

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Informatik

Thomas Krieger

Nicht-kooperative extensive n -Personenspiele
mit vektorwertigen Auszahlungen

Dissertation

Vorsitzender des Promotionsausschusses:

1. Berichterstatter

2. Berichterstatter

Prof. Dr. Cornelius Greither

Prof. Dr. Rudolf Avenhaus

Prof. Dr. Fritz Lehmann

Tag der Prüfung: 3. Juli 2003

Mit der Promotion erlangter akademischer Grad: Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Neubiberg, den 3. Juli 2003

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. R. Avenhaus für die Betreuung dieser Arbeit. Sie wurde möglich durch seine stete Unterstützung, seine Hinweise und Vorschläge und seine unermütlche Diskussionsbereitschaft.

Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation werden nicht-kooperative extensive n -Personenspiele mit vektorwertigen Auszahlungen untersucht. Diese Spiele können mit Hilfe eines Spielbaumes dargestellt werden. Das wesentliche Prinzip ist dabei, dass eine Partie als Folge von Ästen im Spielbaum, ausgehend von der Wurzel des Baumes bis zu einem seiner Endpunkte, graphisch illustriert werden kann. Bei extensiven Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen erhält jeder Spieler an einem Endpunkt des Baumes einen Auszahlungsvektor.

In dieser Arbeit werden wir die Auszahlungsvektoren oder später allgemein die zu erwartenden Auszahlungen mit Hilfe eines Vektordominanzkonzeptes vergleichen. Das führt direkt auf die Bestimmung sogenannter Pareto-Gleichgewichte, ein Gleichgewichtskonzept, das eine unmittelbare Verallgemeinerung des Nash-Gleichgewichtes darstellt.

Die Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten in n -Personen-Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen kann auf die Ermittlung von Nash-Gleichgewichten in skalarisierten Spielen zurückgeführt werden. Damit können Ergebnisse und Verfahren aus der Theorie der Normalformspiele mit reellwertigen Auszahlungen unmittelbar auf diese Spiele angewendet werden.

Die Bestimmung von teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichten in extensiven n -Personenspielen mit vektorwertigen Auszahlungen gestaltet sich im Gegensatz dazu als wesentlich schwieriger. Es stellt sich nämlich heraus, dass das aus der Theorie der extensiven n -Personenspiele mit reellwertigen Auszahlungen bekannte Verfahren der Rückwärtsinduktion *nicht* unmittelbar auf diese Klasse von Spielen übertragbar ist, sondern interessante Effekte auftreten, die durch die Verwendung des Vektordominanzkonzeptes entstehen.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit bestehen zum einen im Aufweis der Existenz von Pareto-Gleichgewichten in extensiven n -Personenspielen mit vektorwertigen Auszahlungen, zum anderen in der Entwicklung und Demonstration verschiedener Verfahren zur Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten, unter denen ein Verfahren die bekannte Rückwärtsinduktion verallgemeinert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Formale Darstellung nicht-kooperativer Spiele	5
2.1	Normalformspiele	5
2.2	Extensive n -Personenspiele	8
2.2.1	Definition eines extensiven n -Personenspiels	9
2.2.2	Strategische Konzepte und Realisierungswahrscheinlichkeiten	12
2.2.3	Ein Spezialfall des Satzes von Kuhn	17
3	Normalformspiele mit reellwertigen Auszahlungen	21
3.1	Das Nash-Gleichgewicht	21
3.2	Perfekte Gleichgewichte	26
4	Extensive Spiele mit reellwertigen Auszahlungen	31
4.1	Das Nash-Gleichgewicht	31
4.2	Teilspielperfekte Gleichgewichte	34
4.3	Extensive Spiele mit vollkommener Information	38
5	Grundlagen der Vektoroptimierung	47
5.1	Einführungsbeispiel	47
5.2	Reelle und vektorwertige Optimierungsaufgaben	49
5.3	Lineare Vektormaximumaufgaben	53
5.4	Relationen	54
6	Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen	57
6.1	Das Pareto-Gleichgewicht	57
6.2	Charakterisierung und Existenz von Pareto-Gleichgewichten	61
6.3	Perfekte Vektor-Gleichgewichte	69
6.4	Schwache Pareto-Gleichgewichte	73
6.5	Bemerkungen zur Literatur	75

7	Extensive Spiele mit vektorwertigen Auszahlungen	77
7.1	Das Pareto-Gleichgewicht	77
7.2	Charakterisierung und Existenz von Pareto-Gleichgewichten in extensiven Spielen	78
7.3	Teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte	83
7.4	Extensive Spiele mit vollkommener Information	85
7.4.1	Erster Effekt	86
7.4.2	Zweiter Effekt	87
7.4.3	Eine vektorwertige Rückwärtsinduktion	88
	Literaturverzeichnis	93

Kapitel 1

Einführung

Reale Konflikte zwischen zwei oder mehr Personen, Gruppen, Organisationen oder Staaten sind oft dadurch gekennzeichnet, dass die Konfliktparteien zeitlich nacheinander gewisse Entscheidungen treffen, deren Ergebnisse der jeweils anderen Seite nicht immer bekannt sein müssen, und die zudem vom Zufall beeinflusst werden können. Solche Situationen können mit Hilfe von nicht-kooperativen extensiven n -Personenspielen mit vollkommener bzw. unvollkommener Information modelliert werden (siehe zum Beispiel SELTEN [Sel75] und MYERSON [Mye91]).

Insbesondere gilt dies für Verhandlungen, bei denen zeitlich nacheinander abgeänderte oder neue Vorschläge, wie zum Beispiel Zugeständnisse eingebracht werden. Die Elemente solcher Verhandlungen, insbesondere im zwischenstaatlichen Bereich, wurden zum Beispiel von KREMENYUK [Kre02] dargestellt und lassen sich kurz durch die Begriffe Spieler (actor), Strategie (strategy), Ergebnis (outcome), Prozess (process) und Struktur (structure) charakterisieren; von AVENHAUS [Ave01] wurde ausgeführt, dass diese in der Tat den wesentlichen Elementen eines nicht-kooperativen extensiven n -Personenspiels entsprechen. Bei bisherigen Analysen dieser Art wurden allerdings nur solche Spiele betrachtet, bei denen jedem Verhandlenden am Ende des Spiels eine reelle Zahl zugeordnet wurde, die ein Mass für die Erfüllung des Zieles ist, das eben dieser Spieler im Konflikt verfolgt.

Versucht man nun ernsthaft, vergangene oder gegenwärtige internationale Verhandlungen quantitativ zu analysieren, so stellt sich sehr schnell heraus, dass sich im allgemeinen die Verhandlungsziele der beteiligten Parteien nicht mehr durch skalare Größen beschreiben lassen, sondern vielmehr durch Vektoren dargestellt werden müssen, die sich nicht auf natürliche Weise zu Skalaren zusammenfassen lassen. Exemplarisch wurde dies an zwei Beispielen von AVENHAUS UND KRIEGER [AK03] erläutert und durchgeführt: Zwei internationale Konflikte werden dort als extensive n -Personenspiele mit vektorwertigen Auszahlungen modelliert, und es werden sogenannte Pareto-Gleichgewichte bestimmt.

Erstaunlicherweise wurde diese Klasse von Spielen bisher nicht in der veröffentlichten Literatur untersucht, daher ist der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit die Schliessung dieser Lücke. Aus Komplexitäts- und Aufwandsgründen und damit auch im Interesse einer

geschlossenen Darstellung der zu entwickelnden Theorie, beschränken wir uns hier bei der Illustration von Problemen und deren Lösungen auf einfache Beispiele; hinsichtlich realer Konfliktsituationen sei auf die oben genannte Arbeit verwiesen.

