

ÜBER NICHT-HOLONOME ALLGEMEINE METRISCHE LINIENELEMENTRÄUME

VON

ARTHUR MOÓR

Szeged (Ungarn)

Einleitung

Die nicht-holonome Geometrie der Punkträume wurde in den Arbeiten von J. A. Schouten, G. Vranceanu, J. L. Synge und anderen eingehend untersucht und entwickelt (vgl. die Fussnote des Aufsatzes [6]⁽¹⁾). Im folgenden wollen wir eine nicht-holonome Geometrie in einem Linienelementraum entwickeln, dessen Grundelement (x^i, v^i) also ein Punkt x^i mit einer zugeordneten Richtung v^i ist. Eine nicht-holonome Geometrie in einem Finslerschen Raum — der nach Cartans Auffassung auch als ein Linienelementraum betrachtet werden kann — wurde von H. Rund in seiner Arbeit [5] studiert und für die Lösung dynamischer Probleme angewandt.

Unser Linienelementraum, in dem wir eine nicht-holonome Geometrie entwickeln werden, ist allgemeiner, als der von H. Rund benützte Finslersche Raum (vgl. [4] und [1]). In diesen allgemeineren Linienelementräumen, die wir im folgenden als \mathfrak{L}_n -Räume bezeichnen werden, existieren drei verschiedene Typen von Kurven, und zwar die Extremalen, die autoparallelen Linien und die quasi-autoparallelen Linien. In der nicht-holonomen Geometrie existieren neben diesen Kurven noch zwei Arten von Kurven, die wir Bahnen bzw. relative Bahnen der nicht-holonomen Geometrie nennen wollen. Die geometrische Bedeutung der Bahnen ist auch in den \mathfrak{L}_n -Räumen dieselbe, wie in dem von H. Rund untersuchten Finslerschen Fall (vgl. [5], §3), die Bahnen sind also diejenigen Kurven, deren Hauptnormalen auf einer gewissen $(n - m)$ -dimen-

⁽¹⁾ Siehe das Schriftenverzeichnis am Ende unsres Artikels. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich immer auf das Schriftenverzeichnis.

sionale Tangentialmannigfaltigkeit M_{n-m} , die von den Bedingungsgleichungen bestimmt ist, senkrecht stehen. Die relativen Bahnen sind durch gewisse Differentialgleichungen definierte Kurven, für die die Richtung des Tangentenvektors \dot{x}^i im allgemeinen nicht mit der Richtung v^i des Linielementes (x^i, v^i) übereinstimmt.

Im ersten Teil unserer Arbeit werden wir bedingen, dass die Richtung der Tangente einer Kurve der nicht-holonomen Geometrie mit der Richtung derjenigen Linielemente übereinstimme, die die nicht-holonome Kurve⁽¹⁾ bilden. Analytisch ist das durch $v^i = dx^i/dt$ ausgedrückt. Diese Auffassung wurde auch von H. Rund im Finslerschen Fall benützt (vgl. [5]). Nach den sog. Bindungsgleichungen (vgl. die Gleichungen (2.1)) bedeutet die Relation $v^i = dx^i/dt$, dass in jedem Punkt x^i nur gewisse Richtungen v^i in Betracht kommen können.

Die Bindungsgleichungen bestimmen somit in dem durch $v^i = \dot{x}^i$ gekennzeichneten Fall eine Richtungsanholonomie.

Im zweiten Teil werden wir die nicht-holonome Geometrie bezüglich eines vorgegebenen, aber frei wählbaren Richtungsfeldes $v^i(s)$ entwickeln. Dies wäre somit eine Verallgemeinerung des ersten Teiles, doch wollen wir die nicht-holonome Übertragungstheorie in einer etwas verschiedenartigen Weise entwickeln; somit wird die im § 3 behandelte nicht-holonome Übertragung nicht ein Spezialfall von § 7. Die ausgezeichneten Kurven bezüglich des vorgegebenen Richtungsfeldes $v^i(s)$ wollen wir relative Bahnen nennen. Die Bahnen und die relativen Bahnen sind die Analoga der autoparallelen und quasiautoparallelen Linien (vgl. [4] § 5).

In § 1 werden wir die Grundformeln der \mathcal{L}_n -Räume — soweit diese im folgenden gebraucht werden — kurz zusammenstellen. In § 2 bestimmen wir die Gleichung der Bahnen, und dann beweisen wir das Analogon eines Satzes von J. L. Synge. In § 3 definieren wir die nicht-holonome Übertragung für Vektoren, die vom Grundelement (x^i, v^i) abhängig sind. Diese Übertragung wird auf diese Weise allgemeiner, als jene, die von H. Rund in der Arbeit [5] bestimmt wurde, da die Rundsche Übertragung nur für allein von den x^i abhängige Vektorenfelder entwickelt ist.

In § 4 und § 5 wird die Krümmung des Raumes behandelt. Wir betrachten die nicht-holonome Übertragung bei der Bestimmung der Krümmungstensoren als eine affine Übertragung des Raumes (vgl. [7]) im Sinne von O. Varga.

Die Paragraphen 6–8 enthalten die Untersuchungen von analogen Problemen im Falle, wenn $\dot{x}^i \neq v^i$ besteht.

⁽¹⁾ Unter einer nicht-holonomen Kurve ist eine Kurve $x^i = x^i(t)$ zu verstehen, deren Tangentenvektoren den Bindungsgleichungen genügen.

Bezüglich der Bezeichnungen bemerken wir noch, dass falls die v^i mit der Richtung \dot{x}^i einer Kurve $x^i(t)$ übereinstimmen, dann werden wir statt (x^i, v^i) die Bezeichnung (x^i, \dot{x}^i) benützen. Ist der Parameter die Bogenlänge: s , so benützen wir statt \dot{x}^i die Bezeichnung x'^i .

ERSTER TEIL

§ 1. Grundformeln der \mathcal{L}_n -Räume

Unter einem \mathcal{L}_n -Raum verstehen wir im folgenden eine metrische Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} der Linienelemente (x^i, v^i) , falls in \mathfrak{M} die Metrik durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ festgelegt ist, und die Räume eine metrische Übertragung der Vektoren existiert. Die Geometrie der \mathcal{L}_n -Räume findet der Leser in unserer Arbeit [4] vollständig entwickelt; hier werden wir nur die Fundamentalformeln dieser Geometrie zusammenstellen, soweit sie nämlich von uns im folgenden gebraucht werden.

Das invariante Differential eines Vektors ξ^i ist durch die Formel

$$D\xi^i = d\xi^i + M_{j^i k}^* \xi^j \dot{\omega}^k(d) + L_{j^i k}^* \xi^j dx^k \tag{1}$$

bestimmt, wo $\dot{\omega}^k(d)$ das invariante Differential des Einheitsvektors $l^k \stackrel{\text{def}}{=} v^k/F$, d. h. $\dot{\omega}^k(d) \stackrel{\text{def}}{=} D l^k$ bedeutet. Die explizite Form von $\dot{\omega}^k(d)$ erhält man aus der Formel (1.1), wenn in (1.1) $\xi^i = l^i$ gesetzt, und dann auf $\dot{\omega}^k(d)$ gelöst wird. Man bekommt für $\dot{\omega}^k(d)$ die folgende Formel (vgl. [4], Formel (5.2), die auch für einen beliebigen Parameter t besteht):

$$\dot{\omega}^k(d) \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_j^k + M_{o^k j}^*) (dl^j + L_{o^k r}^* dx^r). \tag{1.1 a}$$

Die Formel (1.1) kann man noch in der Form (vgl. [4], § 2, insbesondere Gleichungen (2.4) und (2.5)):

$$D\xi^i = \xi^i|_k dx^k + \xi^i{}_{;k} \dot{\omega}^k(d) \tag{1.2}$$

schreiben, wo

$$\xi^i|_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i|_r L_{o^k r}^* + L_{r^i k}^* \xi^r, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad |{}_r = F \frac{\partial}{\partial v^r}, \tag{1.3}$$

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v) v^i v^k}, \tag{1.3 a}$$

$$\xi^i{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \xi^i|_r (\delta_k^r - M_{o^k r}^*) + M_{r^i k}^* \xi^r \tag{1.4}$$

die beiden kovarianten Ableitungen sind, der Index „o“ die Kontraktion mit dem Einheitsvektor l^i und F die Grundfunktion des \mathcal{L}_n -Raumes bedeutet. $\dot{\omega}^k(d)$ ist in den Formeln (1.1) und (1.2) das invariante Differential des Einheitsvektors l^k . Die Formel des invarianten Differentials des Einheitsvektors l^k ist längs einer Kurve $x^i(s)$ falls $x'^i = l^i$ besteht, nach (1.1 a) die folgende:

$$\frac{\omega^k(d)}{ds} = (\delta_r^k + M_{o^k r}^{*k}) \left(\frac{d^2 x^r}{ds^2} + L_{o^r o}^{*r} \right), \quad l^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (1.5)$$

Ist $l^i = x'^i$, so werden wir im folgenden statt $\dot{\omega}^k$ die Bezeichnung ω^k benutzen, während $\dot{\omega}^k(d)$ immer ein von x'^k unabhängiges invariantes Differential von l^k bedeuten wird.

Die expliziten Formeln der Übertragungsparameter $M_{j^i k}^{*i}$ und $L_{j^i k}^{*i}$ sind durch die Relationen

$$M_{j^i k}^{*i} = A_{j^i r}^i (\delta_k^r - (A_{o^k r}^r + \mu_{o^k r}^r) I_r^i) + \mu_{j^i k}^i, \quad A_{ijr} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g_{ij|_r}, \quad (1.5 a)$$

$$L_{j^i k}^{*i} = \Gamma_{j^i k}^{*i} - A_{j^i r}^i I_r^i \sigma_{o^k}^i + \sigma_{j^i k}^i \quad (1.5 b)$$

bestimmt (vgl. die Gleichungen (2.16) und (2.24) von [4]), wo der Tensor I_k^i durch das Gleichungssystem

$$(\delta_r^k + A_{o^k r}^k) I_k^i = \delta_r^i$$

festgelegt ist und μ_{ijk} und σ_{ijk} in (i, j) schiefsymmetrische Tensoren bedeuten; der Tensor μ_{ijk} soll noch die Relationen

$$\mu_{ijo} = 0, \quad (A_{o^r k}^r + \mu_{o^k r}^r) I_r^i (A_{o^s t}^s + \mu_{o^s t}^s) I_s^i = 0$$

befriedigen (vgl. die Formel (2.16 b) von [4]). Abgesehen von diesen Bedingungen sind μ_{ijk} und σ_{ijk} frei wählbar. $\Gamma_{j^i k}^{*i}$ in (1.5 b) ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\Gamma_{ijk}^{*i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}) - A_{ijt} \Gamma_{o^k}^{*t} - A_{jkt} \Gamma_{o^i}^{*t} + A_{ikt} \Gamma_{o^j}^{*t}. \quad (1.5 c)$$

Für $M_{j^i k}^{*i}$ bestehen die Relationen (vgl. (2.13) und (2.3 b) von [4]):

$$M_{ijk}^{*i} = A_{ijr}^i (\delta_k^r - M_{o^k r}^{*r}) + \mu_{ijk} \quad (1.6)$$

$$M_{o^k}^{*j} M_{o^r}^{*k} = 0. \quad (1)$$

Die durch die Formeln (1.2), (1.3) und (1.4) angegebene Übertragungstheorie im \mathfrak{L}_n -Raum ist also durch die Grundtensoren g_{ij} , μ_{ijk} und σ_{ijk} bestimmt.

Aus der Bedingung, dass die durch (1.2) bestimmte Übertragung metrisch sei, folgen nach (1.3) und (1.4) die Relationen:

$$g_{ij;k} \equiv 2 A_{ijr}^i (\delta_k^r - M_{o^k r}^{*r}) - M_{ijk}^{*i} - M_{jik}^{*i} = 0, \quad (1.8)$$

$$g_{ij|_k} \equiv \partial_k g_{ij} - 2 A_{ijr}^i L_{o^k}^{*r} - L_{ijk}^{*i} - L_{jik}^{*i} = 0; \quad (1.9)$$

wir haben eben aus diesen Relationen die explizite Form (1.5 a) und (1.5 b) von $M_{j^i k}^{*i}$ und $L_{j^i k}^{*i}$ bestimmt (vgl. [4] § 2).

