q)}{\pi_n^-(q)} = \varepsilon_0^{h_0}\left\{1 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3\left(1-\frac{1}{q}\right)}\,\frac{a_5^*(q)}{\sqrt{n}} + O(n^{-1})\right\} \qquad (n \to \infty), \tag{5.12}$$

$$\frac{\pi_n^+(l,q)}{\pi_n^-(l,q)} = 1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right)}\,(l-1)\,\frac{a_5^*(q)}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}) \qquad (n \to \infty). \tag{5.13}$$

Asymptotische Relationen *etwas anderer Beschaffenheit* lassen sich zwischen Partitionenanzahlen vom Typus III und gewissen ihrer *Modifikationen* aus Satz 16 ableiten. Nach der ersten Formel dieses Satzes gilt, wenn

$$\lambda = \frac{k^0}{24\,q} + \frac{k}{48}\left(1-\frac{1}{q}\right), \qquad \omega_1 = q^{\frac{1}{2}k^0 - \frac{1}{4}k}\,\varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+ - k^-)h_0}, \qquad \eta = -\frac{q}{2}\gamma_q(\mathfrak{l}),$$

$$g_{r-1}^*(x) = f_{r-1}^*(4\pi\sqrt{\lambda x}) \quad (\sqrt{\lambda x} > 0), \qquad r = 2 + \tfrac{1}{2}k^0$$

gesetzt wird:

$$\varrho_n(\mathfrak{l}, q) = 2\pi\,\omega_1\,(2\pi\lambda)^{r-1}\,g_{r-1}^*(n+\eta) + O\left(f_{r-1}^*\left(4\pi\sqrt{\lambda^*(n+\eta)}\right)\right); \tag{5.14}$$

hier bezeichnet λ^* eine von n unabhängige positive Zahl $< \lambda$. Diese asymptotische Darstellung besteht auch im Falle $k^0 = 0$, wofern man dann $\varrho_n(\mathfrak{l}, q) = \pi_n(\mathfrak{k}, q)$ für $\mathfrak{l} = \{0, k^+, k^-\}$, $\mathfrak{k} = \{k^+, k^-\}$ definiert. Das hat zur Folge, dass sich die Partitionenanzahlen $\pi_n(\mathfrak{k}, q)$ des Typus II den folgenden Betrachtungen unterordnen. Von den Eigenschaften der Funktionen $g_{r-1}^*(x)$ benötigen wir die folgenden:

$$\begin{gathered} g_{r-1}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)^{-r}(\lambda x)^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}}\,e^{4\pi\sqrt{\lambda x}}\left(1 + O(x^{-\frac{1}{2}})\right) \qquad (x > 0,\ x \to \infty), \\ \frac{d}{dx}\,g_{r-1}^*(x) = 4\pi^2\lambda\,g_r^*(x); \end{gathered} \tag{5.15}$$

beide bestehen für beliebige reelle r.

Es seien s paarweise verschiedene natürliche Zahlen α_j und s natürliche Zahlen μ_j derart gegeben, dass

$$1 \leqq \mu_j \leqq k^0 \text{ bzw. } \leqq k^+ \text{ bzw. } \leqq k^-, \text{ wenn } \left(\frac{\alpha_j}{q}\right) = 0 \text{ bzw. } = +1 \text{ bzw. } = -1 \tag{5.16}$$

zutrifft. Man gehe von dem durch q, k^0, k^+, k^- definierten Problem II oder III aus und modifiziere es, indem man für jedes α_j das Erscheinen in μ_j bestimmten der ursprünglich zugelassenen Farben verbietet. Gesucht ist demnach die Anzahl derjenigen Partitionen der natürlichen Zahl n, in welchen die Summanden $m \neq \alpha_j$ gemäss II, III wie bisher, die α_j dagegen nur in — entsprechend (5.16) — genau $k^0 - \mu_j$, bzw. $k^+ - \mu_j$, bzw. $k^- - \mu_j$ vorgegebenen Farben erscheinen; verschwindet die betreffende Differenz, so bedeutet dies, dass α_j überhaupt nicht auftritt.