Der Vollständigkeit halber muß an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass n -Personenspiele in Normalform mit vektorwertigen Auszahlungen sehr wohl und schon seit langer Zeit untersucht wurden, auch wenn die veröffentlichte Literatur vergleichsweise klein ist. So hat schon SHAPLEY [Sha59] im Jahre 1959 für vektorwertige Nullsummenspiele gezeigt, dass die Bestimmung sogenannter Pareto-Gleichgewichte auf die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten in zugehörigen skalarisierten Normalformspielen zurückgeführt werden kann. Auf dieser Arbeit aufbauend, haben sich insbesondere ZELENY [Zel76], NIEUWENHUIS [Nie83] und CORLEY [Cor85] mit verschiedensten Aspekten dieser Spiele, zum Beispiel numerischen Fragestellungen, auseinandergesetzt.

Was kann man unter einem Pareto-Gleichgewicht verstehen? Um dies erläutern zu können, müssen zunächst zwei Relationen eingeführt werden, die einen Vergleich zweier Vektoren ermöglichen. In Anlehnung an SHAPLEY [Sha59] definieren wir die „strenge“ Relation, die besagt, dass ein Vektor genau dann besser ist als ein anderer Vektor, wenn er in jeder Komponente grösser oder gleich und in mindestens einer Komponente grösser ist als die entsprechende Komponente des zweiten Vektors. Die „schwache“ Relation besagt, dass ein Vektor genau dann besser ist als ein anderer Vektor, wenn er in jeder Komponente grösser als die entsprechende Komponente des zweiten Vektors ist. Abhängig von der gewählten Relation ist das *strenge* bzw. *schwache* Pareto-Gleichgewicht eine Verhaltenssituation der Spieler, bei der ein einseitiges Abweichen eines Spielers von dieser Verhaltenssituation seinen Auszahlungsvektor *nicht* bezüglich der *strengen* bzw. *schwachen* Relation verbessert. Aus Sicht des Anwenders scheint uns das Konzept des strengen Pareto-Gleichgewichts das natürlichere zu sein. Deshalb werden wir uns in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich auf die strengen Pareto-Gleichgewichte, die später nur noch Pareto-Gleichgewichte genannt werden, konzentrieren. Auf Vergleiche beider Gleichgewichtskonzepte gehen wir aber im sechsten Kapitel ein.

In BORM ET. AL. [BTvdA88] wird die Theorie der Zwei-Personen-Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen unter Verwendung des strengen Pareto-Gleichgewichts entwickelt. Für diese Spiele wird ein Charakterisierungssatz für strenge Pareto-Gleichgewichte formuliert und bewiesen, der unter anderem zeigt, dass jedes strenge Pareto-Gleichgewicht ein Nash-Gleichgewicht in einem zugehörigen Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen ist.

In der Fortführung der Arbeit [BTvdA88] wird in BORM ET. AL. [BvMT99] die Theorie der n -Personen-Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen unter Verwendung des schwachen Pareto-Gleichgewichts entwickelt. Die Autoren formulieren für dieses Gleichgewichtskonzept einen Charakterisierungssatz in Analogie zu dem oben beschriebenen und untersuchen *perfekte* schwache Vektor-Gleichgewichte. Ein perfektes Vektor-Gleichgewicht ist dabei eine Verhaltenssituation aller Spieler, die in noch näher zu definierender Wei-

se stabil gegenüber kleinen Störungen ist. Der mathematische Vorteil dieser schwachen Pareto-Gleichgewichte besteht darin, dass das entsprechende perfekte schwache Vektor-Gleichgewicht immer auch ein schwaches Pareto-Gleichgewicht ist, d.h. somit, dass das Konzept der Perfektheit ein Gleichgewichtsauswahlkriterium darstellt.

Es hat sich nun im Zuge der Ausarbeitung der genannten Anwendungsbeispiele herausgestellt, dass die Analyse von Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen trotz vielfältiger Korrespondenzen eben nicht alle Probleme extensiver Spiele mit vektorwertigen Auszahlungen löst: Dies aufzuzeigen und bei Nicht-Übereinstimmung entsprechende Lösungen anzugeben ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit im engeren Sinn.

Zur Vorbereitung dieser Untersuchungen, die im sechsten und siebenten Kapitel dieser Arbeit dargestellt werden, ist eine Behandlung von n -Personenspielen in Normalform und in extensiver Form mit jeweils reellwertigen Auszahlungen erforderlich, damit auf einige wesentliche Details zurückgegriffen werden kann. Dies geschieht im dritten und vierten Kapitel. Als Beispiel sei der Beweis des Satzes von Kuhn [Kuh53] über die Existenz von *teilspielperfekten* Gleichgewichten in reinen Strategien in extensiven Spielen mit vollkommener Information genannt. Eine Verhaltenssituation heisst dabei teilspielperfekt, wenn die Verhaltenssituation eingeschränkt auf alle Teilspiele ein „optimales“ Verhalten der Spieler sicherstellt.

Ebenso erforderlich ist eine Darstellung der Grundlagen der Vektoroptimierung, mit deren Hilfe dann das strenge Pareto-Gleichgewicht für Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen formuliert und untersucht werden kann. Das fünfte Kapitel ist diesem Thema gewidmet, wobei wir uns hauptsächlich an GÖPFERT UND NEHSE [GN90] orientieren.

Im sechsten Kapitel entwickeln wir die Theorie der Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen unter Verwendung des strengen Pareto-Gleichgewichtes. Dabei legen wir neben theoretischen Ergebnissen und Algorithmen zur Bestimmung von strengen Pareto-Gleichgewichten besonderen Wert auf das Herausarbeiten von Unterschieden zu Normalformspielen mit reellwertigen Auszahlungen.

Ein Schwerpunkt des Kapitels ist unsere Verallgemeinerung des Charakterisierungssatzes von zwei auf n Spieler, mit dessen Hilfe die Bestimmung von strengen Pareto-Gleichgewichten auf die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten in skalarisierten Spielen zurückgeführt werden kann. Mit diesem Satz kann dann auch die Existenz von strengen Pareto-Gleichgewichten gezeigt werden.

Ein anderer Schwerpunkt liegt auf unseren Ergebnissen zu den *perfekten strengen Vektor-Gleichgewichten*, die eine Verallgemeinerung der perfekten Nash-Gleichgewichte auf Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen darstellen, und in dieser Arbeit unseres Wissens erstmals formuliert werden. Ein wesentliches Ergebnis besteht im Aufweis, dass das perfekte strenge Vektor-Gleichgewicht kein strenges Pareto-Gleichgewicht sein muss. Insbesondere kann im allgemeinen hier also keine Gleichgewichtsauswahl vorgenommen werden. Anders ist die Situation bei den perfekten schwachen Vektor-Gleichgewichten.

Diese sind auch immer schwache Pareto-Gleichgewichte, wie schon oben erwähnt wurde.

Obgleich bereits im sechsten Kapitel neue Verallgemeinerungen und Untersuchungen zu Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen dargestellt werden, enthält nun das siebente Kapitel die eigentlichen originalen Forschungsergebnisse aus dem Gebiet der extensiven n -Personenspiele mit vektorwertigen Auszahlungen. Zunächst definieren wir das strenge Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien und formulieren wiederum einen Charakterisierungssatz, der diesmal aber die Bestimmung von strengen Pareto-Gleichgewichten in extensiven n -Personenspielen mit vektorwertigen Auszahlungen auf die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten in Verhaltensstrategien in einem zugehörigen extensiven n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen zurückführt. Damit kann im Anschluss gezeigt werden, dass jedes extensive n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen mindestens ein strenges Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien sowie ein teilspielperfektes strenges Pareto-Gleichgewicht besitzt. Im Gegensatz zu den perfekten Vektor-Gleichgewichten in Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen ist per Definition jedes teilspielperfekte strenge Pareto-Gleichgewicht auch ein strenges Pareto-Gleichgewicht.