(1) Die Gleichung (1.7) stimmt mit der Gleichung (2.3 b) von [4] überein, da $M_{o^k}^{*j} = \bar{M}_{o^k}^{*j}$ besteht.

Für den Einheitsvektor l^i , der die Richtung seines Stützelementes v^i hat, bestehen die wichtigen Relationen:

$$l^i|_j = \delta_j^i - l^i (l_j + A_{ooj}), \tag{1.10}$$

$$l^i|_j \equiv \partial_j l^i + l^i (L_{ooj}^* + A_{oor} L_{o^*i}^*) \equiv 0. \tag{1.11}$$

Die Gleichung (1.10) kann man unmittelbar aus der Definitionsgleichung von l^i berechnen; für den Beweis der Formel (1.11) vgl. die Gleichungen (2.26) und (2.28) der Arbeit [4].

Von den Krümmungstensoren des \mathcal{Q}_n -Raumes werden wir nur den Hauptkrümmungstensor $\bar{R}_{i' km}^j$ benutzen. Es ist:

$$\frac{1}{2} \bar{R}_{i' km}^j \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{[m} L_{|i'|k]}^* - L_{o^*}^{*t}{}_{[m} L_{|i'|k]}^* + L_{r^*}^{*j}{}_{[m} L_{|i'|k]}^*. \tag{1.12}$$

§ 2. Die Bindungen und die Bahnkurven des Raumes

Es seien in unserem \mathcal{Q}_n -Raum m Funktionen $G_{(\mu)}(x, \dot{x})$ gegeben, die in den

$$\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$$

homogen von erster Dimension sind. Wir werden im folgenden nur diejenigen Richtungen \dot{x}^i in Betracht ziehen, für die die Relationen

$$G_{(\mu)}(x, \dot{x}) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m \tag{2.1}$$

erfüllt sind. H. Rund hat in seinem Aufsatz [5] aus den Skalaren $G_{(\mu)}$ m Vektoren

$$A_{(\mu)i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G_{(\mu)}}{\partial \dot{x}^i}, \quad \mu = 1, 2, \dots, m \tag{2.2}$$

gebildet, die in der Theorie der nicht-holonomen Räume eine fundamentale Rolle spielen. Die Matrix

$$\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial G_{(\mu)}}{\partial \dot{x}^i} \right),$$

die aus m Zeilen und n Kolonnen besteht, soll den Rang m haben. In unserem \mathcal{Q}_n -Raum ist es zweckmässig, statt (2.2) die Vektoren $A_{(\mu)i}$ durch die Formeln

$$A_{(\mu)i} \stackrel{\text{def}}{=} G_{(\mu);i} \equiv \frac{\partial G_{(\mu)}}{\partial \dot{x}^r} (\delta_i^r - M_{o^*i}^{*r}) \tag{2.3}$$

(¹) Vgl. [4], Gleichung (2.9). Wir haben jetzt die Operation: „ \cdot “ auf einen Skalar angewandt, der in den \dot{x}^i homogen von erster Dimension ist. Somit müssen wir nicht mit F multiplizieren, damit die $A_{(\mu)i}$ in den \dot{x}^i homogen von nullter Dimension seien.

zu bestimmen. Selbstverständlich soll der Rang der Matrix

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (G_{(\mu);i}),$$

ähnlich wie im Aufsatz [5] der Rang von \tilde{P} , gleich m sein. Auf Grund der Annahme über den Rang der Matrix P kann man durch die Gleichungen ⁽¹⁾ (vgl. [2] S. 201)

$$A_{(\mu);i}^* = c_{\mu\nu} A_{(\nu);i} \equiv c_{\mu\nu} G_{(\nu);i} \quad (2.4)$$

statt der Vektoren $A_{(\mu);i}$ solche orthonormierte Vektoren $A_{(\mu);i}^*$ einführen, die also

$$g^{ij} A_{(\mu);i}^* A_{(\nu);j}^* = \delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{für } \mu = \nu \\ 0, & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.5)$$

genügen, und dieselbe lineare Mannigfaltigkeit aufspannen, wie die $A_{(\mu);i}$ (vgl. [5] S. 64). Auf Grund der Relation (vgl. [4], Gleichungen (2.1 a) und (2.6 a)):

$$M_{ij}^* = 0$$

folgt nach (2.3), dass

$$A_{(\mu);i}(x, x') x'^i = G_{(\mu)}(x, x'), \quad x'^i \equiv \frac{dx^i}{ds} \quad (2.6)$$

besteht, da $G_{(\mu)}$ nach unserer Annahme in den x'^i homogen von erster Dimension ist. Die $A_{(\mu);i}$ und die $A_{(\mu);i}^*$ spielen also im \mathcal{L}_n -Raum dieselbe Rolle, wie die entsprechenden Vektoren im Finslerschen Fall (vgl. [5] § 2).

Der Tensor

$$C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{(\mu);i}^* A_{(\mu);j}^* \quad (2.7)$$

ist von der Wahl des orthonormierten Systems $A_{(\mu);i}^*$ unabhängig (vgl. [5] S. 65).

Nach diesen Vorbereitungen können die Bahnen der nicht-holonomen Geometrie in den \mathcal{L}_n -Räumen ebenso abgeleitet und geometrisch interpretiert werden, wie im Finslerschen Fall (vgl. [5] § 3), nur bedeutet im \mathcal{L}_n -Raum das Symbol D/Ds die durch (1.1) bestimmte Operation. Die Definition der Bahnkurven lautet also:

DEFINITION 1. *Die Bahnen der nicht-holonomen Geometrie in den \mathcal{L}_n -Räumen sind diejenigen Kurven*

$$x^i = x^i(s), \quad s: \text{Bogenlänge,}$$

die die Gleichungen (2.1) befriedigen und für die eine Relation von der Form

⁽¹⁾ Im folgenden soll auf zweimal vorkommende griechische Indizes eine Summation von 1 bis m durchgeführt werden.

$$g_{ij} \frac{D x'^j}{D s} = \pi_{(\mu)}(x, x') A_{(\mu)i}^*(x, x'), \quad x'^i \equiv \frac{d x^i}{d s} \tag{2.8}$$

besteht. (Für die Grössen $\pi_{(\mu)}$ vgl. die Formel (2.13).)

Die skalaren Faktoren $\pi_{(\mu)}(x, x')$ hängen im allgemeinen von den Vektoren $A_{(\mu)i}^*$ ab. Diese Faktoren sollen jetzt bestimmt werden. Bestehen längs einer Kurve $x^i(s)$ die Bedingungsgleichungen (2.1), so bestehen nach (2.4) und (2.6) offenbar auch die Relationen:

$$A_{(\varrho)i}^*(x, x') x'^i = 0. \tag{2.9}$$

Differenziert man diese Gleichung nach s , so wird:

$$\frac{D A_{(\varrho)i}^*}{D s} x'^i + A_{(\varrho)i}^* \frac{D x'^i}{D s} = 0. \tag{2.10}$$

Jetzt und im folgenden wollen wir immer annehmen, dass die Richtung v^i der Linienelemente (x^i, v^i) längs einer Bahn der nicht-holonomen Geometrie immer mit der Richtung des Tangentenvektors $x'^i = dx^i/ds$ der Bahn übereinstimmt. Analytisch bedeutet das auf Grund der Formel (1.5):

$$x'^i \equiv \frac{d x^i}{d s} = l^i, \quad \frac{D x'^i}{D s} = \frac{\omega^i(d)}{d s}.$$

Benützen wir für die Formel des invarianten Differentials die Relation (1.2), so bekommt man aus (2.10)

$$A_{(\varrho)i|k}^* l^i l^k + A_{(\varrho)i;k}^* l^i \frac{\omega^k(d)}{d s} + A_{(\varrho)k}^* \frac{\omega^k(d)}{d s} = 0.$$

Beachten wir jetzt die Identität (1.11), so bekommt man auf Grund der Gleichung (2.4) und (2.6) aus unserer letzten Gleichung:

$$c_{\varrho r} \left(G_{(v)|o} + G_{(v);k} \frac{\omega^k(d)}{d s} \right) - A_{(\varrho)i}^* l_{;k}^i \frac{\omega^k(d)}{d s} + A_{(\varrho)k}^* \frac{\omega^k(d)}{d s} = 0. \tag{2.11}$$

Wir berechnen jetzt $l_{;k}^i$. Nach (1.4) und (1.10) bekommt man:

$$l_{;k}^i = \delta_k^i - l^i (l_k + A_{ook}) + l^i (l_r + A_{oor}) M_o^{*r}{}_k.$$

Die Gleichung (1.6) geht aber nach einer Überschiebung mit $l^i l^j$ wegen der schiefen Symmetrie von μ_{ijk} in (i, j) in die Formel:

$$(l_r + A_{oor}) M_o^{*r}{}_k = A_{ook}$$

über.⁽¹⁾ Somit wird:

$$l^i_{;k} = \delta^i_k - l^i l_k. \quad (2.12)$$

Substituiert man nun den Wert von $l^i_{;k}$ aus dieser Gleichung in (2.11) und beachtet man, dass wegen $Dg_{ij} = 0$ die Relation $\omega^o = 0$ besteht, so bekommt man aus (2.11) im Hinblick auf (2.4):

$$c_{\rho\nu} G_{(\nu)}|_o + A_{(\rho)k}^* \frac{\omega^k(d)}{ds} = 0.$$

Nun ist nach (2.8)

$$\frac{\omega^k(d)}{ds} \equiv \frac{Dx'^k}{Ds} = g^{ik} \pi_{(\nu)} A_{(\nu)i}^*,$$

somit erhält man aus den beiden letzten Formeln wegen der Relationen (2.5):

$$\pi_{(\rho)}(x, x') = -c_{\rho\nu} G_{(\nu)}|_o. \quad (2.13)$$

Aus der Gleichung (2.8) wird somit nach (2.13)

$$\frac{Dx'^i}{Ds} + c_{\mu\nu} g^{ik} G_{(\nu)}|_o A_{(\mu)i}^* = 0. \quad (2.14)$$

(Offenbar ist im allgemeinen $G_{(\nu)}|_o \neq 0$ auch längs der Mannigfaltigkeit (2.1)). Wir werden jetzt noch (2.14) etwas umformen. Nach einer kovarianten Ableitung der Definitionsgleichung (2.7) nach x^k , und nach einer darauffolgenden Kontraktion mit $l^j l^k$ wird wegen (1.11), (2.3), (2.4) und (2.6) längs der Bahnen

$$C_{ij}|_o l^j = c_{\mu\nu} G_{(\nu)}|_o A_{(\mu)i}^* \quad (2.15)$$

bestehen. Vergleichen wir dies mit (2.14), so ergibt sich, dass die Gleichung der Bahnen durch

$$\frac{Dx'^k}{Ds} + g^{rk} C_{rj}|_o l^j = 0, \quad l^j = \frac{dx^j}{ds} \quad (2.16)$$

bestimmt ist, falls noch (2.1) bzw. die mit (2.1) äquivalente Relation (2.9) besteht. Beachten wir noch (2.7) und (2.9), so bekommt man die mit (2.16) äquivalente Gleichung der Bahnen:

$$\frac{Dx'^k}{Ds} + g^{rk} A_{(\mu)r}^* A_{(\mu)j}^*|_o l^j = 0, \quad l^j = \frac{dx^j}{ds}. \quad (2.16^*)$$

Die Gleichung (2.8) der Bahnen können wir auch in einer anderen Form bestimmen, für deren allgemeine Lösungen, die also (2.1) nicht unbedingt erfüllen, das

(1) Da der \mathfrak{L}_n -Raum metrisch ist, besteht offenbar $M_o^* o_k \equiv M_o^* o_k$. Die Stellung von „o“ ist in metrischen Linienelementräumen beliebig, d. h. der Index „o“ bedeutet in kovarianter bzw. in kontravarianter Stellung dasselbe.