Nach (P I), 12. gewinnt man die modifizierte Partitionenanzahl aus der ungeänderten durch *iterierte Differenzenbildung* (eine Art arithmetischer Differentiation): In der Bezeichnung

$$\Delta_\alpha c_n = c_n - c_{n-\alpha}$$

schreibt sich die modifizierte Partitionenfunktion als

$$\left(\prod_{j=1}^{s} \Delta_{\alpha_j}^{\mu_j}\right) \varrho_n(\mathfrak{l}, q),$$

und man findet für sie nach (5.14,15) auf Grund des Verfahrens von (P I), 12. die asymptotische Darstellung

$$\left(\prod_{j=1}^{s} \Delta_{\alpha_j}^{\mu_j}\right) \varrho_n(l, q) = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \prod_{j=1}^{s} (2\pi\sqrt{\lambda}\,\alpha_j)^{\mu_j} \lambda^{-\frac{3}{4}+\frac{r}{2}} n^{\frac{1}{4}-\frac{r+m}{2}} e^{4\pi\sqrt{\lambda n}} (1 + O(n^{-\frac{1}{2}})), \tag{5.17}$$

in der m die „Differentiationsordnung" $\sum_{j=1}^{s} \mu_j$ angibt; (5.17) gilt bei sinngemässer Interpretation auch für $s = 0$.

Es sei nun neben $\varrho_n(\mathfrak{l}, q)$ $(k^0 \geqq 0)$ eine zweite Anzahlfunktion der gleichen Art, also des Typus II oder III vorgelegt, deren Parameter und Konstanten wir von denen der ersten durch einen Akzent unterscheiden; wir setzen zunächst nur $q' = q$, $\lambda' = \lambda$ voraus. Es seien ferner die natürlichen Zahlen α'_j, μ'_j $(1 \leqq j \leqq s')$ bezüglich der Parameter $\mathfrak{l}'$, q durch die bei (5.16) mitgeteilte Vorschrift bestimmt. Wir schreiben $m' = \sum_{j=1}^{s'} \mu'_j$ und lassen ausdrücklich zu, dass irgendwelche der vier Parameter k^0, k'^0, s, s' verschwinden. Dann gilt der folgende

Satz 17. *Unter den Voraussetzungen*

$$\lambda' = \lambda, \quad k'^0 \equiv k^0 \mod 2, \quad k'^0 + 2m' = k^0 + 2m$$

besteht die asymptotische Relation

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^{s} \Delta_{\alpha_j}^{\mu_j}\right) \varrho_n(\mathfrak{l}, q)}{\left(\prod_{j=1}^{s'} \Delta_{\alpha'_j}^{\mu'_j}\right) \varrho_n(\mathfrak{l}', q)} = \frac{\omega_1}{\omega'_1} (2\pi)^{\frac{1}{2}(k'^0 - k^0)} \frac{\prod_{j=1}^{s} \alpha_j^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^{s'} \alpha_j'^{\mu'_j}} (1 + O(n^{-\frac{1}{2}})) \tag{5.18}$$

mit

$$\frac{\omega_1}{\omega'_1} = q^{\frac{q}{q-1}\frac{1}{2}(k^0 - k'^0)} \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(k^+ - k'^+ - k^- + k'^-) h_0}.$$

Der Proportionalitätsfaktor auf der rechten Seite von (5.18) *ist genau dann algebraisch, wenn* $k'^0 = k^0$ *zutrifft; er ist genau dann rational, wenn* $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}$ *zutrifft.*

Zum Schluss dieser ganzen Untersuchung betrachten wir die in den Sätzen 3 und 4 angegebene Darstellung für die Fourier-Koeffizienten $b_{n+\varkappa'}(I, F)$ einer in $\mathfrak{H}$ regulären Modulform F einer Klasse $\{\Gamma_0, r-2, v^{-1}\}$ ($r > 2$ reell; Bezeichnungen vgl. § 1). Wir wollen diese Darstellung zunächst nach abnehmenden Werten eines diskreten Parameters in eine (einzige) unendliche Reihe ordnen und sodann unter gewissen Voraussetzungen die Frage diskutieren, *wieviele Glieder dieser Reihe eine im eigentlichen Sinne asymptotische Entwicklung von* $b_{n+\varkappa'}(I, F)$ *für* $n \to \infty$ *liefern.* Bei dieser Diskussion werden wir uns der in (P I), 7. entwickelten Hilfsmittel bedienen.