Für diese Spiele mit zusätzlich vollkommener Information beweisen wir die Existenz von mindestens einem teilspielperfekten Pareto-Gleichgewicht in reinen Strategien, eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kuhn. Daraufhin formulieren wir zwei Effekte, die dafür verantwortlich sind, dass das Verfahren der Rückwärtsinduktion, das wir bereits im vierten Kapitel für extensive n -Personenspiele mit reellwertigen Auszahlungen behandeln, nicht ohne Modifikationen übertragen werden kann. Daraus resultiert die Verallgemeinerung der Rückwärtsinduktion zu einer vektorwertigen Rückwärtsinduktion. Ein Beispiel zu diesem Verfahren zeigt die Grenzen und den Aufwand, der bei dieser Bestimmung von teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichten in reinen Strategien auftreten kann.

Ob das letztgenannte Verfahren oder der Übergang zur Normalform einen einfacheren Weg zur Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten darstellt, kann im allgemeinen nicht entschieden werden, wie die bereits mehrfach genannten Anwendungen belegen.

Kapitel 2

Formale Darstellung nicht-kooperativer Spiele

Ein Spiel im Sinne der Spieltheorie ist eine zwischen mehreren Handlungsträgern, die als *Spieler* bezeichnet werden, bestehende Konfliktsituation. Jeder Spieler hat dabei gewisse Handlungsmöglichkeiten, die *Strategien* genannt werden. Abhängig von ihrer Wahl, sowie derjenigen der anderen Spieler, ergibt sich ein bestimmter Spielausgang, der sich für jeden Spieler im Sinne der Nutzentheorie quantitativ bewerten lässt. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die beteiligten Spieler *rational* verhalten, d.h., sie werden ihre Auszahlungen im Rahmen ihrer Strategiewahl zu maximieren versuchen. In dieser Arbeit betrachten wir sogenannte *nicht-kooperative* Spiele, die dadurch gekennzeichnet sind, dass die Spieler ihre Entscheidungen *unabhängig* voneinander treffen.

In Abhängigkeit davon, ob das Spiel einen Spielverlauf besitzt, der explizit dargestellt werden soll, oder aber nicht, unterscheidet man Normalformspiele bzw. extensive Spiele. In diesem Kapitel führen wir beide Klassen ein, wobei wir uns eng an die angegebene Literatur, die für viele weitere Möglichkeiten steht, halten. Auf die Frage, was wir unter der „Lösung“ eines Spieles verstehen, werden wir erst in den beiden nachfolgenden Kapiteln eingehen.

2.1 Normalformspiele

In Anlehnung an MYERSON [Mye91] und BERNINGHAUS ET. AL. [BEG02] definieren wir ein Normalformspiel wie folgt.

Definition 2.1.

Ein nicht-kooperatives n -Personen-Normalformspiel \mathcal{N} ist ein Tupel $(I; (\Sigma_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$, mit

1. einer nichtleeren Menge I ($|I| = n$) an Spielern,
2. einer nichtleeren Menge Σ_i für jeden Spieler i ($i \in I$), und
3. einer Funktion $h_i : \times_{i \in I} \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$ ($d_i \in \mathbb{N}$ ist eine gegebene natürliche Zahl) für jeden Spieler i ($i \in I$). □

Da wir uns in dieser Arbeit nur mit nicht-kooperativen Spielen befassen, lassen wir künftig die Bezeichnung „nicht-kooperativ“ weg. Für die Anzahl n der Spieler setzen wir $n \geq 1$ voraus. Im allgemeinen wird $I = \{1, \dots, n\}$ sein.

Die Elemente der Mengen Σ_i werden *reine Strategien* genannt. Ein Element aus der Menge

$$\Sigma := \times_{i \in I} \Sigma_i$$

heißt *reine Strategienkombination*. Wird eine Strategienkombination $\sigma \in \Sigma$ gespielt, so erhält Spieler i ($i \in I$) die Auszahlung $h_i(\sigma)$. Die natürlichen Zahlen d_i geben dabei an, ob es sich um einen Auszahlungsvektor oder um eine reelle Zahl handelt. Dementsprechend treffen wir folgende verbale Unterscheidung: Ist die Dimension des Auszahlungsvektors $d_i = 1$ für alle Spieler i ($i \in I$), so nennen wir \mathcal{N} ein „ n -Personen-Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen“. Ist die Dimension des Auszahlungsvektors $d_i \geq 2$ für mindestens einen Spieler i ($i \in I$), so nennen wir \mathcal{N} ein „ n -Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen“. Sprechen wir nur von „ n -Personen-Normalformspielen“, so ist eine Unterscheidung in reell- oder vektorwertig nicht nötig, da zum Beispiel an diesen Stellen die Auszahlungsstruktur des Spieles nicht von Bedeutung ist.

Ein n -Personen-Normalformspiel heißt *endlich*, wenn alle Strategiemengen Σ_i ($i \in I$) endliche Mengen sind. Wir verwenden in diesem Fall statt Σ_i die Bezeichnung Φ_i .

In der gesamten Arbeit setzen wir voraus, dass jeder Spieler i ($i \in I$) alle Größen des betrachteten n -Personen-Normalformspiels \mathcal{N} kennt. Diese Voraussetzung wird in der Literatur als *Gemeinsames Wissen* (common knowledge) (siehe GÜETH [Güt99]) bezeichnet.

Ein Zwei-Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Für dieses Spiel erhalten wir als die Menge der reinen Strategien $\Phi_1 = \Phi_2 = \{1, 2\}$.

1 \ 2	1	2
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abbildung 2.1: Ein Bimatrixspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

Die Darstellung eines Zwei-Personen-Normalformspiels \mathcal{N} wie in Abbildung 2.1 wird

Bimatrixform oder Bimatrixdarstellung von \mathcal{N} genannt. Die Eintragung links unten in einem Feld entspricht dabei der Auszahlung an Spieler 1, wenn die reine Strategienkombination gespielt wird, die zu diesem Feld führt; die Eintragung rechts oben in einem Feld entspricht dann der Auszahlung an Spieler 2.

Wie wir in den nachfolgenden Kapiteln sehen werden, existieren in einem endlichen n -Personen-Normalformspiel \mathcal{N} im allgemeinen keine Gleichgewichte in reinen Strategien. Deshalb führen wir gemischte Strategien und die gemischten Erweiterung von \mathcal{N} ein.

Definition 2.2.