(2) Offenbar ist im allgemeinen $A_{(\mu)j}^*|_o l^j \neq 0$, da (2.9) nur im nicht-holonomen Raum gültig ist.

folgende gilt: *ist die Relation (2.1) in einem Anfangslinienelement (x^i, \dot{x}^i) erfüllt, so besteht (2.1) längs der ganzen Lösungskurve.* Da der Tangentenvektor x'^i die Gleichungen (2.1), bzw. die mit (2.1) äquivalenten Gleichungen (2.9) befriedigt, so besteht längs einer Bahn auch (2.10), da ja (2.10) aus (2.9) durch eine Differentiation nach s entstanden ist. Eine Kontraktion von (2.8) mit g^{jk} ergibt wegen $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$:

$$\frac{Dx'^k}{Ds} = \pi_{(\rho)} g^{jk} A_{(\rho)j}^*.$$

Setzen wir diesen Wert von Dx'^k/Ds in die Gleichung (2.10) ein und beachten wir dann die Relation (2.5), so ergibt sich, dass längs der Bahnen

$$\pi_{(\nu)} = - \frac{DA_{(\nu)i}^*}{Ds} x'^i \tag{2.17}$$

besteht. Auf Grund von (2.17) kann somit die Gleichung (2.8) in der Form

$$\frac{Dx'^i}{Ds} + g^{ij} A_{(\nu)j}^* \frac{DA_{(\nu)k}^*}{Ds} x'^k = 0 \tag{2.18}$$

bestimmt werden.

Das Differentialgleichungssystem (2.18) ist die gewünschte Form des charakteristischen Differentialgleichungssystems der Bahnen.

Im Fall der Punkträume bewies J. L. Synge in seinem Aufsatz [6], dass diejenigen Kurven, längs der $A_{(\nu)i}^* x'^i = \text{konst.}$ besteht, ein Integral der entsprechenden Gleichungen (2.18) sind (vgl. [6], Theorem II. S. 744). Auch in unserem \mathcal{L}_n -Raum ist das Analogon dieses Satzes gültig; es besteht nämlich der folgende

SATZ 1. *Befriedigt eine Kurve $x^i = x^i(s)$ das Differentialgleichungssystem (2.18), so ist längs dieser Kurve*

$$A_{(\nu)i}^*(x, x') x'^i = \text{konst.} \tag{2.19}$$

Der Satz 1 drückt die schon im vorigen erwähnte wichtige Tatsache aus, dass, falls eine Lösungskurve $x^i = x^i(s)$ von (2.18) in dem Anfangslinienelement (x^i, \dot{x}^i) die Relation (2.1) bzw. (2.9) befriedigt, dann überhaupt diesen Relationen genügen wird.

Beweis des Satzes 1. Es ist

$$\frac{d}{ds} (A_{(\nu)i}^* x'^i) = \frac{DA_{(\nu)i}^*}{Ds} x'^i + A_{(\nu)i}^* \frac{Dx'^i}{Ds}.$$

Substituiert man Dx'^i/Ds aus (2.18) in die letzte Formel, so wird im Hinblick auf (2.5):

$$\frac{d}{ds} (A_{(\nu)i}^* x'^i) = 0 \tag{2.20}$$

und das beweist eben die Formel (2.19). Aus dem Beweis folgt auch, dass (2.19) für jede Lösungskurve von (2.18) bestehen muss.

Übrigens kann man den Satz 1 auch auf Grund der Formel (2.16*) leicht beweisen, wenn die aus (2.1) bzw. aus (2.9) folgende Relation

$$A_{(\varrho)i;k}^* l^i = 0 \quad (2.21)$$

benützt wird. Es ist dann nach (2.21)

$$\frac{d}{ds} (A_{(\varrho)i}^* x^i) = A_{(\varrho)i;o}^* \frac{dx^i}{ds} + A_{(\varrho)i}^* \frac{Dx^i}{Ds}.$$

Drücken wir jetzt Dx^i/Ds aus der Formel (2.16*) aus, substituieren wir diesen Wert in die letzte Gleichung und beachten wir dann (2.5), so bekommen wir eben (2.20), w. z. b. w.

Wir werden jetzt beweisen, dass für eine Kurve $x^i(s)$, die (2.1) bzw. (2.9) befriedigt, (2.21) immer erfüllt ist. Es ist nämlich nach der Gleichung (2.12)

$$(A_{(\varrho)i}^* l^i)_{;k} = A_{(\varrho)i;k}^* l^i + A_{(\varrho)i}^* (\delta_k^i - l^i l_k). \quad (2.22)$$

Nun ist aber auch für $G_{(\varrho)} = 0$ auf Grund der Homogenität erster Dimension von $G_{(\varrho)}$ in den x^i :

$$(A_{(\varrho)i}^* l^i)_{;k} = (c_{\varrho v} G_{(v)i} l^i)_{;k} = (c_{\varrho v} G_{(v)})_{;k} = c_{\varrho v} G_{(v);k} = A_{(\varrho)k}^*. \quad (2.23)$$

Aus (2.22) und (2.23) folgt schon nach (2.9) die gewünschte Relation (2.21). In der nicht-holonomen Geometrie, deren Kurven also (2.1), bzw. die aus (2.1) folgende Relation (2.21) befriedigen, *stimmt (2.16*) mit der Gleichung (2.18) der Bahnen überein.*

Wir wollen aber bemerken, dass für die allgemeinen Lösungen von (2.16*), die also nicht notwendigerweise Kurven unserer nicht-holonomen Geometrie sind, der Satz 1 im allgemeinen nicht gültig ist. *Die Differentialgleichungen (2.16*) und (2.18) sind aber auf Grund von (1.2) identisch, falls die Relationen (2.21) bestehen.* Das folgt wegen

$$\frac{DA_{(\varrho)i}^*}{Ds} = A_{(\varrho)i;k}^* \frac{dx^k}{ds} + A_{(\varrho)i;k}^* \frac{\omega^k(d)}{ds}$$

unmittelbar. Z. B. in der nicht-holonomen Geometrie, deren Kurven der Gleichungen (2.1) genügen, ist (2.21) immer gültig. Die Relationen (2.21) können aber auch ausser dem nicht-holonomen Raum gültig sein; in diesem Falle besteht (2.19) auch für die allgemeinen Lösungen von (2.16*). Vgl. z. B. den Fall des Finslerschen Raumes; hier ist (2.21) immer erfüllt, falls $(\partial A_{(\varrho)i}^*/\partial v^k) l^i = 0$ ist.

Im folgenden wollen wir uns wieder auf den nicht-holonomen Raum beschränken, wo also (2.1) bzw. (2.21) immer gültig sind; die Gleichung (2.18) der Bahnen kann also auch durch (2.16) bzw. (2.16*) definiert werden.

§ 3. Die nicht-holonome Übertragung

Mit Hilfe des durch (2.7) bestimmten Tensors C_{ij} kann man eine nicht-holonome Übertragung in den \mathcal{L}_n -Raum einführen (vgl. [6] § 5 und [5] § 3). Um die Übertragungsparameter dieser nicht-holonomen Übertragung zu erhalten, werden wir die Gleichung (2.16) der Bahnen in eine etwas veränderte Form umschreiben. Aus der Formel (1.1) bekommt man nach der Substitution $\xi^i = l^i$ wegen (1.7):

$$\frac{Dx^{ik}}{Ds} \equiv \frac{\omega^k(d)}{ds} = (\delta_j^k + M_{o^k}^{*j}) \left(\frac{d^2 x^j}{ds^2} + L_{r^j t}^{*j} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^t}{ds} \right). \tag{3.1}$$

(Vgl. auch die Formel (5.2) von [4].) Setzt man diesen Wert von Dx^{ik}/Ds in die Gleichung (2.16) der Bahnen ein, so wird nach einer Kontraktion mit $(\delta_k^i - M_{o^k}^{*i})$ auf Grund von (1.7) die Relation (2.16) in eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + Q_{j^i k}^{*i} \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{3.2}$$

übergehen, wo

$$Q_{j^i k}^{*i} \stackrel{\text{def}}{=} L_{j^i k}^{*i} + g^{rt} (\delta_t^i - M_{o^t}^{*i}) C_{rj|k} \tag{3.3}$$

die Übertragungsparameter der nicht-holonomen Übertragung bedeuten. In der Gleichung (3.2) kommt selbstverständlich nur der in (j, k) symmetrische Teil von $Q_{j^i k}^{*i}$ vor. Aus (3.3) folgt noch unmittelbar, dass $Q_{j^i k}^{*i}$ dieselbe Transformationsformel hat, wie $L_{j^i k}^{*i}$, da die anderen Grössen in (3.3) Tensoren sind (vgl. [4] § 3).

Nun können wir die nicht-holonome Übertragung eines vom Linienelement (x^i, v^i) abhängigen Vektors $\xi^i(x, v)$ d. h. das nicht-holonome invariante Differential von ξ^i definieren.

DEFINITION 2. *Das nicht-holonome invariante Differential eines Vektors $\xi^i(x, v)$ ist:*

$$\tilde{D} \xi^i \stackrel{\text{def}}{=} d \xi^i + M_{r^i k}^{*i} \xi^r \tilde{\omega}^k(d) + Q_{r^i k}^{*i} \xi^r dx^k, \tag{3.4}$$

wo die Grössen $\tilde{\omega}^k$ in impliziter Form durch die Relation

$$\tilde{\omega}^k(d) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{D} l^k \tag{3.4a}$$

bestimmt sind.

Um den expliziten Wert von $\tilde{\omega}^k(d)$ zu erhalten, setzen wir in (3.4) $\xi^i = l^i$, so wird:

$$\tilde{\omega}^k(d) (\delta_k^i - M_{o^k}^{*i}) = d l^i + Q_{o^k}^{*i} dx^k \tag{3.5}$$

und nach einer Kontraktion mit $(\delta_i^j + M_{\sigma^j}^* \delta_i^j)$ wird nach (1.7):

$$\tilde{\omega}^j(d) = (\delta_i^j + M_{\sigma^j}^* \delta_i^j) (d l^i + Q_{\sigma^k}^* d x^k). \quad (3.6)$$

Die Relationen (3.4) und (3.6) bestimmen das nicht-holonome invariante Differential.

Die durch (3.4) und (3.6) bestimmte Übertragung kann als eine affine Übertragung im \mathcal{L}_n -Raum aufgefasst werden (vgl. [7] Gleichung (1.10)). Die Bahnkurven

$$\frac{\tilde{\omega}^k(d)}{ds} = 0 \quad (3.7)$$

dieser Übertragung, für die $G_{(q)}(x, x') = 0$ in einem Anfangslinienelement ist, sind auf Grund des Satzes 1 eben mit den Bahnen (3.2) der nicht-holonomen Geometrie identisch. Aus der Form der Differentialgleichung (3.2) folgt noch, dass bezüglich der affinen Übertragung (3.4) der Parameter s , der die Bogenlänge bedeutet, ein affiner Parameter ist (vgl. [7], Gleichung (2.5)).

Ein wichtiges Problem der nicht-holonomen Räume ist die Bestimmung derjenigen Bedingungen, die notwendig und hinreichend sind dafür, dass die Bahnkurven des nicht-holonomen Raumes mit den Extremalen des durch die Grundfunktion (1.3a) und durch die Bindungsgleichungen (2.9) definierten Lagrangeschen Problems übereinstimmen. Führt man die Bezeichnung

$$H(x, x', \lambda_{(\mu)}(x, x')) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, x') + \lambda_{(\mu)} A_{(\mu)i}^* x'^i \quad (3.8)$$

ein, so können die Extremalen bekanntlich aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial H}{\partial x'^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0 \quad (3.9)$$

bestimmt werden (vgl. etwa [5] § 4). Die Bedingung (2.9) ist übrigens mit (2.1) identisch, falls in der Formel (2.4)

$$\text{Det } |c_{\mu\nu}| \neq 0$$

ist. Diese Relation wollen wir aber immer bedingen.