Führt man in den $\mathfrak{N}_\varrho(A, \mathfrak{K}, \mu)$ die Funktion $f_{r-1}(z) = z I_{r-1}(z)$ anstelle von (1.12) $f^*_{r-1}(z)$ ein, so erhält man nach Satz 4 für $n + \varkappa' > 0$

$$\begin{aligned} b_{n+\varkappa'}(I, F) = &-\frac{i^r N^{\frac{r}{2}-1}}{2(n+\varkappa')^{\frac{r}{2}}} \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{0 < h+\varkappa_j \leqq n_{0j}+\varkappa_j} \left(\frac{h+\varkappa_j}{N_j}\right)^{\frac{r}{2}-1} b_{-h-\varkappa_j}(A_j, F) \times \\ &\times \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{T}(A_j, \Gamma_0) \\ m_1 > 0}} \bar{v}(A_j) \overline{W}_{m_1}(-(n+\varkappa'), A_j, \mathfrak{K}, h+\varkappa_j) f_{r-1}\left(\frac{4\pi}{m_1}\sqrt{\frac{(n+\varkappa')(h+\varkappa_j)}{N N_j}}\right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Im folgenden werde bezeichnet
mit $\alpha_{n+\varkappa'}(A_j, \mathfrak{K}, h+\varkappa_j)$ die Summe über m_1 in der zweiten Zeile von (5.19);
mit $\mathfrak{g}$ die Menge der $j = 1, 2, \ldots, \sigma_0$, zu deren jedem ein h existiert, das

$$0 < h + \varkappa_j \leqq n_{0j} + \varkappa_j, \quad b_{-h-\varkappa_j}(A_j, F) \neq 0$$

erfüllt (h kann von j abhängen);
mit $\mathfrak{h}_g$ für jedes $g \subset \mathfrak{g}$ die Menge derjenigen h, welche

$$0 < h + \varkappa_g \leqq n_{0g} + \varkappa_g, \quad b_{-h-\varkappa_g}(A_g, F) \neq 0$$

erfüllen. — Ausserdem sei, wenn $g \subset \mathfrak{g}$, $h \subset \mathfrak{h}_g$:

$$\xi_{g,h} = \left(\frac{h+\varkappa_g}{N_g}\right)^{\frac{r}{2}-1} b_{-h-\varkappa_g}(A_g, F), \quad c_{g,h} = 4\pi \sqrt{\frac{h+\varkappa_g}{N_g N}}. \tag{5.20}$$

In diesen Bezeichnungen gilt nach (5.19) für $n+\varkappa'>0$

$$b_{n+\varkappa'}(I,F)=-\frac{i^r N^{\frac{r}{2}-1}}{2(n+\varkappa')^{\frac{r}{2}}}\sum_{g\subset\mathfrak{g}}\sum_{h\subset\mathfrak{h}_g}\xi_{g,h}\,\alpha_{n+\varkappa'}(A_g,\mathfrak{K},h+\varkappa_g). \tag{5.21}$$

Wir betrachten die Modulform F und ebenso die Klasse $\mathfrak{K}=\{\Gamma_0,\ -r,\ v\}$ als fest gegeben. Die weiterhin auftretenden sog. Konstanten C_1, C_2, ... sind demgemäss positive Funktionen von $\mathfrak{K}$ und F allein. Wir definieren jetzt die Grössen ϱ_k, β_k, $m_{1\nu}(k)$ $(1\leq\nu\leq\beta_k)$ ähnlich wie in (P I), 7.; es bilden also die ϱ_k $(k=1,2,\ldots)$ die monoton abnehmende Folge mit dem (genauen) Wertevorrat

$$\frac{c_{g,h}}{m_1}\quad(g\subset\mathfrak{g};\ m_1\subset\mathfrak{T}(A_g,\Gamma_0),\ m_1>0;\ h\subset\mathfrak{h}_g),$$