Es sei $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$ ein endliches n -Personen-Normalformspiel. Eine **gemischte Strategie** q_i des Spielers i ($i \in I$) ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge reinen Strategien Φ_i des Spielers i . Wählt Spieler i die gemischte Strategie q_i , so wird die reine Strategie ϕ_i mit Wahrscheinlichkeit $q_i(\phi_i)$ gespielt. Die Menge aller gemischten Strategien von Spieler i wird mit Q_i bezeichnet. Die Menge $Q := \times_{i \in I} Q_i$ ist die Menge aller **gemischten Strategienkombinationen**. \square

Verfügt Spieler i ($i \in I$) über k reine Strategien, etwa in der Form $\Phi_i = \{\phi_i^{(1)}, \dots, \phi_i^{(k)}\}$, so ist eine gemischte Strategie q_i als Element des \mathbb{R}^k darstellbar, nämlich als

$$(q_i(\phi_i^{(1)}), \dots, q_i(\phi_i^{(k)}))^T \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^k q_i(\phi_i^{(j)}) = 1.$$

Die Zahl der reinen Strategien k hängt in der Regel vom Spieler i ab. Die reine Strategie $\phi_i^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$) entspricht damit genau dem j -ten Einheitsvektor

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Somit gilt die Mengeninklusion $\Phi_i \subset Q_i$ und damit auch $\Phi \subset Q$. Für das Spiel in Abbildung 2.1 erhalten wir für jeden Spieler i ($i \in I$): die reine Strategie 1 entspricht der gemischten Strategie $\binom{1}{0}$ und die reine Strategie 2 der gemischten Strategie $\binom{0}{1}$.

Für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ sei

$$C(q_i) := \{\phi_i \in \Phi_i : q_i(\phi_i) > 0\}$$

der Träger von q_i . Damit heisst eine gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ *vollständig gemischt*, wenn $C(q_i) = \Phi_i$ gilt. Eine Strategienkombination $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q$ heisst *vollständig gemischt*, wenn jedes q_i vollständig gemischt ist.

Da jeder Spieler i ($i \in I$) in einem Normalformspiel seine Strategie $q_i \in Q_i$ unabhängig von allen anderen Spielern wählt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \Phi$ eintritt, wenn $q := (q_1, \dots, q_n) \in Q$ gespielt wird, gegeben durch

$$q(\phi) := \prod_{i=1}^n q_i(\phi_i).$$

Wird eine gemischte Strategienkombination $q \in Q$ gespielt, so ist die Auszahlung oder der Auszahlungsvektor an jeden Spieler i der Erwartungswert von h_i unter q :

Definition 2.3.

Es sei $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$ ein endliches n -Personen-Normalformspiel. Für jedes $q \in Q$ definieren wir die zu erwartenden Auszahlungen an Spieler i ($i \in I$) durch

$$H_i(q) := \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \cdot h_i(\phi). \quad (2.1)$$

Das n -Personen-Normalformspiel

$$\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$$

heißt die gemischte Erweiterung von \mathcal{N} . □

Da für jeden Spieler i ($i \in I$) und für jede Strategienkombination $\phi \in \Phi$ nach (2.1) stets $H_i(\phi) = h_i(\phi)$ gilt, können die Funktionen H_i als eine Erweiterung von h_i auf die Menge Q aufgefasst werden.

Es sei eine Strategienkombination $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q$ gegeben. Ersetzen wir für einen Spieler i ($i \in \{2, \dots, n-1\}$) die gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ durch $\tilde{q}_i \in Q_i$, so schreiben wir mit

$$q_{-i} := (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$$

diesen Sachverhalt in der Form

$$(\tilde{q}_i, q_{-i}) := (q_1, \dots, q_{i-1}, \tilde{q}_i, q_{i+1}, \dots, q_n). \quad (2.2)$$

Im Falle $i = 1$ bzw. $i = n$ ist

$$(\tilde{q}_1, q_{-1}) := (\tilde{q}_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{bzw.} \quad (\tilde{q}_n, q_{-n}) := (q_1, q_2, \dots, \tilde{q}_n). \quad (2.3)$$

Die Menge aller gemischten Strategienkombinationen ausser für Spieler i wird mit Q_{-i} bezeichnet. Es ist damit $Q_{-i} = \times_{j \neq i} Q_j$.

Für alle Strategienkombinationen $q \in Q$ und alle Spieler i ($i \in I$) lauten mit (2.1) und (2.2) bzw. (2.3) die zu erwartenden Auszahlungen

$$H_i(q) = \sum_{\phi_i \in \Phi_i} q_i(\phi_i) H_i((\phi_i, q_{-i})), \quad (2.4)$$

so dass die Komponenten von $H_i(q)$ lineare Funktionen in $q_i \in Q_i$ sind.

2.2 Extensive n -Personenspiele

In diesem Abschnitt führen wir extensive n -Personenspiele, die dazugehörigen Strategiekonzepte und die Realisierungswahrscheinlichkeiten ein. Ausserdem behandeln wir einen Spezialfall eines Satzes von KUHN, dessen Beweis im siebenten Kapitel von großer Bedeutung sein wird.

Wie schon erwähnt liegen unseren Ausführungen kanonische Darstellungen zugrunde, wie sie zum Beispiel in SELTEN [Sel82], AVENHAUS [Ave99] oder RAUHUT ET. AL. [RSZ79] zu finden sind.

2.2.1 Definition eines extensiven n -Personenspiels

Die Grundlage eines extensiven Spieles ist der Spielbaum. Dieser wird mit Hilfe eines geordneten Baumes beschrieben.

Ein (endlicher) gerichteter Graph besteht aus einer endlichen Menge K von Knoten und einer Menge $\tilde{K} \subseteq K \times K$ von Kanten (u, v) vom Knoten u zum Knoten v . Ein Pfad von u nach v ist ein Abfolge u_0, u_1, \dots, u_t von Knoten ($t \geq 0$), so dass mit $u_0 := u$ und $u_t := v$ das Paar $(u_\nu, u_{\nu+1})$ ($\nu \in \{0, \dots, t-1\}$) eine Kante des Graphen ist.

Ein *Baum* ist ein gerichteter Graph mit einem ausgezeichneten Knoten, *Wurzel* genannt, so dass gilt (siehe KNUTH [Knu68]):

- (i) Zu der Wurzel geht keine, zu jedem anderen Knoten genau ein Kante, und
- (ii) von der Wurzel gibt es zu jedem Knoten einen Pfad.

Der Pfad aus (ii) ist eindeutig bestimmt, da jeder Vorgänger eines jeden Knotens nach (i) eindeutig ist. Die Spielbäume werden in dieser Arbeit so gezeichnet, dass die Wurzel oben ist, und Kanten von oben nach unten verlaufen.

Für eine Kante (u, v) des Baumes heisst u *Vater* von v und v *Sohn* von u . Für einen Pfad von u nach v heisst v *Nachfahr* von u (auch für $u = v$). Ein Knoten ohne Söhne heisst *Blatt* oder *Endknoten*, sonst *innerer Knoten*. Der Baum heisst *geordnet*, wenn unter den *Brüdern*, d.h. den Söhnen jedes inneren Knotens, stets eine *Reihenfolge* festgelegt ist, zum Beispiel von links nach rechts bei der graphischen Darstellung. Dabei heisst $a(x)$ Anzahl der Söhne von x und $S(x, l)$ l -ter Sohn von x ($l \in \{1, \dots, a(x)\}$).

Gibt es in einem Spiel mehrere aufeinanderfolgende Züge der Spieler (einen solchen Verlauf gibt es bei Normalformspielen nicht), so wird dieses Spiel in extensiver Form beschrieben:

Definition 2.4.

Ein nicht-kooperatives extensives n -Personenspiel Γ ist ein Tupel $(I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ mit

1. I ist die Menge der Spieler ($|I| = n$, $0 \notin I$).
2. K ist ein endlicher geordneter Baum, $x \in K$ steht für "x ist ein Knoten des Baumes". Die inneren Knoten nennt man **Entscheidungspunkte**. Ein Blatt oder Endknoten einen **Spielausgang**. E sei die Menge der Blätter bzw. Endknoten des Baumes.
3. $h_i : E \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$ ($d_i \in \mathbb{N}$ ist eine gegebene natürliche Zahl) ist für jeden Spieler i ($i \in I$) eine Funktion. $h_i(x)$ ist die **Auszahlung** an Spieler i , wenn das Spiel im Blatt $x \in E$ endet.
4. P ordnet jedem Entscheidungspunkt x , d.h. jedem inneren Knoten von K , einen Wert aus $\{0\} \cup I$ zu. $P(x)$ ist der Spieler, der in x am Zug ist. Spieler 0 heisst

Zufall. w bestimmt in jeden Knoten $x \in K$ mit $P(x) = 0$ eine vollständig gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf seinen Söhnen.