Wir berechnen erstens

$$Q_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial x'^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k}. \quad (3.10)$$

Da der Parameter die Bogenlänge ist, hat man längs $x^i = x^i(s)$

$$F(x, x') \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ij}(x, x') x'^i x'^j} = 1, \quad l^i = x'^i.$$

Auf Grund der Definition von ϱ_k folgt unmittelbar:

$$\varrho_k = \frac{d}{ds} (l_k + A_{ook}) - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} x'^i x'^j. \quad (3.11)$$

Aus den Relationen (1.5 b) und (1.5 c) kann die Relation

$$\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} x'^i x'^j = (L_{ijk}^* + A_{ijr} I_t \sigma_o^t k + A_{ijr} \Gamma_o^{*r} k) x'^i x'^j$$

leicht verifiziert werden; beachten wir noch die Formel

$$\frac{d}{ds} (l_k + A_{ook}) = \frac{D(l_k + A_{ook})}{Ds} + L_{ko}^{*r} (l_r + A_{oor}) + M_{kt}^{*r} (l_r + A_{oor}) \frac{Dl^t}{Ds},$$

so bekommt man aus der Gleichung (3.11)

$$\varrho_k \equiv g_{ij} \frac{Dx'^i}{Ds} (\delta_k^j + M_k^{*oj} + A_{oor} M_k^{*rj}) + \frac{DA_{ook}}{Ds} + 2L_{[o|o|k]}^* + A_{oor} (I_t \sigma_o^t k + \Gamma_o^{*r} k - L_o^{*r} k) \quad (3.12)$$

(für die ausführlichen Rechnungen vgl. [4] S. 98–100).

Nun kehren wir zur Gleichung (3.9) zurück. Auf Grund von (2.9)⁽¹⁾ bekommt man aus (3.9) die Gleichung:

$$\varrho_i + \frac{d}{ds} \lambda_{(\mu)} \left(\frac{\partial A_{(\mu)j}^*}{\partial x'^i} x'^j + A_{(\mu)i}^* \right) - \lambda_{(\mu)} \frac{\partial A_{(\mu)j}^*}{\partial x^i} x'^j = 0. \quad (3.13)$$

Jetzt wollen wir noch die Übertragungsparameter des Raumes \mathfrak{L}_n durch die Annahme

$$M_{ojk}^* = 0 \quad (3.14)$$

spezialisieren. Auf Grund der Gleichung (3.14), (2.3) und (2.4) wird dann im Hinblick auf die Homogenität erster Dimension der $G_{(\mu)}(x, x')$ in den x'' :

$$\frac{\partial A_{(\mu)j}^*}{\partial x''^i} x''^j \equiv 0$$

bestehen, und hiernach wird (3.13) in die Gleichung

$$\varrho_i + \frac{d\lambda_{(\mu)}}{ds} A_{(\mu)i}^* + \lambda_{(\mu)} \left\{ \left(\frac{\partial A_{(\mu)t}^*}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{(\mu)j}^*}{\partial x^i} \right) x'^j + \frac{\partial A_{(\mu)t}^*}{\partial x''^i} x''^j \right\} = 0 \quad (3.15)$$

übergehen.

Die Formel (3.12) von ϱ_k wird aber wegen (3.14) eine einfachere Form haben. Aus (1.6) und (3.14) folgt nämlich, dass

$$A_{ook} = 0$$

(¹) Aus (2.9) folgt nämlich — wie das schon bemerkt wurde — die Relation (2.1).

ist, da μ_{ijk} in i, j schiefsymmetrisch ist. Somit bekommt man aus (3.12)

$$\varrho_k = g_{ij} \frac{Dx'^i}{Ds} (\delta_k^j + M_k^{*oj}) + 2L_{[o|o|k]}^* \quad (3.12^*)$$

Aus der Gleichung (3.15) kann jetzt $d\lambda_{(\mu)}/ds$ leicht eliminiert werden. Nach einer Kontraktion mit $g^{ik} A_{(\nu)k}^*$ wird auf Grund von (2.5)

$$\frac{d\lambda_{(\nu)}}{ds} = -\varrho_i A_{(\nu)}^{*i} - \lambda_{(\mu)} \theta_{(\mu\nu)}$$

mit
$$\theta_{(\mu\nu)} \stackrel{\text{def}}{=} A_{(\nu)}^{*t} \left\{ \left(\frac{\partial A_{(\mu)t}^*}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{(\mu)j}^*}{\partial x^t} \right) x'^j + \frac{\partial A_{(\mu)t}^*}{\partial x'^j} x''^j \right\}.$$

Substituieren wir nun $d\lambda_{(\nu)}/ds$ in (3.15), so wird nach (2.7):

$$(\delta_i^t - C_i^t) \left\{ \varrho_t + \lambda_{(\varrho)} \left[\left(\frac{\partial A_{(\varrho)t}^*}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{(\varrho)j}^*}{\partial x^t} \right) x'^j + \frac{\partial A_{(\varrho)t}^*}{\partial x'^j} x''^j \right] \right\} = 0. \quad (3.16)$$

Diese Gleichung ist im wesentlichen das Analogon der Gleichung (4.5) von [5]. In dem von H. Rund betrachteten Fall war aber

$$\varrho_t = g_{it} \frac{Dx'^t}{Ds}, \quad (3.17)$$

und somit konnte er $C_i^t \varrho_t$ in geeigneter Weise verändern. In unserem \mathcal{Q}_n -Raum ist aber im allgemeinen (3.17) nicht gültig. In einem speziellen Fall wollen wir aber hinreichende Bedingungen angeben dafür, dass (3.16) eben mit den Bahnen übereinstimme. Dafür nehmen wir an, dass längs einer Kurve $x^i = x^i(s)$:

$$\left(\frac{\partial A_{(\varrho)t}^*}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{(\varrho)j}^*}{\partial x^t} \right) x'^j + \frac{\partial A_{(\varrho)t}^*}{\partial x'^j} x''^j = 0 \quad (3.18)$$

besteht. Aus (3.16) wird dann nach (3.12*)

$$\frac{Dx'^r}{Ds} (g_{ir} - C_{ir} + M_{ior}^* - C_i^t M_{ior}^*) + 2(\delta_i^t - C_i^t) L_{[o|o|i]}^* = 0. \quad (3.19)$$

Es kann nun unmittelbar gezeigt werden, dass

$$\frac{Dx'^r}{Ds} (g_{ir} - C_{ir}) = 0 \quad (3.20)$$

eben die Gleichung der Bahnen des nicht-holonomen Raumes ist. Nach (2.7) und (2.9) ist nämlich

$$\frac{Dx'^r}{Ds} C_{ir} \equiv \frac{Dx'^r}{Ds} A_{(\omega)r}^* A_{(\omega)i}^* = -\frac{DA_{(\omega)r}^*}{Ds} A_{(\omega)i}^* x'^r.$$

Aus (3.20) wird also nach einer Kontraktion mit g^{ij}

$$\frac{Dx'^j}{Ds} + g^{ij} A_{(\omega)i}^* \frac{DA_{(\omega)r}^*}{Ds} x'^r = 0.$$

Diese Gleichung ist aber mit der Gleichung (2.18) der Bahnen identisch (vgl. auch (2.8) und (2.17)). Ist also (3.19) die Gleichung der Bahnen, so muss

$$\frac{Dx'^r}{Ds} (\delta_i^j - C_i^j) M_{jor}^* + 2(\delta_i^j - C_i^j) L_{[\sigma_i|\sigma_j]}^* = 0 \tag{3.21}$$

längs der Bahnkurve $x^i(s)$ bestehen. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

SATZ 2. *Besteht in einem \mathcal{L}_n -Raum (3.14), und sind längs einer Extremalkurve $x^i = x^i(s)$ (3.18) und (3.21) erfüllt, so ist die Extremalkurve gleichzeitig eine Bahnkurve des nicht-holonomen \mathcal{L}_n -Raumes.*

Bemerkung: Die Gleichung (3.21) ist immer erfüllt, falls $M_{jor}^* = 0$, und $\sigma_{o/k} = 0$ ist. Das folgt leicht aus (1.5 b), da Γ_{jik}^* bzw. σ_{jki} in (j, k) symmetrisch, bzw. schiefsymmetrisch sind.

Ein Raum, in dem

$$M_{i^*ok}^* = 0, \quad M_{oik}^* = 0, \quad \sigma_{oik} = 0$$

erfüllt sind, kann am einfachsten dadurch realisiert werden, dass man in einem Finslerraum mit dem metrischen Grundtensor

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^j}$$

die Übertragung der Vektoren durch die Übertragungsparameter (1.5 a) und (1.5 b) definiert und für μ_{ijk} und σ_{ijk} die Bedingungen

$$\mu_{oij} = 0, \quad \sigma_{oij} = 0$$

stellt. Die Gleichung (3.21) ist jetzt eine Identität, und (3.18) bedeutet, dass für die Tangentenvektoren x'^i die Bindungen schwach-holonom sind (vgl. [5] Formel (4.6)).

Wir werden jetzt die Formel (3.4) des nicht-holonomen invarianten Differentials in einer anderen Form bestimmen. Schreiben wir in (3.4)

$$d\xi^i = \partial_k \xi^i dx^k + \xi^i|_k dl^k$$

und substituieren wir dann dl^k aus (3.5), so wird:

$$\tilde{D}\xi^i = \xi^i_{,k} dx^k + \xi^i_{;ik} \tilde{\omega}^k(d), \quad (3.22)$$

wo $\xi^i_{,k}$ durch

$$\xi^i_{,k} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i_{||r} Q_{\sigma}^{*r}{}_{k} + Q_{\tau k}^{*i} \xi^{\tau} \quad (3.23)$$

und $\xi^i_{;ik}$ durch (1.4) bestimmt ist. Die Formel (3.23) ergibt die nicht-holonome kovariante Ableitung des Vektorfeldes $\xi^i(x, v)$.

Wir kehren nun zur Untersuchung der Bahnen zurück. Wir beweisen den folgenden

SATZ 3. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + Q_{j k}^{*i} \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (3.24)$$

kann dann und nur dann eine Lösungskurve $x^i(t)$ haben, die die Bedingung

$$g_{ik} \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \text{konst.} \quad (3.25)$$

befriedigt, falls längs $x^i(t)$ besteht.

$$A_{(Q)o}^*|_o A_{(Q)o}^* = 0 \quad (3.26)$$

Bemerkungen zu Satz 3. Das Analogon des Satzes im Riemannschen Raum befindet sich in einer Bemerkung von J. L. Synge (vgl. [6] Gleichungen (3.6)–(3.63)). Der Parameter t in unserer Gleichung (3.24) bedeutet einen beliebigen Parameter; ist $t=s$, so ist die durch (3.24) bestimmte Kurve nach (3.2) eine Bahn der nicht-holonomen Geometrie falls noch (2.1) besteht. Die Bedingung (3.26), die wegen

$$l^i = \frac{1}{F} \dot{x}^i, \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (3.27)$$

von der Wahl des Parameters unabhängig ist, ist längs einer Bahn B der nicht-holonomen Geometrie befriedigt. Längs B ist nämlich nach (2.1), (2.3) und (2.4) die Relation $A_{(Q)o}^* = 0$ erfüllt.

Beweis des Satzes 3. Da das invariante Differential des metrischen Grundtensors g_{ik} identisch verschwindet (vgl. §1), so bekommt man

$$\frac{d}{dt} (g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k) = \frac{D}{Dt} (g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k) = 2 g_{ik} \frac{D \dot{x}^i}{Dt} \dot{x}^k, \quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{dt}. \quad (3.28)$$

Aus den Formeln (1.1) und (1.1a) bekommt man nach der Substitution

$$\xi^i = \dot{x}^i, \quad l^i = \frac{\dot{x}^i}{F}$$

wegen $M_{ko}^{*i} = 0$, und nach

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dF^{-1}}{dt} \dot{x}^j + \frac{1}{F} \frac{d^2 x^j}{dt^2}$$

die Relation
$$\frac{D\dot{x}^i}{Dt} = (\delta_h^i + M_{oh}^{*i}) \left(\frac{d^2 x^h}{dt^2} + L_{j^h k}^{*h} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right). \tag{3.29}$$

Beachten wir jetzt für $d^2 x^h/dt^2$ (3.24), so wird nach (3.3) und (1.7):

$$\frac{D\dot{x}^i}{Dt} = -g^{ir} C_{rj|k} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}.$$

Aus (3.28) wird dann nach (3.27) und (1.11)

$$\frac{d}{dt} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right) = -2 F^3 C_{oo|o}. \tag{3.30}$$

Nach (2.7) ist aber
$$C_{oo|o} = 2 A_{(Q)o}^* |_{o} A_{(Q)o}^*$$

und das beweist nach (3.26) und (3.30) eben den Satz 3.