und es gilt unter diesen Bedingungen bei festem k genau dann $c_{g,h}=m_1\varrho_k$, wenn $m_1=m_{1\nu}(k)$, $1\leq\nu\leq\beta_k$. Hier wollen wir — in geringfügiger Abweichung von (P I) — primär die verschiedenen Paare $\{g,h\}$, die $c_{g,h}=m_1\varrho_k$ für $g\subset\mathfrak{g}$, $h\subset\mathfrak{h}_g$, $m_1\subset\mathfrak{T}(A_g,\Gamma_0)$ bei festem k erfüllen, durch den Index ν, also gemäss $g=g_\nu(k)$, $h=h_\nu(k)$ $(1\leq\nu\leq\beta_k)$ kennzeichen und die $m_{1\nu}(k)$ durch

$$m_{1\nu}(k)=\varrho_k^{-1}c_{g_\nu(k),h_\nu(k)}\qquad(g_\nu(k)\subset\mathfrak{g},\ h_\nu(k)\subset\mathfrak{h}_{g_\nu(k)},\quad 1\leq\nu\leq\beta_k) \tag{5.22}$$

definieren. Zum Unterschiede von (P I) kann also bei festem k ein Wert $m_{1\nu}(k)$ mehrfach auftreten; β_k ist höchstens gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Hauptteil-Glieder von $F(\tau)$.

Da die $\alpha_{n+\varkappa'}(A_j,\mathfrak{K},h+\varkappa_j)$ ersichtlich von der Wahl der $v(A_j)$ $(2\leq j\leq\sigma_0)$ nicht abhängen, werde nun $v(A_j)=1$ $(1\leq j\leq\sigma_0)$ vorausgesetzt. Dann ergibt sich die Reihendarstellung

$$b_{n+\varkappa'}(I,F)=-\frac{i^r N^{\frac{r}{2}-1}}{2(n+\varkappa')^{\frac{r}{2}}}\sum_{k=1}^{\infty}H_k(n+\varkappa',F)\qquad(n+\varkappa'>0), \tag{5.23}$$

deren Glieder $H_k(n+\varkappa',F)$ durch

$$\begin{gathered}X_k(n+\varkappa',F)=\sum_{1\leq\nu\leq\beta_k}\xi_{g_\nu(k),h_\nu(k)}\overline{W}_{m_{1\nu}(k)}(-(n+\varkappa'),\ A_{g_\nu(k)},\mathfrak{K},h_\nu(k)+\varkappa_{g_\nu(k)}),\\ f_{r-1}(z)=z\,I_{r-1}(z),\quad H_k(n+\varkappa',F)=X_k(n+\varkappa',F)\,f_{r-1}(\varrho_k\sqrt{n+\varkappa'})\end{gathered} \tag{5.24}$$

erklärt sind.

Wir zitieren einige Resultate von (P I), 7., die sich unmittelbar auf die vorliegende Situation übertragen und die wir hier anwenden wollen. Für das zweite Resultat teilen wir auch den in (P I) nicht ausgeführten Beweis mit. — Zunächst gilt

$$C_1 \leqq k\varrho_k \leqq C_2, \quad C_3 \leqq k^{-1} m_{1\nu}(k) \leqq C_4 \quad (1 \leqq \nu \leqq \beta_k). \tag{5.25}$$

Bei gegebenem k bezeichne ferner $m(k)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der $m_{1\nu}(k)$ $(1 \leqq \nu \leqq \beta_k)$. Dann gilt