5. U ist eine **Partition** der Menge der Entscheidungspunkte, wobei für jeden **Informationsbezirk** $A \in U$ gilt

- (i) In A ist nur ein Spieler, bezeichnet mit $P(A)$, am Zug, d.h. $P(x) = i$ für alle $x \in A$, falls $P(A) = i$.
- (ii) Alle Knoten in A haben gleich viele, etwa k Söhne. Die Zahl k der Auswahlen heisst $a(A)$.
- (iii) Für $l \in \{1, \dots, a(A)\}$ sei

$$N_l(A) := \{y \in K : \text{es existiert ein } x \in A \text{ mit } y \text{ ist Nachfahr von } S(x, l)\}$$

die Menge der l -ten Söhne und deren Nachfahren von Entscheidungsknoten aus dem Informationsbezirk A . Dann gilt:

$$B \in U \text{ mit } P(B) = P(A) \implies B \cap N_l(A) \in \{\emptyset, B\}. \quad (2.5)$$

- (iv) Für alle Spieler i ($i \in I$) gilt $U_i := \{A \in U : P(A) = i\} \neq \emptyset$. Die Informationsbezirke des Spielers 0 werden als einelementig vorausgesetzt. \square

Die Bezeichnung „nicht-kooperatives“ Spiel werden wir künftig auch hier wieder weglassen. Für die Anzahl der Spieler setzen wir wieder $n \geq 1$ voraus. Im allgemeinen wird $I = \{1, \dots, n\}$ sein. Ein Informationsbezirk wird manchmal auch Informationsmenge genannt.

Die natürlichen Zahlen d_i geben wieder an, ob Spieler i in jedem Endknoten eine reelle Zahl oder einen Auszahlungsvektor erhält. Ist die Dimension des Auszahlungsvektors $d_i = 1$ für alle Spieler i ($i \in I$), so nennen wir Γ ein „extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen“. Ist die Dimension des Auszahlungsvektors $d_i \geq 2$ für mindestens einen Spieler i ($i \in I$), so nennen wir Γ ein „extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen“. Sprechen wir nur von „extensiven n -Personenspielen“, so ist eine Unterscheidung in reell- oder vektorwertig nicht nötig. Anstatt der Bezeichnung $1, \dots, a(A)$ für die Auswahlen im Informationsbezirk A werden wir oft Buchstaben verwenden.

Wir setzen weiterhin voraus, dass das alle Grössen des Spiels Γ *Gemeinsames Wissen* (common knowledge) sind (siehe GUETH [Güt99]).

Der formalen Beschreibung eines extensiven n -Personenspiels liegt folgende Vorstellung zugrunde: Das Spiel beginnt an der Wurzel des Baumes. Die gegenwärtige Spielsituation wird jeweils durch einen Knoten x des Baumes dargestellt, auf die jeweils nur ein Sohn von x als nächste Situation folgen kann. In einem Blatt $z \in E$ endet das Spiel und jeder Spieler i ($i \in I$) erhält die Auszahlung $h_i(z) \in \mathbb{R}^{d_i}$. Die x nachfolgende Situation wird jeweils von dem Spieler mit der Nummer $P(x)$ bestimmt.

Ist in einem Knoten x der Zufall am Zug, d.h., $P(x) = 0$, so wird, gemäß w unter den Söhnen von x einer zufällig ausgewählt, wobei

$$\sum_{l=1}^{a(x)} w(S(x,l)) = 1$$

gilt. Ist in x der Spieler $i = P(x)$ ($i \neq 0$) am Zug, so ist die Situation komplizierter, denn jetzt weiß der Spieler nicht unbedingt, in welchem Knoten x er am Zug ist. Vielmehr wird ihm nur mitgeteilt, dass er sich in einem bestimmten Informationsbezirk A befindet. Nach (ii) hat jeder Knoten in A gleich viele, nämlich $a(A)$ Söhne. Spieler i trifft nun eine Auswahl, indem er eine Zahl l zwischen 1 und $a(A)$ nennt. Dies bedeutet, dass der l -te Sohn $y := S(x,l)$ von x die nächste Spielsituation beschreibt, ohne dass Spieler i diese dann zu kennen braucht. Wie man mit Bedingung (iii) zeigen kann, ist kein Knoten in einem Informationsbezirk Nachfahr eines anderen Knotens desselben Informationsbezirks. Der Knoten y liegt dann nach (ii) in einem anderen Informationsbezirk B , und Spieler $P(y)$ wird darüber informiert, dass er sich in B befindet. Spieler i erfährt erst wieder etwas über den Spielverlauf, wenn er selbst am Zuge ist, oder bei Spielende ausgezahlt wird. Der genaue, durch den Pfad von der Wurzel zum Spielausgang gegebene Spielverlauf (auch *Partie* oder *Pfad* genannt) mag den Spielern zu keiner Zeit bekannt sein, ausser am Spielende, wo keiner mehr am Zug ist und ohnehin nur noch die Auszahlungen interessieren. Die Bedingung (iv) stellt sicher, dass jeder Spieler in Γ strategische Alternativen besitzt.

Die Bedingung (iii) soll garantieren, dass ein Informationsbezirk des Spielers i *genau* die Kenntnis dieses Spielers über den Spielverlauf beschreibt, d.h. der Spieler kann nicht bestimmte Knoten aus A ausschliessen, in dem er sich seine *bisherigen Züge merkt*. (iii) wird daher auch als Forderung nach **vollkommener Erinnerung** (perfect recall) bezeichnet.

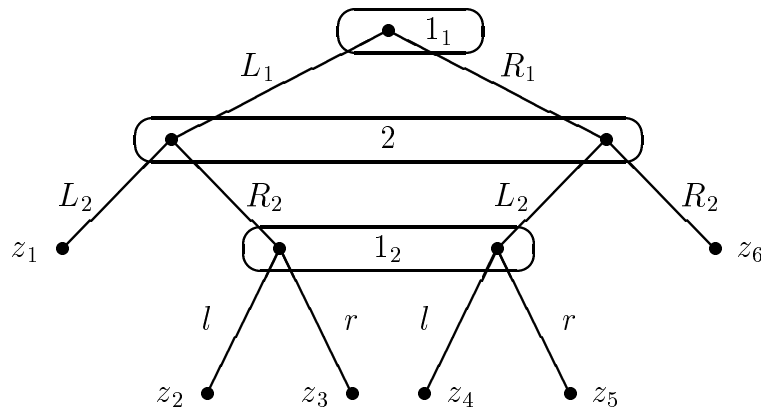


Abbildung 2.2: Ein extensives Zwei-Personenspiel ohne perfekte Erinnerung.

Wir betrachten das Spiel in Abbildung 2.2 (siehe BERNINGHAUS ET. AL. [BEG02]), wobei wir absichtlich auf eine Angabe von Auszahlungen an den Endknoten des Spieles verzichtet haben, da diese keinen Einfluss auf unsere Erklärung haben.