§ 4. Krümmung des Raumes längs der Bahnen

Wir betrachten die Übertragung (3.4) als eine affine Übertragung im \mathcal{L}_n -Raum. Die Krümmung können wir mit der Cartanschen Methode (vgl. [1] und [7]) durch Bildung der Formel

$$(\tilde{\Delta} \tilde{D} - \tilde{D} \tilde{\Delta}) \xi^i$$

bestimmen; wir wollen aber die Krümmung nur längs der Bahnen der nicht-holonomen Geometrie betrachten, d. h. wir werden bei der Berechnung der Krümmung die Formel (3.7) bedingen.

Aus der Formel (3.4) bekommt man unter Beachtung von (3.7) die folgende Relation:

$$(\tilde{\Delta} \tilde{D} - \tilde{D} \tilde{\Delta}) \xi^i = \frac{1}{2} \tilde{R}_{jkt}^i \xi^j [dx^k dx^t] + M_{jr}^{*i} \xi^j (\tilde{\omega}^r(d))', \tag{4.1}$$

wo
$$\frac{1}{2} \tilde{R}_{jkm}^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{[m} Q_{|j|k]}^{*i} - Q_{o}^{*t} {}_{[m} Q_{|j|k]}^{*i} |_{t} + Q_j^{*t} {}_{[k} Q_{|t|m]}^{*i} \tag{4.2}$$

den nicht-holonomen Hauptkrümmungstensor, und $(\tilde{\omega}^r(d))'$ wegen (3.7) den Ausdruck

$$(\tilde{\omega}^r(d))' \stackrel{\text{def}}{=} \delta \tilde{\omega}^r(d) - d \tilde{\omega}^r(d) = (\delta_t^r + M_{ot}^{*r}) (\partial_{[m} Q_{|o|k]}^{*t} - Q_o^{*p} {}_{[m} Q_{|o|k]}^{*t} |_{p}) [dx^k dx^m] \tag{4.3}$$

bedeutet.

Wir werden jetzt beweisen, dass längs der Bahnen (3.7), d. h. längs (3.2)

$$\frac{1}{2} \tilde{R}_{o km}^t = \partial_{[m} Q_{|o|k]}^{*t} - Q_o^{*p} {}_{[m} Q_{|o|k]}^{*t} |_{p} \tag{4.4}$$

besteht. Aus der Gleichung (1.11) hat man:

$$\partial_m v^j = -v^j (L_{oom}^* + A_{oor} L_o^* r_m). \quad (4.5)$$

Aus der Formel (3.3) ist $L_{i^j m}^*$ durch $Q_{i^j m}^*$ und $C_i^j|_m$ ausdrückbar. Beachtet man die Relation

$$M_{oom}^* = A_{oor} (\delta_m^r - M_o^* r_m), \quad (4.6)$$

die aus (1.6) wegen der schiefen Symmetrie von μ_{ijm} in (i, j) unmittelbar folgt, so erhält man aus (4.5), wenn L_{oom}^* bzw. $L_o^* r_m$ mittels (3.3) durch $Q_{j^r m}^*$ ausgedrückt wird, die Formel:

$$\partial_m v^j = -v^j (Q_{oom}^* + A_{oor} Q_o^* r_m - C_{oo}|_m). \quad (4.7)$$

Nach unserem Satz 1 ist aber auf Grund der Definitionsformel (2.7) längs einer Bahn

$$C_{oo}|_m = 0;$$

da aber, wie wir das bewiesen haben, die durch (2.16) bestimmten Kurven nach (3.1) mit (3.2) identisch sind, folgt aus (4.7), dass längs (3.2)

$$\partial_m v^j = -v^j (Q_{oom}^* + A_{oor} Q_o^* r_m) \quad (4.8)$$

ist. Nach einer Kontraktion mit v^j der Formel (4.2) bekommt man

$$\frac{1}{2} R_{okm}^i = \partial_{[m} Q_{|o|k]}^* i - Q_{j[k}^* i \partial_m] v^j - Q_o^* i_{[m} Q_{|o|k]}^* i|_k + Q_o^* i_{[m} Q_{|j|k]}^* i v^j|_k + Q_o^* i_{[k} Q_{|i|m]}^* i.$$

Unter Beachtung von (4.8) und (1.10) bekommt man eben die Formel (4.4).

Nach (4.3) und (4.4) können wir (4.1) in der Form

$$(\tilde{\Delta} \tilde{D} - \tilde{D} \tilde{\Delta}) \xi^i = \frac{1}{2} \tilde{R}_{jkm}^* i \xi^j [d x^k d x^m] \quad (4.9)$$

bestimmen, wo $\tilde{R}_{jkm}^* i \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_{jkm}^* i + M_{j^i t}^* (\delta_r^t + M_o^* r_r) \tilde{R}_o^* r_{km}$ (4.10)

den vollständigen nicht-holonomen Krümmungstensor bedeutet.

Die Torsion des nicht-holonomen Raumes bekommt man auf Grund von (3.7) längs der Bahnen in der Form:

$$(\tilde{\Delta} \tilde{D} - \tilde{D} \tilde{\Delta}) x^i = q_{jk}^i [d x^j d x^k],$$

wo $q_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} Q_{[j k]}^* i$ (4.11)

der nicht-holonome Tensionstensor ist. Dieser Tensor kommt in den Bianchischen Identitäten des nicht-holonomen Hauptkrümmungstensors vor, wie wir im folgenden sehen werden.

Wir wollen noch zum Schluss dieses Paragraphen die Bianchischen Identitäten für den nicht-holonomen Hauptkrümmungstensor bestimmen. Durch unmittelbare Berechnung, auf Grund der Formel (4.2) des nicht-holonomen Hauptkrümmungstensors kann man die erste Gruppe der Identitäten von $\tilde{R}_{i'kl}^j$ bestimmen. Sie ist:

$$\frac{1}{2} \tilde{R}_{j'km}^i - q_{j'k,m}^i + 2 q_{i'j}^i q_{k'm}^i + \{\text{zykl.}\}_{jkm} = 0, \tag{4.12}$$

wo das Symbol $\{\text{zykl.}\}_{jkm}$ die zyklische Permutation des vorigen Ausdrucks auf die Indizes (j, k, m) bedeutet.

Vor der Bestimmung der Bianchischen Identitäten, werden wir zwei Vertauschungsformeln für einen kovarianten Vektor ξ_i angeben. Die Identitäten von Ricci sind:

$$2 \xi_{i,lj,k} = -\xi_s \tilde{R}_{i'jk}^s - \xi_{i||s} \tilde{R}_{o'sk} - 2 \xi_{i,s} q_{j'k}^s. \tag{4.13}$$

Diese Formel erhält man auf Grund von (4.2) und (4.4) wieder durch eine unmittelbare Rechnung. Die zweite Vertauschungsformel ist:

$$\xi_{i,j||k} - \xi_{i||k,j} = -\xi_r Q_{i'j||k}^{*r} - \xi_{i||r} Q_{i'r||k}^{*r} l^i. \tag{4.14}$$

Bei der Herleitung von (4.14) müssen (1.10) und die leicht beweisbare Relation $F|_k = 0$ (vgl. [4] Formel (2.29)), d. h.

$$\partial_k F = F|_r L^* o^r_k = F(l_r + A_{oor}) L^* o^r_k$$

beachtet werden, die auf Grund von (4.6) längs einer Bahn (3.2) die Form

$$\partial_k F = F(l_t + A_{oot}) Q_{o^t k}^{*t} \tag{4.15}$$

hat. (Vgl. die Rechnungen, die von (4.5) zur Formel (4.8) führten.) Die Formel (4.14) ist also nur längs der Bahnen gültig.

Jetzt können wir schon die Bianchischen Identitäten bestimmen. Die Formel

$$\xi_{i,lj,k} + \{\text{zykl.}\}_{jki} = \xi_{i,j||k,l} + \{\text{zykl.}\}_{jkl} \tag{4.16}$$

ist eine Identität. Differenziert man die Formel (4.13) kovariant⁽¹⁾ nach x^l , so erhält man die Grössen $\xi_{i,lj,q}, r$. Substituieren wir diese Grössen in (4.16), eliminieren wir dann $\xi_{i,j||k,l}$ mit Hilfe der Identitäten von Ricci, beachten wir noch (4.14) und (4.12), so bekommen wir eine Formel, in der nur ξ_s und $\xi_{i||s}$ vorkommen. Diese Formel hat die Form:

$$\xi_s T_{i'jkl}^s + \xi_{i||s} U^s_{jkl} = 0.$$

⁽¹⁾ Es soll auf beiden Seiten von (4.13) die durch (3.23) bestimmte Operation gebildet werden.

Da ξ_s einen beliebigen Vektor bedeuten kann, muss $T_i^s{}_{jkl} = 0$ bestehen. Explizit ausgerechnet ergibt das die Bianchischen Identitäten

$$\tilde{R}_{i^s jk,l} + Q_{i^s j^s}^* \tilde{R}_{o^t kl} + 2q_{k^t l} \tilde{R}_{i^s jt} + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0. \quad (4.17)$$

Die Relation $U^s{}_{jkl} = 0$ gibt keine neue Relation, da die Berechnung von $U^s{}_{jkl}$ wegen $l^i{}_{,k} = 0$ die Formel

$$T_o^s{}_{jkl} = U^s{}_{jkl}$$

ergibt. Wir bemerken noch, dass die Formel

$$l^i{}_{,k} = 0 \quad (4.18)$$

nur längs der Bahnen gültig ist, wie man nach (4.15) und (1.10) leicht beweisen kann.

§ 5. Gleichung der nicht-holonomen Abweichung

Wir nehmen an, dass C und \bar{C} zwei unendlich benachbarte Bahnen bedeuten, die einen gemeinsamen Punkt \mathfrak{D} haben. Die Bogenlänge vom Punkte \mathfrak{D} aus gerechnet, auf C , bzw. auf \bar{C} wollen wir mit s , bzw. σ bezeichnen. Die Gleichungen dieser Kurven seien:

$$C: x^i = x^i(s), \quad \bar{C}: x^i = \psi^i(\sigma).$$

Die Punkte von C und \bar{C} seien durch die Relationen

$$\psi^i(\sigma) = x^i(s) + \xi^i(s), \quad (5.1)$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 + \lambda(s) \quad (5.2)$$

zueinander geordnet, wo $\xi^i(s)$ einen infinitesimalen Vektor, $\lambda(s)$ aber einen infinitesimalen Skalar bedeutet, deren erste und zweite Ableitungen auch von erster Ordnung infinitesimal sind, wie $\xi^i(s)$ bzw. $\lambda(s)$. Die Richtung der Linienelemente längs C soll mit der Tangentenrichtung von C übereinstimmen. Analytisch ist das durch

$$l^i(x, v) = \frac{dx^i}{ds} \quad (5.3)$$

ausgedrückt.

Die Gleichung von C bzw. \bar{C} ist nach (3.2):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + Q_{j^i k}^* \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} + Q_{j^i k}^* \left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma} \right) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{d\psi^k}{d\sigma} = 0. \quad (5.4)$$

Nach (5.1) und (5.2) hat man im Hinblick auf (3.7):

$$\frac{d\psi^i}{d\sigma} = \left(\frac{dx^i}{ds} + \frac{\tilde{D}\xi^i}{Ds} - Q_{rk}^{*i} \xi^r \frac{dx^k}{ds} \right) (1 - \lambda). \tag{5.5}$$

Differenzieren wir diese Gleichung wieder nach σ unter Beachtung von (5.1), (5.2) und (5.4), so wird nach Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in ξ^i, λ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2} = & \frac{d^2x^i}{ds^2} (1 - 2\lambda) - \frac{dx^i}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\tilde{D}^2\xi^i}{Ds^2} - 2Q_{rk}^{*i} \frac{\tilde{D}\xi^r}{Ds} \frac{dx^k}{ds} \\ & - (\partial_m Q_{rk}^{*i} - Q_{rk|l}^{*i} Q_{om}^{*l} - Q_{tk}^{*i} Q_{rm}^{*t} - Q_{rt}^{*i} Q_{km}^{*t}) \xi^r \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{dx}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Substituieren wir jetzt (5.5) und (5.6) in die zweite Gleichung von (5.4), beachten wir noch (4.18), (5.1)–(5.3), so bekommt man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in ξ^i, λ :

$$\frac{\tilde{D}^2\xi^i}{Ds^2} - \frac{dx^i}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (Q_{ik|l}^{*i} l^k l^m + 2q_{or}^i) \frac{\tilde{D}\xi^r}{Ds} + (\tilde{R}_{or}^i + 2Q_{ik|l}^{*i} l^k l^m q_{or}^l + 2q_{r,o}^i) \xi^r = 0. \tag{5.7}$$

Die Gleichung (5.7) ist die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung.