$$C_3 \leqq k^{-1} \bar{m}(k) \leqq C_5. \tag{5.26}$$

B e w e i s: Die erste Ungleichung (5.26) folgt aus der dritten Ungleichung (5.25). Um die zweite Ungleichung (5.26) zu beweisen, bemerke man, dass die sämtlichen Quotienten $m_{1\nu}(k) m_{1\mu}^{-1}(k)$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, \beta_k)$ einer festen Menge von positiven rationalen Zahlen angehören; diese kann als die Gesamtheit $\mathfrak{Q}$ aller rationalen Zahlen unter den Quotienten irgend zweier $c_{g,h}$ $(g \subset \mathfrak{g},\ h \subset \mathfrak{h}_g)$ erklärt werden. Man bilde nun den Hauptnenner $\bar{h}$ der Zahlen von $\mathfrak{Q}$, die Menge $\bar{h}\mathfrak{Q}$ der natürlichen Zahlen $\bar{h}s$ für s in $\mathfrak{Q}$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\bar{f}$ der Zahlen von $\bar{h}\,\mathfrak{Q}$; dann findet man nach (5.22) zunächst

$$\bar{h} m_{1\nu}(k) = f_\nu m_{11}(k) \qquad (f_\nu \subset \bar{h}\mathfrak{Q},\ 1 \leqq \nu \leqq \beta_k,\ k \text{ fest}).$$

Hieraus folgt, dass alle $\bar{h} m_{1\nu}(k)$, also auch alle $m_{1\nu}(k)$ in $\bar{f}\, m_{11}(k)$ aufgehen, was nach (5.25)

$$\bar{m}(k) \leqq \bar{f}\, m_{11}(k) \leqq \bar{f}\, C_4 k$$

und damit die Behauptung ergibt.

Unter der Voraussetzung, dass alle $\varkappa_g$ $(g \subset \mathfrak{g})$ rationale Zahlen sind, sei $\vartheta = 2$ oder 3, je nachdem, ob die sämtlichen $c_{g,h}$ $(g \subset \mathfrak{g},\ h \subset \mathfrak{h}_g)$ zueinander in rationalem Verhältnis stehen oder nicht. Dann gilt

$$\varrho_k - \varrho_l > \frac{C_6}{l^\vartheta} \quad \text{für ganze } k, l \text{ mit } 1 \leqq k < l. \tag{5.27}$$

Wir gelangen jetzt zu der genaueren Diskussion der oben angedeuteten Frage nach dem asymptotischen Charakter der Entwicklung (5.23). Um hier ein nicht-triviales Ergebnis zu gewinnen, bedarf man zusätzlicher Annahmen. Wir formulieren die sämtlichen weiterhin zu Grunde liegenden Annahmen zusammenfassend wie folgt:

V o r a u s s e t z u n g (**E**):

1. Es sei Γ_0 eine Kongruenzgruppe, d.h. eine durch endlich viele Kongruenzen für die Elemente ihrer Matrizen definierte Untergruppe der vollen Modulgruppe Γ.
2. Es sei r eine rationale Zahl > 2.
3. Es sei v ein Multiplikatorsystem zur Gruppe Γ_0 von der Dimension $-r$ derart, dass alle Multiplikatorwerte $v(L)$ $(L \subset \Gamma_0)$ Einheitswurzeln sind.
4. Es sei $F(\tau)$ eine in der oberen Halbebene reguläre Modulform $\{\Gamma_0, r-2, v^{-1}\}$.

5. Für die Entwicklungen von $F(\tau)$ nach den Ortsvariablen der Spitzen (vgl. Satz 4) gelte: Die sämtlichen Quotienten irgend zweier von Null verschiedenen Hauptteil-Koeffizienten $b_{-h-\varkappa}(A_j, F)$ sind algebraische Zahlen.

Wir ziehen aus diesen Voraussetzungen zunächst einige Schlüsse. Nach (**E**) 1.2.3. existiert, weil Γ_0 ein endliches Erzeugendensystem besitzt, eine feste natürliche Zahl $\overline{Q}$ derart, dass $\overline{Q}r$ ganz und $v^{\overline{Q}}(L)$ für alle L aus Γ_0 gleich 1 ist; insbesondere sind also alle $\overline{Q}\varkappa_j$ $(1 \leqq j \leqq \sigma_0)$ ganz rational, und daher gilt auch (5.27). In der bei (5.20) eingeführten Bezeichnung ist (E) 5. gleichbedeutend damit, dass die sämtlichen Quotienten irgend zweier $\xi_{g,h}$ $(g \subset \mathfrak{g},\ h \subset \mathfrak{h}_g)$ algebraische Zahlen sind. Existiert nur ein einziger von Null verschiedener Hauptteil-Koeffizient, so ist (E) 5. logisch zu interpretieren: Über diesen Koeffizienten wird nichts vorausgesetzt.