Angenommen Spieler 1 wird darüber informiert, dass er in seinem Informationsbezirk 1_2 über seinen nächsten Zug zu entscheiden hat. Besitzt Spieler 1 vollkommene Erinnerung, dann wüßte er, wenn er sich in seinem ersten Knoten z.B. sich für L_1 entschieden hat, dass er sich jetzt im linken Knoten von 1_2 befinden muss. Der Informationsbezirk 1_2 besagt aber gerade, dass er nicht zwischen den beiden Knoten in 1_2 unterscheiden kann. Die Bedingung (iii) aus Definition 2.4 ist hier verletzt: Es gilt mit $A := 1_1$ und $B := 1_2$ sicher $P(A) = P(B)$, aber mit Zugwahl "R₁" (zweiter Sohn) folgt $B \cap N_2(A) \notin \{\emptyset, B\}$. \diamond

Zum Informationsstand der Spieler während des Spiels kann festgehalten werden: Kein Spieler wird über Züge anderer Spieler oder über Ergebnisse des Zufallszuges informiert. Ist ein Spieler am Zug, so kennt er nur den Informationsbezirk, indem er sich befindet. Der Spielbaum gibt ihm über seine Zugmöglichkeiten, insbesondere deren Anzahl, Auskunft.

Sind alle Informationsbezirke eines Spieles einelementig, d.h. es gilt $|A| = 1$ für jedes $A \in U$, so heisst Γ extensives n -Personenspiel mit **vollkommener (perfect) Information**, andernfalls extensives n -Personenspiel mit **unvollkommener Information**. Weitere Unterscheidungen zum Beispiel in extensive n -Personen-Spiele mit unvollständiger Information werden in RIECK [Rie93] behandelt.

2.2.2 Strategische Konzepte und Realisierungswahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt führen wir die strategischen Grundkonzepte für (allgemeine) extensive n -Personenspiele ein und definieren die Übergangs- und Realisierungswahrscheinlichkeiten eines Blattes unter einer Strategienkombination.

Definition 2.5.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Eine **reine Strategie** ϕ_i des Spielers i ($i \in I$) ist eine Funktion, die jedem Informationsbezirk $A \in U$ des Spielers i (d.h. $P(A) = i$) genau einen Zug $\phi_i(A)$, d.h. eine Wahl zwischen 1 und $a(A)$, zuordnet. Die Menge der reinen Strategien des Spielers i wird mit Φ_i und die Menge der reinen Strategienkombinationen von Γ mit $\Phi := \times_{i \in I} \Phi_i$ bezeichnet. \square

Da der Spielbaum K eine endliche Länge besitzt, ist auch die Menge der reinen Strategienkombinationen Φ eine endliche Menge, d.h. $|\Phi| < \infty$. Für das Spiel in Abbildung 2.2 erhalten wir $\Phi_1 = \{(L_1, l), (L_1, r), (L_2, l), (L_2, r)\}$ und $\Phi_2 = \{L_2, R_2\}$.

Anschaulich kann eine reine Strategie als ein *vollständiger Verhaltensplan* verstanden werden, der jedem Spieler i vorschreibt, was er in jeder überhaupt möglichen Situation zu tun hat. Dem Begriff der reinen Strategie liegt somit eine sehr strenge Vollständigkeitsforderung zugrunde. Dies kann mit Hilfe des Spiels aus Abbildung 2.2 so begründet werden: Entscheidet sich Spieler 1 für den Zug L_1 und Spieler 2 für den Zug L_2 , so endet das Spiel im Knoten z_1 . Angenommen es würde ausreichen, die Kombination $[L_1, L_2]$ für strategische Untersuchungen an diesem Spiel zu betrachten. Dann ist *nicht* definiert, wie sich Spieler 1 zu verhalten hat, wenn Spieler 2 von seiner Wahl L_2 auf die Auswahl R_2

abweicht. Gerade aber solche Abweichungsbetrachtungen eines Spielers interessieren uns bei Gleichgewichtsuntersuchungen.

Analog zu Normalformspielen betrachten wir auch in extensiven Spielen gemischte Strategien:

Definition 2.6.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Eine **gemischte Strategie** q_i des Spielers i ($i \in I$) ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der reinen Strategien Φ_i des Spielers i . Spielt Spieler i die gemischte Strategie q_i , so wird die reine Strategie ϕ_i mit Wahrscheinlichkeit $q_i(\phi_i)$ ausgewählt. Die Menge Q_i ist die Menge aller gemischten Strategien von Spieler i und $Q := \times_{i \in I} Q_i$ die Menge aller gemischten Strategiekombinationen von Γ . \square

Eine gemischte Strategie können wir als einen Zufallsmechanismus auffassen, der *globale*, d.h., sich auf den gesamten Spielbaum beziehende Aktionspläne umfasst. Im Gegensatz dazu gibt es für extensive Spiele ein weiteres Strategiekonzept, das einem Spieler *lokal* an jeder seiner Informationsmengen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die ihm zur Verfügung stehenden Zügen zuordnet. Ein solcher Plan wird Verhaltensstrategie genannt.

Definition 2.7.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Eine **Verhaltensstrategie** b_i von Spieler i ($i \in I$) ordnet jedem Informationsbezirk A mit $P(A) = i$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge $\{1, \dots, a(A)\}$ der Auswahlen zu. Bei Einsatz von b_i wählt Spieler i die Alternative l mit der Wahrscheinlichkeit $b_i(A, l)$. Die Menge aller Verhaltensstrategien für Spieler i wird mit B_i bezeichnet. Die Menge $B := \times_{i \in I} B_i$ ist die Menge aller Kombinationen von Verhaltensstrategien. b_{-i} wird in Analogie zu (2.2) und zu (2.3) definiert. Es ist $B_{-i} := \times_{j \in I, j \neq i} B_j$. \square

Eine reine Strategie $\phi_i \in \Phi_i$ für Spieler i kann als eine Verhaltensstrategie aufgefasst werden. Dazu muss sich Spieler i in jedem seiner Informationsbezirke "mit Sicherheit" für eine Alternative entscheiden, also über ein Ein-Punkt-Verteilung auf der Menge der Alternativen.

Allgemein entspricht eine Verhaltensstrategie b_i für Spieler i den Zufallszügen des extensiven Spiels Γ . In gewisser Weise stellt w eine "Verhaltensstrategie" für Spieler 0, den Zufall dar, denn auch mittels w wird an einem Informationsbezirk für 0, der per Konvention nur einen Knoten enthält, eine Auswahl mittels der durch w gegebenen Wahrscheinlichkeiten getroffen.

Eine Verhaltensstrategie b_i für Spieler i entspricht einer speziellen gemischten Strategie, denn mit b_i wird jede Kombination ϕ_i von Auswahlen - je eine für jeden Informationsbezirk des Spielers i - also jede reine Strategie ϕ_i , mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gewählt; diese ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten: Für jede reine Strategie $\phi_i \in \Phi_i$ ist