Die Formel (5.7) ist eine Verallgemeinerung des von J. L. Synge untersuchten Riemannschen Falles mit linearen Bindungsgleichungen (vgl. [6] Gleichung (6.37)). Das folgt unmittelbar nach unseren Formeln (4.11) und (3.3), wenn wir in (3.3) für die Übertragungsparameter L_{jk}^{*i} die Christoffelklammern zweiter Art $\{^i_{jk}\}$ wählen, und noch annehmen, dass unsere Größen nur von den x^i abhängig sind. In der Gleichung (5.7) entspricht der Koeffizient von ξ^r dem Tensor $F^{r.msn} \lambda^m \lambda^n$ von [6].

Die Wichtigkeit der Gleichung (5.7) besteht von der Seite der Geometrie darin, dass die Nullstellen $\xi^i = 0$ der Lösung $\xi^i = \xi^i(s)$ die zum Punkte \mathfrak{D} konjugierten Punkte bestimmen. Haben die aus dem Punkte \mathfrak{D} ausgehenden Bahnen eine Enveloppe, so ist der zum Punkt \mathfrak{D} konjugierte Punkt derjenige Punkt, in welchem eine durch \mathfrak{D} gehende Bahn die Enveloppe der durch \mathfrak{D} gehenden Bahnen zum erstenmal berührt.

Auch bezüglich der Mechanik spielt die Gleichung (5.7) eine wichtige Rolle. Wir verweisen auf die Arbeit von H. Rund [5] S. 78. Die Lösung $\xi^i(s)$ von (5.7) bestimmt die relative Stabilität der Bahnkurven.

II. TEIL

§ 6. Die Bindungen und die relativen Bahnkurven des Raumes

Nehmen wir an, dass im Raume \mathfrak{L}_n paarweise orthogonale und normierte Vektoren $B_{(\varrho)i}(x, v)$, $\varrho = 1, \dots, m$ vorgegeben sind, für die also

$$g^{ij} B_{(\varrho)i} B_{(\sigma)j} = \delta_{\varrho\sigma} \quad (6.1)$$

besteht. Die $B_{(\varrho)i}$ sollen in den v^i homogen von nullter Dimension sein, und der Rang der Matrix P

$$P \stackrel{\text{def}}{=} (B_{(\varrho)i})$$

soll m sein. Die nicht-holonome $(n-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M_{n-m} wird bezüglich eines Richtungsfeldes $v^i(s)$ durch die Gleichungen

$$B_{(\varrho)i}(x, v) dx^i = 0, \quad \varrho = 1, 2, \dots, m \quad (6.2)$$

bestimmt. Wir wollen noch voraussetzen, dass für ein beliebig vorgegebenes Richtungsfeld $v^i(s)$ solche Kurven $x^i = x^i(s)$ existieren, die — obgleich das Differentialgleichungssystem (6.2) nicht vollständig integrierbar ist — die Bindungsgleichungen (6.2) befriedigen. Die Richtung $x'^i(s)$ dieser Kurven ist aber im allgemeinen von der durch die $v^i(s)$ bestimmte Richtung verschieden.

Ist speziell $v^i = x'^i$, so geht (6.2) in die Gleichung (2.1) über, wo jetzt

$$G_{(\varrho)}(x, \dot{x}) = B_{(\varrho)i}(x, \dot{x}) \dot{x}^i$$

ist. Im allgemeinen besteht die folgende

DEFINITION 3. Die Kurven $x^i = x^i(s)$ der nicht-holonomen Geometrie sind diejenigen Linien, die bezüglich eines Richtungsfeldes $v^i(s)$ die Bindungsgleichungen (6.2) befriedigen.

Da das Richtungsfeld $v^i(s)$ von dem Richtungsfeld $x'^i = dx^i/ds$ unabhängig ist, sind die Kurven der nicht-holonomen Geometrie nach der Definition 3, und auf Grund der Gleichungen (6.2) dem Fall des Punktraumes mehr ähnlich, als die Kurven des im § 2 durch $v^i = x'^i$ charakterisierten Falles. (Vgl. auch [6] § 2.)

Wir geben jetzt die Definition der relativen Bahnkurven der nicht-holonomen Geometrie an.

DEFINITION 4. Die relativen Bahnkurven $x^i = x^i(s)$ der nicht-holonomen Geometrie bezüglich eines vorgegebenen Richtungsfeldes $v^i(s)$ sind diejenigen Linien, die die Bindungsgleichungen (6.2) und ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$\frac{D^2 x^i}{D s^2} = \pi_{(o)}(x, x') g^{ir} B_{(o)r} \tag{6.3}$$

befriedigen. (Für $\pi_{(o)}$ vgl. die Formel (6.4) oder (6.4*.)

Dabei bedeutet das Symbol „ D “ das durch (1.1) bestimmte invariante Differential und der Parameter s die Bogenlänge. Ist $v^i(s) = x'^i(s)$, so geht unsere Definition 5 in die vorige Definition 1. über.

Jetzt wollen wir die in der Formel (6.3) vorkommenden Grössen $\pi_{(o)}$ bestimmen. Differenzieren wir die Relation (6.2) nach der Bogenlänge s , so wird wegen

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{Dx^i}{Ds}$$

die Relation
$$\frac{D^2 x^i}{Ds^2} B_{(o)i} + \left(B_{(o)l;k} \frac{dx^k}{ds} + B_{(o)i;k} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{ds} \right) \frac{dx^i}{ds} = 0$$

bestehen, wo $\dot{\omega}^k$ durch (1.1 a) bestimmt ist. (Ist speziell $l^k = x'^k$, so geht $\dot{\omega}^k$ in die durch (1.5) angegebene Formel von ω^k über.) Setzen wir in diese Formel den Wert von $D^2 x^i / Ds^2$ von (6.3) ein, beachten wir dann noch die Relation (6.1), so wird

$$\pi_{(o)}(x, x') = - \left(B_{(o)l;k} \frac{dx^k}{ds} + B_{(o)l;k} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{ds} \right) \frac{dx^l}{ds}, \tag{6.4}$$

die wegen (1.2) auch in der einfacheren Form

$$\pi_{(o)}(x, x') = - \frac{D B_{(o)i}}{Ds} \frac{dx^i}{ds} \tag{6.4*}$$

bestimmt werden kann. Offenbar sind auf Grund der Formeln (6.4) und (6.4*) die Grössen $\pi_{(o)}(x, x')$ nur längs gewissen vorgegebenen Linienelementfolgen $v^i(s)$ bestimmt.

Da in den Gleichungen (6.3) die $v^i(s)$ angegeben sind, bestimmen diese Gleichungen im Hinblick auf die Formeln (6.4) ein Differentialgleichungssystem für $x^i(s)$.

Die relativen Bahnkurven der nicht-holonomen Geometrie entsprechen den quasiautoparallelen Linien des \mathcal{L}_n -Raumes (vgl. [4] §5). Unter gewissen Bedingungen sind die relativen Bahnkurven mit gewissen speziellen quasiautoparallelen Kurven identisch. Es besteht der folgende

SATZ 4. Ist längs einer gewissen quasiautoparallelen Kurve $x^i = x^i(s)$

$$\left(C_{rj|k} \frac{dx^k}{ds} + C_{rj;k} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad B_{(o)i}(x, v) x'^i = 0, \tag{6.5}$$

wo der Tensor

$$C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} B_{(o)i} B_{(o)j} \tag{6.6}$$

bedeutet, so ist diese quasiautoparallele Kurve $x^i(s)$ gleichzeitig eine relative Bahn der durch (6.2) charakterisierten nicht-holonomen Geometrie⁽¹⁾.

Beweis. Die Gleichung der Bahnen ist nach den Formeln (6.3) und (6.4) in expliziter Form durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{D^2 x^i}{D s^2} + g^{ir} B_{(or)} \left(B_{(oj)k} \frac{d x^k}{d s} + B_{(oj)k} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{d s} \right) \frac{d x^j}{d s} = 0 \quad (6.7)$$

bestimmt. Da längs der Bahnen (6.2) gültig ist, bekommt man aus (6.6), dass längs einer Bahn

$$C_{rj|k} \frac{d x^j}{d s} = B_{(or)} B_{(oj)k} \frac{d x^j}{d s}, \quad C_{rj;k} \frac{d x^j}{d s} = B_{(or)} B_{(oj)k} \frac{d x^j}{d s}$$

besteht. Aus (6.7) wird somit

$$\frac{D^2 x^i}{D s^2} + g^{ir} \left(C_{rj|k} \frac{d x^k}{d s} + C_{rj;k} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{d s} \right) \frac{d x^j}{d s} = 0. \quad (6.8)$$

Die Formel (6.8) mit den Bindungsgleichungen (6.2) wollen wir als die endgültige Formel der relativen Bahnkurven betrachten.

Ist nun $x^i(s)$ eine quasiautoparallele Kurve, für die also

$$\frac{D^2 x^i}{D s^2} \equiv \frac{d^2 x^i}{d s^2} + M_{j^i}^* \frac{d x^j}{d s} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{d s} + L_{j^i k}^* \frac{d x^j}{d s} \frac{d x^k}{d s} = 0 \quad (6.9)$$

besteht, so folgt aus (6.8), dass diese quasiautoparallele Kurve dann und nur dann gleichzeitig eine relative Bahn sein kann, wenn längs $x^i(s)$ auch (6.5) gültig ist. Das beweist aber eben den Satz 4.

Das Analogon des Satzes 1 kann man auf Grund von (6.3), (6.4*) und (6.2) ebenso beweisen, wie das in §2 durchgeführt wurde. *Es ist also längs der Kurven (6.3) $B_{(oi)} x'^i = \text{konst.}$*

§ 7. Die allgemeine nicht-holonome Übertragung

Ebenso wie im §3 können wir auch in dieser allgemeineren nicht-holonomen Geometrie von der Gleichung der Bahnkurven eine sog. nicht-holonome Übertragung ableiten. Doch entsteht in diesem Falle dem Paragraphen 3 gegenüber ein wesentlicher prinzipieller Unterschied. Durch die Gleichung (3.1) war nämlich $\omega^k(d)$ allein mit Hilfe der Grössen $x^i(s)$ bzw. durch deren Ableitungen bestimmt, während $\dot{\omega}^k(d)$ in der Gleichung (6.8) der relativen Bahnen ausser den x^i , $d x^i$ auch von v^i und $d v^i$ abhängig ist. Die explizite Formel von $\dot{\omega}^k(d)$ ist durch (1.1a) angegeben, wo jetzt

¹ Bei diesem Satz müssen wir selbstverständlich bedingen, dass die Bindungen derart beschaffen sind, dass eine Schar von nicht-holonomen Unterräumen existiert, die quasi-autoparallele Kurven enthält.

$$l^s = \frac{1}{F(x, v)} v^s$$

bedeutet. Das hat zur Folge, dass sich jetzt nicht nur die Übertragungsparameter $L_{j\ k}^{*i}$, sondern auch die $M_{j\ k}^{*i}$ verändern werden.

Die Gleichung (6.8) der relativen Bahnkurven können wir auf Grund der Relation $Dx^i = dx^i$ und nach der Formel (1.1) in der Form:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + Q_{j\ k}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + N_{j\ k}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{\dot{\omega}^k(d)}{ds} = 0 \tag{7.1}$$

bestimmen, wo

$$Q_{j\ k}^i \stackrel{\text{def}}{=} L_{j\ k}^{*i} + C_{j|k}^i, \tag{7.2}$$

$$N_{j\ k}^i \stackrel{\text{def}}{=} M_{j\ k}^{*i} + C_{j;k}^i \tag{7.3}$$

bedeuten (wegen (1.8) und (1.9) ist nämlich $g^{ij}|_k = 0, g^{ij};_k = 0$). Die Grössen $Q_{j\ k}^i$ und $N_{j\ k}^i$ sind die Übertragungsparameter der nicht-holonomen Geometrie. Die nicht-holonome Übertragung selbst ist durch die Formel

$$\hat{D} \xi^i \stackrel{\text{def}}{=} d \xi^i + Q_{j\ k}^i \xi^j d x^k + N_{j\ k}^i \xi^j \dot{\omega}^k(d) \tag{7.4}$$

festgelegt, wo aber $\dot{\omega}^k(d)$ die Grösse Dl^k bedeutet. Offenbar ergibt (7.4) die Gleichung (7.1) der relativen Bahnen, falls in (7.4) $\xi^i = dx^i/ds$ gesetzt wird.