Es gibt ein komplexes $\xi_0 \neq 0$ derart, dass alle $\xi_0 \xi_{g,h} = \xi^*_{g,h}$ $(g \subset \mathfrak{g},\ h \subset \mathfrak{h}_g)$ ganze algebraische Zahlen sind. Nach (5.24) sind mithin die sämtlichen $\xi_0 X_k(n+\varkappa', F)$ ganz algebraisch $(k = 1, 2, \ldots)$. Es bezeichne nun $\bar{N}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen N und N_g $(g \subset \mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}$ den algebraischen Zahlkörper, der aus dem Körper P der rationalen Zahlen durch Adjunktion der sämtlichen Zahlen $\xi^*_{g,h}$ $(g \subset \mathfrak{g},\ h \subset \mathfrak{h}_g)$ hervorgeht. Dann besteht die Relation

$$\xi_0 X_k(n+\varkappa', F) \subset \mathfrak{Z}\left(\exp \frac{2\pi i}{\bar{N}\,\overline{Q}\,\overline{m}(k)}\right); \tag{5.28}$$

der Absolutgrad dieses algebraischen Zahlkörpers ist nach (5.26) höchstens gleich $C_7 k$ mit geeignetem konstanten $C_7 > 0$.

Benutzt man andrerseits für die Exponentialsummen (1.1) W_{m_1} die triviale Abschätzung $|W_{m_1}| \leqq m_1 N$, so erkennt man leicht, dass alle algebraischen Konjugierten von $\xi_0 X_k(n+\varkappa', F)$ dem Betrage nach unterhalb einer Schranke von der Gestalt $C_8 k$ liegen, wo $C_8 > 1$ ist. Daraus folgt nach (5.28)

$$|\xi_0 X_k(n+\varkappa', F)| \geqq (C_8 k)^{-C_7 k}, \quad \text{wenn } X_k(n+\varkappa', F) \neq 0.$$

Ferner ist $(C_8 k)^{-C_7 k} \geqq k^{-2C_7 k}$ für $k \geqq C_8$. Da jedes $X_k(n+\varkappa', F)$ $(k \geqq 1)$ eine periodische Funktion von n mit der Periode $\overline{m}(k) N$ darstellt, befinden sich unter den Zahlen

$$k^{2C_7 k}|\xi_0 X_k(n+\varkappa', F)| \quad \text{für } 1 \leqq k < C_8,\ n+\varkappa' > 0$$

nur endlich viele verschiedene, und man erhält also insgesamt

$$|X_k(n+\varkappa', F)| \geqq C_9 k^{-C_{10} k}, \quad \text{wenn } X_k(n+\varkappa', F) \neq 0. \tag{5.29}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung lässt sich ohne Schwierigkeit die folgende Aussage begründen: Es sei

$$K_{n+\varkappa'} = C_{11}\,(n+\varkappa')^{\frac{1}{2(\vartheta+1)}} \log^{-\lambda}(n+\varkappa'), \quad \lambda \text{ eine feste Zahl} > \frac{1}{\vartheta+1},$$

ferner $1 \leqq k < l \leqq K_{n+\varkappa'}$, $X_k(n+\varkappa', F) \neq 0$ (k und l ganz rational). Dann gilt

$$\frac{|H_l(n+\varkappa', F)|}{|H_k(n+\varkappa', F)|} \leqq C_{12} \exp\left(-C_{13}\,(n+\varkappa')^{\frac{1}{2(\vartheta+1)}} \log^{\frac{\vartheta}{\vartheta+1}}(n+\varkappa')\right). \tag{5.30}$$