$$q_i(\phi_i) := \prod_{A \in U_i} b_i(A, \phi_i(A)) \quad (2.6)$$

eine gemischte Strategie. Sicher ist $q_i(\phi_i) \geq 0$, da $b_i(A, l) \geq 0$ für jedes $A \in U_i$ und $l \in \{1, \dots, a(A)\}$ gilt. Schreiben wir $U_i := \{A_{i1}, \dots, A_{ik}\}$ (Spieler i hat also $k := |U_i|$ Informationsbezirke) und (j_1, \dots, j_k) für die reine Strategie, die den Zug j_ν am Informationsbezirk $A_{i\nu}$ ($\nu \in \{1, \dots, k\}$) auswählt, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\phi_i \in \Phi_i} q_i(\phi_i) &= \sum_{j_1 \in \{1, \dots, a(A_{i1})\}} \sum_{j_2 \in \{1, \dots, a(A_{i2})\}} \dots \sum_{j_k \in \{1, \dots, a(A_{ik})\}} q_i((j_1, \dots, j_k)) \\
&= \sum_{j_1 \in \{1, \dots, a(A_{i1})\}} \sum_{j_2 \in \{1, \dots, a(A_{i2})\}} \dots \sum_{j_k \in \{1, \dots, a(A_{ik})\}} \prod_{\nu=1}^k b_i(A_{i\nu}, j_\nu) \\
&= \sum_{j_1 \in \{1, \dots, a(A_{i1})\}} \dots \sum_{j_{k-1} \in \{1, \dots, a(A_{i,k-1})\}} \left(\prod_{\nu=1}^{k-1} b_i(A_{i\nu}, j_\nu) \right) \underbrace{\sum_{j_k \in \{1, \dots, a(A_{ik})\}} b_i(A_{ik}, j_k)}_{=1} \\
&= \dots = \sum_{j_1 \in \{1, \dots, a(A_{i1})\}} b_i(A_{i1}, j_1) = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist q_i eine gemischte Strategie. Zusammenfassend erhalten wir $\Phi_i \subset B_i \subseteq Q_i$.

Zur Beschreibung einer Verhaltensstrategie sind in der Regel *wesentlich weniger Angaben* nötig als für eine gemischte Strategie. Angenommen, Spieler i hat $k := |U_i|$ Informationsbezirke, und an jedem Informationsbezirk A die Anzahl $a(A)$ an Auswahlen von der Größenordnung \tilde{b} , wobei \tilde{b} ein Höchst-, Mindest- oder irgendwie gewählter Mittelwert für die Zahlen $a(A)$, $A \in U_i$ sei. Dann gibt es $\prod_{A \in U_i} a(A)$, von der Größenordnung \tilde{b}^k reine Strategien. Eine gemischte Strategie muss jeder dieser reinen Strategien eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, und nur eine dieser Wahrscheinlichkeiten ergibt sich als Differenz der Summe der anderen zu 1. Eine gemischte Strategie erfordert also zu ihrer Beschreibung etwa \tilde{b}^k , genauer $\prod_{A \in U_i} a(A) - 1$ nicht-negative reelle Zahlen mit Summe kleiner oder gleich 1. Für eine Verhaltensstrategie sind dagegen nur $a(A) - 1$ solche Angaben in einem Informationsbezirk A erforderlich, zusammen also $\sum_{A \in U_i} (a(A) - 1)$, eine Zahl, die stets geringer ist als die der gemischten Strategie, aber auch von ihrer Größenordnung, nämlich $k \cdot \tilde{b}$, wesentlich geringer als \tilde{b}^k , vor allem für großes k . Vom Beschreibungsaufwand her sind Verhaltensstrategien also sehr wünschenswert.

Für extensive Spiele Γ mit der vorausgesetzten vollkommenen Erinnerung sind gemischte Strategien und Verhaltensstrategien in dem Sinne gleichwertig, dass sie die gleichen zu erwartenden Auszahlungen generieren. Bevor wir jedoch dieses Resultat, ein Spezialfall eines Satzes von KUHN, präzisieren und formulieren können, definieren wir die Begriffe der Übergangs- und Realisierungswahrscheinlichkeit. Wir orientieren uns dabei an dem Vorgehen in RAUHAUT ET. AL. [RSZ79].

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel und (x_0, x_1, \dots, x_t) ($t \geq 1$) ein Pfad von der Wurzel x_0 des Spielbaumes zum Knoten x_t . Wir wollen uns den Wert der Übergangswahrscheinlichkeit von x_ν nach $x_{\nu+1}$ für fest gewähltes $\nu \in \{0, \dots, t-1\}$

überlegen. Dazu nehmen wir an, dass in Knoten x_ν der Spieler $i := P(x_\nu)$ am Zug ist. Es gibt genau einen Informationsbezirk von Spieler i mit $x_\nu \in A(x_\nu) \in U_i$. Da x_ν der Vorgängerknoten von $x_{\nu+1}$ ist, gibt es genau eine Alternative $c(x_{\nu+1}) \in \{1, \dots, a(A(x_\nu))\}$, so dass das Spiel von x_ν nach $x_{\nu+1}$ übergeht. Für einen Knoten $y \in K$ gilt also $l = c(y)$ genau dann, wenn y l -ter Sohn seines Vaters ist.

Setzt Spieler i die Verhaltenstrategie $b_i \in B_i$ ein, so geht die Partie des Spiels mit Wahrscheinlichkeit

$$b_i(A(x_\nu), c(x_{\nu+1}))$$

von x_ν nach $x_{\nu+1}$ über. Setzt dieser Spieler eine gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ ein, so ist die Situation komplizierter. Wir betrachten die Menge aller reinen Strategien des Spielers i , die in den Knoten x_μ ($\mu \leq \nu$) in denen der Spieler i am Zug ist, so entscheidet, dass die Partie nach $x_{\mu+1}$ übergeht:

$$R_i(x_{\nu+1}) := \{\phi_i \in \Phi_i : \text{für alle } j \in \{0, \dots, \nu\} \text{ mit } P(x_j) = i \text{ gilt } \phi_i(A(x_j)) = c(x_{j+1})\}.$$

Gilt für alle Knoten x_η mit $\eta < \nu$ stets $P(x_\eta) \neq i$, so geht die Partie mit Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\nu+1})} q_i(\phi_i)$$

von x_ν nach $x_{\nu+1}$ über. Andernfalls mit der (bedingten) Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\nu+1})} q_i(\phi_i)}{\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i)} \quad \text{falls } \exists \eta < \nu : P(x_\eta) = i, \mu = \max\{\eta < \nu : P(x_\eta) = i\}$$

und $\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i) > 0$.

Ist dagegen $\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i) = 0$, so kann diese Übergangswahrscheinlichkeit beliebig angesetzt werden. Ist in x_ν der Zufall am Zug, so ist die Übergangswahrscheinlichkeit durch $w(x_\nu, x_{\nu+1})$ gegeben, wobei $w(x_\nu, x_{\nu+1})$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Zufall in x_ν genau den Zug auswählt, der zum Sohn $x_{\nu+1}$ von x_ν führt.

Diese Bemerkungen motivieren folgende

Definition 2.8.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel, (x_0, x_1, \dots, x_t) der Pfad von der Wurzel x_0 des Spielbaumes zum Knoten x_t und $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ eine Strategienkombination. Dann heisst für jedes $\nu \in \{0, \dots, t-1\}$

- im Fall $P(x_\nu) = i$ und $s_i = b_i \in B_i$

$$w_s(x_{\nu+1} | x_\nu) := b_i(A(x_\nu), c(x_{\nu+1}))$$

- im Fall $P(x_\nu) = i$ und $s_i = q_i \in Q_i$

$$w_s(x_{\nu+1} | x_\nu) := \begin{cases} \sum_{\phi_i \in R_i(x_{\nu+1})} q_i(\phi_i) & \text{falls } \forall \eta < \nu : P(x_\eta) \neq i, \\ \frac{\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\nu+1})} q_i(\phi_i)}{\sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i)} & \text{falls } \exists \eta < \nu : P(x_\eta) = i, \\ & \mu = \max\{\eta < \nu : P(x_\eta) = i\} \\ & \text{und } \sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i) > 0, \\ \text{beliebig} & \text{falls } \sum_{\phi_i \in R_i(x_{\mu+1})} q_i(\phi_i) = 0, \end{cases}$$

- im Fall $P(x_\nu) = 0$

$$w_s(x_{\nu+1} | x_\nu) := w(x_\nu, x_{\nu+1})$$

s -Übergangswahrscheinlichkeit von x_ν nach $x_{\nu+1}$ und

$$r(s, x_t) := \prod_{\nu=0}^{t-1} w_s(x_{\nu+1} | x_\nu) \quad (2.7)$$

die **Realisierungswahrscheinlichkeit** von x_t unter s . □

Die Realisierungswahrscheinlichkeit des Knotens x_t unter der Strategienkombination s gibt also die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Partie beim Einsatz der Strategienkombination s in den Knoten x_t gelangt. Diese Wahrscheinlichkeit ist gerade das Produkt der entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $w_s(x_{\nu+1} | x_\nu)$ ($\nu \in \{0, \dots, t-1\}$).