Das invariante Differential welches durch (7.4) bestimmt ist, kann noch nicht als eine spezielle affine Übertragung betrachtet werden, da in der Formel (7.4) $\dot{\omega}^k(d)$ nicht $\hat{D}l^k$ bedeutet, d. h. $\hat{D} \xi^i$ nur mit Hilfe des metrischen invarianten Differentials „ D “ von l^i bestimmt ist. Um aus der Formel (7.4) das invariante Differential einer speziellen affinen Übertragung zu bekommen, muss man $\dot{\omega}^k(d)$ mit Hilfe von $\hat{D}l^k = \dot{\omega}^k(d)$ ausdrücken.

Aus (7.4) bekommt man für $\xi^i = l^i$:

$$\hat{D}l^i \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\omega}^i(d) = dl^i + Q_{o\ k}^i dx^k + N_{o\ k}^i \dot{\omega}^k(d). \tag{7.5}$$

Auf Grund von (1.1) wird für $\xi^i = l^i$ wegen $Dl^i = \dot{\omega}^i(d)$:

$$dl^i = \dot{\omega}^i(d) (\delta_k^i - M_{o\ k}^{*i}) - L_{o\ k}^{*i} dx^k. \tag{7.5 a}$$

Substituiert man das in (7.5), so wird:

$$\dot{\omega}^i(d) = \dot{\omega}^i(d) (\delta_k^i + N_{o\ k}^i - M_{o\ k}^{*i}) + (Q_{o\ k}^i - L_{o\ k}^{*i}) dx^k. \tag{7.6}$$

(1) Das durch (7.4) bestimmte nicht-holonome invariante Differential ist von dem durch (3.4) definierten verschieden. Eben deshalb bezeichneten wir dies mit „ \hat{D} “.

Betrachten wir jetzt das Gleichungssystem

$$H_i^j (\delta_k^i + N_{o^i k} - M_{o^i k}^*) = \delta_k^j. \quad (7.7)$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass im allgemeinen

$$\text{Det} |\delta_k^i + N_{o^i k} - M_{o^i k}^*| \neq 0 \quad (7.7 a)$$

ist. Nach (7.3) und (6.6) ist nämlich

$$\text{Det} |\delta_k^i + N_{o^i k} - M_{o^i k}^*| = \text{Det} |\delta_k^i + (B_{(Q)}^i B_{(Q)j})_{;k} l^j|.$$

Nun ist

$$T_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} (B_{(Q)}^i B_{(Q)j})_{;k}$$

eine in v^i homogene Funktion von nullter Dimension. Wir können also in $T_{jk}^i(x, v)$ statt der Veränderlichen v^i den Einheitsvektor l^i substituieren, da

$$T_{jk}^i(x, v) \equiv T_{jk}^i(x, l)$$

ist. Es wird aber

$$\text{Det} |\delta_k^i + N_{o^i k} - M_{o^i k}^*| = \text{Det} |\delta_k^i + T_{jk}^i l^j| = 1 + T_{ji}^i l^j + \dots,$$

wo die weiteren Glieder in l^j homogene Funktionen von mindestens zweiter Ordnung sind. (7.7 a) ist also im allgemeinen gültig. Möglicherweise kann auch $T_{jk}^i l^j = 0$ sein, (7.7 a) besteht aber auch in diesem Falle.

(7.7) ist also im allgemeinen auf H_i^j eindeutig lösbar; somit bekommt man aus (7.6) nach einer Kontraktion mit H_i^j :

$$\hat{\omega}^j(d) = H_r^j \hat{\omega}^r(d) - H_r^j (Q_{o^r k} - L_{o^r k}^*) dx^k. \quad (7.8)$$

Setzt man diesen Wert in (7.4) ein, so wird:

$$\hat{D} \xi^i = d \xi^i + (Q_{jk}^i - N_{jt}^i H_r^t (Q_{o^r k} - L_{o^r k}^*)) \xi^j dx^k + H_k^j N_{jr}^i \xi^r \hat{\omega}^k(d). \quad (7.9)$$

(Aus (7.9) bekommt man selbstverständlich eine Identität, falls $\xi^i = l^i$ gesetzt wird. Das kann auf Grund von (7.5 a), (7.8) und (7.7) leicht gezeigt werden.)

Die Formel (7.9) kann schon als Fall einer speziellen affinen Übertragung betrachtet werden, in der die Übertragungsparameter nach (7.2):

$$\hat{Q}_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} Q_{jk}^i - N_{jt}^i H_r^t C_{o^r k}, \quad \hat{N}_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} N_{jr}^i H_k^r \quad (7.10)$$

sind. Die Gleichung (7.9) kann somit in der Form:

$$\hat{D} \xi^i = d \xi^i + \hat{Q}_{jk}^i \xi^j dx^k + \hat{N}_{jk}^i \xi^j \hat{\omega}^k(d) \quad (7.11)$$

dargestellt werden.

Die Gleichung (7.1) der relativen Bahnkurven kann nach (7.8), (7.2) und (7.10) durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \hat{Q}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \hat{N}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} = 0 \tag{7.12}$$

charakterisiert werden. Diese Gleichung drückt aus, dass der Tangentenvektor dx^i/ds einer Bahnkurve in Bezug auf das invariante Differential (7.9) längs der Bahnkurve parallel verschoben ist.

§ 8. Die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung im allgemeinen Fall

Im Paragraphen 5 haben wir die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung unter der Bedingung bestimmt, dass das Linienelementfeld $l^i(s)$ eben mit dem Feld dx^i/ds der Tangentenvektoren übereinstimmt. Wir wollen jetzt — wie wir das im II. Teil durchwegs gemacht haben — annehmen, dass das Richtungsfeld $l^i(s)$ beliebig vorgegeben ist.

Die Gleichung der relativen Bahnkurve C ist durch (7.12) angegeben. Die Gleichung einer zur relativen Bahn C unendlich benachbarten relativen Bahn \bar{C} soll

$$\frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} + \hat{Q}_{jk}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{d\psi^k}{d\sigma} + \hat{N}_{jk}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{d\sigma} = 0 \tag{8.1}$$

sein, wo $\psi^i(\sigma)$ und σ durch (5.1) und (5.2) mit den $x^i(s)$ und s verknüpft sind, während

$$\bar{l}^i(\sigma) = l^i(s) + \eta^i(s) \tag{8.2}$$

bedeutet. (Offenbar kann statt v^i wegen der Homogenität nullter Dimension l^i gesetzt werden.) η^i ist eine von ξ^i und $d\xi^i/ds$ abhängige infinitesimale Grösse, die so gewählt werden soll, dass die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung von tensoriellem Charakter sei. Im Falle $l^i = dx^i/ds$, $\bar{l}^i = d\psi^i/d\sigma$ ist nach (5.5)

$$\eta^i = -l^i \lambda + \frac{\bar{D}\xi^i}{Ds} - Q_{rk}^* \xi^r \frac{dx^k}{ds}. \tag{8.3}$$

λ , ξ^i und η^i und ihre Ableitungen sollen infinitesimale Grössen bedeuten. Für den allgemeinen Fall könnte z. B. die Formel (8.13) gesetzt werden.

Wenn wir in (8.1) ψ^i mittels x^i und ξ^i nach der Formel (5.1) berechnen, und \bar{l}^i , $\hat{\omega}^k(d)/d\sigma$ mittels l^i und $\hat{\omega}^k(d)/ds$ ausdrücken und die Glieder höherer Ordnung in λ , ξ^i und η^i vernachlässigen, so bekommen wir die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung. Auf Grund von (5.1) und (8.2) wird also:

$$\frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} (1 - 2\lambda) - \frac{dx^i}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d^2 \xi^i}{ds^2}, \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{jk}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{d\psi^k}{d\sigma} &= \hat{Q}_{jk}^i(x, l) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} (1 - 2\lambda) \\ &+ 2\hat{Q}_{(j)k}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} + (\partial_r \hat{Q}_{jk}^i \xi^r + \hat{Q}_{jk||r}^i \eta^r) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Vor der Berechnung von $\hat{\omega}^k(d)/d\sigma$ drücken wir $\hat{\omega}^k(d)/ds$ durch \hat{Q}_{jk}^i und \hat{N}_{jk}^i aus. Aus der Formel (7.11) bekommt man für $\xi^i = l^i$

$$\frac{\hat{\omega}^r(d)}{ds} (\delta_r^i - \hat{N}_{o^i}^r) = \frac{dl^i}{ds} + \hat{Q}_{o^i}^r \frac{dx^r}{ds}. \quad (8.6)$$

Da im allgemeinen $\text{Det} |\delta_k^i - \hat{N}_{o^i}^k| \neq 0$ (8.7)

ist, bekommt man aus (8.6) für $\hat{\omega}^k(d)$ die Form:

$$\frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} \equiv K_r^k \left(\frac{dl^r}{ds} + \hat{Q}_{o^i}^r \frac{dx^i}{ds} \right), \quad (8.8)$$

wo der Tensor K_r^k durch das Gleichungssystem:

$$(\delta_r^i - \hat{N}_{o^i}^r) K_i^k = \delta_r^k$$

definiert ist. Wenn (8.7) nicht gültig wäre, so könnte man $\hat{\omega}^k(d)$ durch (7.6) berechnen.

Für $\hat{\omega}^k(d)/d\sigma$ bekommt man

$$\frac{\hat{\omega}^k(d)}{d\sigma} = \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} (1 - \lambda) + \zeta^k, \quad (8.9)$$

wo

$$\begin{aligned} \zeta^k \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\frac{dl^r}{ds} + \hat{Q}_{o^i}^r \frac{dx^i}{ds} \right) (\xi^m \partial_m K_r^k + K_{r||m}^k \eta^m) \\ & + K_r^k \left(\frac{d\eta^r}{ds} + \hat{Q}_{o^i}^r \frac{d\xi^i}{ds} + \xi^m \partial_m \hat{Q}_{o^i}^r \frac{dx^i}{ds} + \hat{Q}_{o^i||m}^r \eta^m \frac{dx^i}{ds} \right) \end{aligned} \quad (8.9 \text{ a})$$

bedeutet. Nun kann schon auch das dritte Glied von (8.1) leicht berechnet werden. Da auch ζ^k eine infinitesimale Grösse ist, bekommt man

$$\begin{aligned} \hat{N}_{jk}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{d\sigma} &= \hat{N}_{jk}^i(x, l) \frac{dx^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} (1 - 2\lambda) \\ &+ \hat{N}_{jk}^i \left(\frac{dx^j}{ds} \zeta^k + \frac{d\xi^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} \right) + (\xi^m \partial_m \hat{N}_{jk}^i + \hat{N}_{jk||m}^i \eta^m) \frac{dx^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Aus den Relationen (8.4), (8.5) und (8.10) bekommt man nach (7.12) die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^i}{ds^2} - \frac{dx^i}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + 2\hat{Q}_{(i'k)}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} + (\xi^r \partial_r \hat{Q}_{j'k}^i + \hat{Q}_{j'k||r}^i \eta^r) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\ + \hat{N}_{j'k}^i \left(\frac{dx^j}{ds} \xi^k + \frac{d\xi^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} \right) + (\xi^r \partial_r \hat{N}_{j'k}^i + \hat{N}_{j'k||r}^i \eta^r) \frac{dx^j}{ds} \frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Unter Beachtung von (7.11) könnte man in dieser Gleichung $d\xi^i/ds$, $d^2\xi^i/ds^2$ durch $\hat{D}\xi^i/Ds$ und $\hat{D}^2\xi^i/Ds^2$ ausdrücken; das wollen wir aber nur in dem durch

$$\frac{\hat{\omega}^k(d)}{ds} = 0 \quad (8.12)$$

charakterisierten Spezialfall durchführen. Dadurch bekommen wir eine elegantere Form für die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung. Übrigens ist der durch (8.12) charakterisierte Fall die unmittelbare Verallgemeinerung des in § 5 behandelten Falles, da im Falle $l^i = dx^i/ds$ die Bahnen der nicht-holonomen Geometrie eben durch (3.7) charakterisiert werden können, und (3.7) der Gleichung (8.12) entspricht.