Zum Beweise schätzt man den Zähler durch $C_{14}\,l f_{r-1}\big(\varrho_l \sqrt{n+\varkappa'}\big)$ nach oben, den Faktor X_k des Nenners gemäss (5.29) nach unten ab und wendet in Zähler und Nenner die in Satz 16 genannte asymptotische Relation für $f_{r-1}(z)$ an. Die Anwendung ist statthaft, weil nach (5.25) für $n > 2$

$$\varrho_l \sqrt{n+\varkappa'} \geqq C_1\, l^{-1} \sqrt{n+\varkappa'} \geqq C_1\, K_{n+\varkappa'}^{-1} \sqrt{n+\varkappa'} \geqq C_{15}\,(n+\varkappa')^{\frac{\vartheta}{2(\vartheta+1)}}.$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass (5.30) gültig bleibt, wenn man den Zähler auf der linken Seite durch den Betrag des Reihenrestes

$$R_l(n+\varkappa', F) = \sum_{k=l}^{\infty} H_k(n+\varkappa', F) \tag{5.31}$$

ersetzt. Hierfür mögen einige Andeutungen genügen: Wegen der Monotonie der ϱ_k ist

$$\sum_{l+1 \leqq k \leqq \sqrt{n+\varkappa'}} |H_k(n+\varkappa', F)| \leqq C_{16}\,(n+\varkappa')\, f_{r-1}\big(\varrho_{l+1} \sqrt{n+\varkappa'}\big),$$

also klein gegenüber der oberen Schranke $C_{14}\,l f_{r-1}\big(\varrho_l \sqrt{n+\varkappa'}\big)$ von $H_l(n+\varkappa', F)$, und für $m > \sqrt{n+\varkappa'}$ hat $R_m(n+\varkappa', F)$ eine Grössenordnung $O(n)$.

Wir beginnen mit der Formulierung der Ergebnisse; diese lassen sich am übersichtlichsten darstellen auf Grund der folgenden

DEFINITION: *Die Reihe* $B^*(n) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k^*(n)$ *sei für alle natürlichen Zahlen n absolut konvergent, und es werde* $R_l^*(n) = \sum_{k=l}^{\infty} H_k^*(n)$ *gesetzt. Wir sagen, diese Reihe gebe bis zu der Summationsgrenze* $k = \Lambda_n$ *eine asymptotische Entwicklung von* $B^*(n)$ *für* $n \to \infty$, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. Gleichmässig für alle ganzen k, l mit $1 \leqq k < l \leqq \Lambda_n$ strebt sowohl $H_l^*(n)\,(H_k^*(n))^{-1}$ als auch $R_l^*(n)\,(H_k^*(n))^{-1}$ gegen Null, wenn n die ganzen Zahlen durchläuft, für die $H_k^*(n) \neq 0$ ausfällt.
2. Gleichmässig für alle ganzen l, m mit $1 \leqq l \leqq \Lambda_n < m$ strebt $R_m^*(n)\,(H_l^*(n))^{-1}$ gegen Null, wenn n die ganzen Zahlen durchläuft, für die $H_l^*(n) \neq 0$ ausfällt.

Da diese Bedingungen ungeändert bleiben, wenn alle Reihenglieder mit dem gleichen von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden, können wir die Ergebnisse zusammenfassen in

SATZ 18. *Unter den Voraussetzungen* (**E**) *gibt die Darstellung* (5.23) *eine asymptotische Entwicklung im Sinne der Definition bis zu der Summationsgrenze*

$$K_{n+\varkappa'} = C_{11}\,(n+\varkappa')^{\frac{1}{2(\vartheta+1)}} \log^{-\lambda}(n+\varkappa')\,;$$

zur Erklärung von ϑ *vgl.* (5.27); λ *bezeichnet eine beliebige feste Zahl* $> \dfrac{1}{\vartheta+1}$, C_{11} *eine beliebige positive Konstante.*

Literatur

[1]. H. PETERSSON, Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten. *Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg*, 1950, 8.

[2]. ——, Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension. *Math. Ann.*, 127 (1954), 33.

[3]. ——, Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. *Abh. D. Ak. Wiss. Berlin*, 1954, 2.

[4]. H. MAASS, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variabeln. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 12 (1937), 133.

[5]. H. MINKOWSKI, Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Werke*, Bd. I (Berlin 1911), S. 3, s. insbes. Kap. 20–22.