Für η^i soll

$$\eta^i = -l^i \lambda + \frac{\hat{D}\xi^i}{Ds} - \hat{Q}_{r'k}^i \xi^r \frac{dx^k}{ds} - \hat{Q}_{k'r}^i \left(l^k - \frac{dx^k}{ds} \right) \xi^r \quad (8.13)$$

gesetzt werden. Offenbar bekommt man für $x'^i = l^i$ eben (8.3). Statt der Formel (8.4) bekommen wir auf Grund von (8.12) und (7.12), bzw. (8.6)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi^i}{d\sigma^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} (1 - 2\lambda) - \frac{dx^i}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\hat{D}^2 \xi^i}{Ds^2} - 2\hat{Q}_{r'k}^i \frac{\hat{D}\xi^r}{Ds} \frac{dx^k}{ds} \\ + (\hat{Q}_{i'k}^i \hat{Q}_{r'm}^i + \hat{Q}_{r'i}^i \hat{Q}_{k'm}^i - \partial_m \hat{Q}_{r'k}^i + \hat{Q}_{r'k||m}^i \hat{Q}_{o'm}^i) \xi^r \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Die Berechnung von $\hat{Q}_{j'k}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{d\psi^k}{d\sigma}$ ergibt im Hinblick auf (8.2) und (8.13):

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{j'k}^i(\psi, l) \frac{d\psi^j}{d\sigma} \frac{d\psi^k}{d\sigma} = \hat{Q}_{j'k}^i(x, l) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} (1 - 2\lambda) \\ - (2\hat{Q}_{(i'k)}^i \hat{Q}_{r'm}^i + 2\hat{Q}_{k'm||i}^i \hat{Q}_{r'n}^i) \frac{dx^j}{ds} - \partial_r \hat{Q}_{k'm}^i + \hat{Q}_{k'm||r}^i \hat{Q}_{o't}^i) \times \\ \times \xi^r \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^m}{ds} + \left(2\hat{Q}_{(i'k)}^i + \hat{Q}_{j'k||i}^i \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{\hat{D}\xi^k}{Ds}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Aus (8.1), (8.14), (8.15) erhält man für die Gleichung der nicht-holonomen Abweichung im Hinblick auf (7.12) und (8.12)

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}^2 \xi^i}{D s^2} - \frac{d x^i}{d s} \frac{d \lambda}{d s} + \left(\hat{Q}_{j m \| k}^i \frac{d x^j}{d s} - 2 \hat{Q}_{0 k}^i \right) \frac{\hat{D} \xi^k}{D s} \frac{d x^m}{d s} \\ + \left(K_k^i{}_{mr} + 2 \hat{Q}_{k m \| l}^i \hat{Q}_{[l r]}^t \frac{d x^j}{d s} \right) \xi^r \frac{d x^k}{d s} \frac{d x^m}{d s} = 0, \end{aligned} \quad (8.16)$$

wo $\frac{1}{2} K_{k m r}^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{[r} \hat{Q}_{k] m}^i - \hat{Q}_{o}^t{}_{[r} \hat{Q}_{k] m \| t}^i + \hat{Q}_{0 k}^t{}_{| m} \hat{Q}_{r] t}^i$

den nicht-holonomen Krümmungstensor bedeutet.

Ist $l^i = dx^i/ds$, so geht (8.16) in (5.7) über, wie das leicht bestätigt werden kann; man muss aber beachten, dass der entsprechende Tensor von $K_{k m r}^i \frac{d x^k}{d s} \frac{d x^m}{d s}$ in der Formel (5.7) der Tensor $(\tilde{B}_o^i{}_{or} + 2 q_o^i{}_{r,o})$ ist.

Bemerkung: Im Punktraum geht $K_{k m r}^i$ in den Tensor $F^i{}_{,kr m}$ von [6] über (Vgl. Gleichung (6.39) von [6]).

§ 9. Über das Problem von Lagrange im allgemeinen Fall

In diesem Paragraphen werden wir eine Kurve $x^i = x^i(s)$ immer in Bezug auf ein Richtungsfeld $v^i = v^i(x(s), x'(s))$ der Linienelemente betrachten. Das vorgegebene Richtungsfeld $v^i(s)$ hängt also von dem Grundelement (x, x') der Kurve $x^i(s)$ ab. Wir wollen jetzt diejenigen Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} F(x, x') ds = 0$$

mit $F(x, x') \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v(x, x')) x'^i x'^k}$ (9.1)

bestimmen, für die die Bindungsgleichungen

$$B_{(o)i}(x, v(x, x')) x'^i = 0 \quad (9.2)$$

bestehen, und dann werden wir einige Bedingungen bestimmen dafür, dass diese Extremalen mit den relativen Bahnkurven identisch seien.

Bezeichnen wir wieder mit $H(x, x')$ die Funktion:

$$H(x, x') \stackrel{\text{def}}{=} F(x, x') + \lambda_{(o)} B_{(o)i}(x, v(x, x')) x'^i, \quad (9.3)$$

so werden die gesuchten Extremalen das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial H}{\partial x'^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0 \quad (9.4)$$

befriedigen. Nach (9.1) ist nun wegen der Wahl des Parameters

$$\varrho_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial x'^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{d}{ds} \left(A_{ijr} \frac{\partial v^r}{\partial x'^k} x'^i x'^j + g_{kj} x'^j \right) - \left(\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} + A_{ijr} \partial_k v^r \right) x'^i x'^j.$$

Ebenso, wie in § 3 können wir $\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} x'^i x'^j$ durch $L_{ijk}^* x'^i x'^j$ ausdrücken, und dann wird wegen (vgl. auch [4] (5.7)–(5.10)):

$$\frac{d}{ds} g_{jk} x'^j = g_{jk} \frac{D x'^j}{D s} + L_{kij}^* x'^i x'^j + M_{kij}^* x'^i \frac{\dot{\omega}^j(d)}{ds}$$

für ϱ_k die Relation:

$$\begin{aligned} \varrho_k = g_{jk} \frac{D x'^j}{D s} + \{ 2 L_{[kij]}^* - A_{ijr} (I_i \sigma_o^r k + \Gamma_o^{*r} k + \partial_k v^r) \} x'^i x'^j \\ + M_{kij}^* x'^i \frac{\dot{\omega}^j(d)}{ds} + \frac{d}{ds} \left(A_{ijr} x'^i x'^j \frac{\partial v^r}{\partial x'^k} \right) \end{aligned} \quad (9.5)$$

bestehen.

Aus der Gleichung (9.4) wird somit nach (9.3) und (9.5):

$$\varrho_i + \frac{d}{ds} \lambda_{(\mu)} \left(\frac{\partial B_{(\mu)k}}{\partial x'^i} x'^k + B_{(\mu)i} \right) - \lambda_{(\mu)} \frac{\partial B_{(\mu)k}}{\partial x^i} x'^k = 0. \quad (9.6)$$

Wir wollen jetzt für das Richtungsfeld $v^i(x, x')$ bzw. für die Vektoren $B_{(\mu)i}(x, v(x, x'))$ und x'^i zwei Bedingungen stellen:

$$\frac{\partial B_{(\mu)k}}{\partial x'^i} x'^k = 0 \quad (9.7)$$

und

$$(\partial_k B_{(\mu)i} - \partial_i B_{(\mu)k}) x'^k + \frac{\partial B_{(\mu)i}}{\partial x'^k} x'^k = 0. \quad (9.8)$$

Die Bedingung (9.8) bedeutet die *schwache Holonomität* der Vektoren x'^i in Bezug auf die $B_{(\mu)i}$ (vgl. [5] Formel (4.6)).

Aus (9.6) wird dann nach der Berechnung von $(d/ds)(\lambda_{(\mu)} B_{(\mu)i})$ nach (9.7) und (9.8):

$$\varrho_i + \frac{d \lambda_{(\mu)}}{ds} B_{(\mu)i} = 0. \quad (9.9)$$

Eine Kontraktion dieser Gleichung mit $B_{(\nu)}^i$ ergibt wegen (6.1)

$$\frac{d \lambda_{(\nu)}}{ds} = -\varrho_j B_{(\nu)}^j$$

und somit kann (9.9) nach (9.5) in der Form:

$$g_{jk} \frac{D x'^k}{D s} (\delta_i^j - B_{(\mu)i} B_{(\mu)}^j) + \tau_j (\delta_i^j - B_{(\mu)i} B_{(\mu)}^j) = 0 \quad (9.10)$$

bestimmt werden, wo

$$\tau_j \stackrel{\text{def}}{=} Q_j - g_{jk} \frac{Dx'^k}{Ds} \quad (9.11)$$

auf Grund von (9.5) leicht in expliziter Form bestimmt werden kann.

Die charakteristischen Gleichungen der relativen Bahnkurven sind nach (6.3) und (6.4*):

$$\frac{Dx'^i}{Ds} + \frac{DB_{(\sigma)k}}{Ds} x'^k B_{(\sigma)}{}^i = 0. \quad (9.12)$$

Nach (6.2) ist aber

$$\frac{DB_{(\sigma)k}}{Ds} x'^k = -B_{(\sigma)k} \frac{Dx'^k}{Ds}$$

und somit bekommt man aus (9.12):

$$\frac{Dx'^k}{Ds} (\delta_k^i - B_{(\sigma)k} B_{(\sigma)}{}^i) = 0. \quad (9.13)$$

Zieht man in (9.13) den Index „i“ herunter, so kann (9.13) in der Form:

$$g_{jk} \frac{Dx'^k}{Ds} (\delta_i^j - B_{(\sigma)i} B_{(\sigma)}{}^j) = 0 \quad (9.14)$$

angegeben werden. Aus dieser Form der Gleichung der relativen Bahnen kann unmittelbar verifiziert werden, dass (9.14) mit (9.10) nur dann identisch ist, falls

$$\tau_j (\delta_i^j - B_{(\sigma)i} B_{(\sigma)}{}^j) = 0 \quad (9.15)$$

besteht.

(9.7), (9.8) und (9.15) sind also hinreichende Bedingungen dafür, dass die Extremalen des Problems von Lagrange, mit den relativen Bahnen des nicht-holonomen Raumes übereinstimmen.

Bemerkung 1. Offenbar ist (9.15) für $\tau_j = 0$ befriedigt. Aus (9.15) folgt aber noch nicht, dass $\tau_j = 0$ ist. Es ist nämlich

$$\text{Det} |\delta_i^j - B_{(\sigma)i} B_{(\sigma)}{}^j| = 0. \quad (9.16)$$

Das folgt leicht aus der Formel

$$B_{(\sigma)}{}^i (\delta_i^j - B_{(\sigma)i} B_{(\sigma)}{}^j) \equiv 0, \quad (9.17)$$

die wegen (6.1) offenbar gültig ist. Da aber die $B_{(\sigma)}{}^i$ nicht identisch verschwinden, muss (9.16) bestehen.

Bemerkung 2. (9.7), (9.8) und (9.15) sind selbstverständlich nicht in allen \mathcal{L}_n -Räumen erfüllbar. Diese Gleichungen bilden aber ein Gleichungssystem, in dem die Tensoren σ_{ijk} , μ_{ijk} und das Richtungsfeld $v^i(x, x')$ als Unbekannte betrachtet werden können.

Literatur

- [1]. E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles*, 79. Paris, Herman & C^{ie}, 1934.
- [2]. C. CARATHÉODORY, Die Methode der geodätisch Äquidistanten und das Problem von Lagrange. *Acta Math.*, 47 (1926), 199–236.
- [3]. ———, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. Leipzig und Berlin, 1935.
- [4]. A. MOÓB, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume. *Acta Sci. Math. Szeged*, 17 (1956), 85–120.
- [5]. H. RUND, Über nicht-holonome allgemeine metrische Geometrie. *Math. Nachrichten*, 11 (1954), 61–80.
- [6]. J. L. SYNGE, Geodesics in non-holonomic geometry. *Math. Ann.*, 99 (1928), 738–751.
- [7]. O. VARGA, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz. *Publ. Math. Debrecen*, 1 (1949), 7–17.