Es kann gezeigt werden (siehe RAUHUT ET. AL. [RSZ79]), dass die Namen Übergangswahrscheinlichkeit bzw. Realisierungswahrscheinlichkeit für $w_s(x_{\nu+1} | x_\nu)$ bzw. $r(s, x_t)$ gerechtfertigt sind. Es gilt nämlich für jedes $s = (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$

$$\sum_{l=1}^{a(A(x_\nu))} w_s(S(x_\nu, l) | x_\nu) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{x \in E} r(s, x) = 1.$$

Mit Definition 2.8 können wir die zu erwartenden Auszahlungen in extensiven Spielen definieren:

Definition 2.9.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel und $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ eine Strategienkombination. Dann heisst für jeden Spieler i ($i \in I$)

$$H_i(s) := \sum_{x \in E} r(s, x) \cdot h_i(x) \quad (2.8)$$

die zu erwartende Auszahlung an Spieler i . $H_i(s)$ wird im Falle $d_i \geq 2$ auch Auszahlungsvektor für Spieler i genannt. \square

Bei der Definition (2.8) von $H_i(s)$ werden also die Auszahlungen bzw. Auszahlungsvektoren an den Endknoten des Baumes noch mit den zugehörigen Realisierungswahrscheinlichkeiten gewichtet und addiert. Nach Definition 2.9 ist nun insbesondere $H_i(\phi)$ für jedes $\phi \in \Phi$, $H_i(q)$ für jedes $q \in Q$ und $H_i(b)$ für jedes $b \in B$ definiert.

Das zu einem extensiven Spiel gehörende Normalformspiel wird wie folgt eingeführt:

Definition 2.10.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit den reinen Strategiemengen Φ_i ($i \in I$). Für jede reine Strategienkombination $\phi \in \Phi$ definieren wir mit (2.8)

$$\tilde{h}_i(\phi) := H_i(\phi)$$

und für jede gemischte Strategienkombination $q \in Q$

$$\tilde{H}_i(q) := H_i(q).$$

Das (endliche) Normalformspiel $\mathcal{N}(\Gamma) := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (\tilde{h}_i)_{i \in I})$ heisst die **Normalformdarstellung** von Γ . Die gemischte Erweiterung davon wird mit $[\mathcal{N}(\Gamma)]^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (\tilde{H}_i)_{i \in I})$ bezeichnet. \square

In Definition 2.10 wird die gemischte Erweiterung von $\mathcal{N}(\Gamma)$ und insbesondere die Auszahlungen \tilde{H}_i mit Hilfe von (2.8) definiert. Ein anderer Weg bestünde darin, die gemischte Erweiterung $(I; (Q_i)_{i \in I}; (\tilde{H}_i)_{i \in I})$ von $\mathcal{N}(\Gamma)$ zu betrachten. Dann erhielte man gemäss Definition 2.3

$$\tilde{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \tilde{h}_i(\phi).$$

In RAUHUT ET. AL. [RSZ79] wird gezeigt, dass für alle Spieler i ($i \in I$) und alle Strategienkombinationen $q \in Q$ gilt: $\tilde{H}_i(q) = \bar{H}_i(q)$. Damit kann \tilde{H}_i als eine Fortsetzung von Q auf $\times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ interpretiert werden.

2.2.3 Ein Spezialfall des Satzes von Kuhn

Wie wir bereits erwähnt haben, sind in extensiven Spielen mit der vorausgesetzten vollkommenen Erinnerung gemischte Strategien und Verhaltensstrategien in dem Sinne gleichwertig, dass sie die gleichen zu erwartenden Auszahlungen generieren. Diese spezielle Aussage eines Satzes von KUHN stellen wir jetzt vor.

Zunächst führen wir die Begriffe der Realisierungs- und Auszahlungsäquivalenz ein:

Definition 2.11.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Zwei Strategien $s_i, s'_i \in Q_i \cup B_i$ für Spieler i ($i \in I$) heißen **realisationsäquivalent**, wenn für alle Strategienkombinationen $s_{-i} \in \times_{j=1, j \neq i}^n (Q_j \cup B_j)$ und für alle Knoten $x \in K$ gilt

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x). \quad (2.9)$$

s_i und s'_i heißen **auszahlungsäquivalent**, wenn für alle Strategienkombinationen $s_{-i} \in \times_{j=1, j \neq i}^n (Q_j \cup B_j)$ und für alle Spieler $j \in I$ gilt

$$H_j((s_i, s_{-i})) = H_j((s'_i, s_{-i})). \quad \square$$

Aus (2.8) folgt mit (2.9), dass realisationsäquivalente Strategien stets auch auszahlungsäquivalent sind.

Der in dieser Arbeit interessierende Spezialfall des Satzes von KUHN [Kuh53] lautet:

Satz 2.12.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Dann gilt für alle Strategienkombinationen $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ und alle Spieler i ($i \in I$):

1. Ist $s_i = q_i \in Q_i$, so existiert eine Verhaltensstrategie $b_i \in B_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x) \quad \forall x \in E.$$

2. Ist $s_i = b_i \in B_i$, so existiert eine gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x) \quad \forall x \in E.$$

Der Beweis dieses Satzes wird in RAUHUT ET. AL. [RSZ79] geführt. □

Wegen der Bedeutung von Satz 2.12 betonen wir nochmals dessen Aussage: zu jeder gemischten Strategie $q_i \in Q_i$ existiert *unabhängig* davon, was die Spieler j ($j \neq i$) wählen, eine realisationsäquivalente Verhaltensstrategie $b_i \in B_i$ und umgekehrt.

Auf folgende Überlegungen werden wir oft zurückgreifen:

Es sei eine Strategienkombination $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ und ein Spieler i ($i \in I$) fest gewählt. Im Falle $s_i = q_i \in Q_i$ existiert nach der ersten Aussage von Satz 2.12 eine Verhaltensstrategie $b_i = b_i(q_i) \in B_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i(q_i), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x)$$

für alle Endknoten $x \in E$. Zu dieser Verhaltensstrategie $b_i(q_i)$ existiert nach der zweiten Aussage von Satz 2.12 eine gemischte Strategie $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(b_i(q_i)) \in Q_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{q}_i(b_i(q_i)), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i(q_i), s_{i+1}, \dots, s_n), x)$$

für alle Endknoten $x \in E$. Beide Gleichungen ergeben für *alle* Strategiekombinationen $s_{-i} \in \times_{j \in I, j \neq i} (Q_j \cup B_j)$ ausser für Spieler i und für alle Endknoten $x \in E$

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{q}_i(b_i(q_i)), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x),$$

d.h. die Realisierungswahrscheinlichkeit eines jeden Endknotens ist unter der Strategiekombination (q_i, s_{-i}) dieselbe wie unter der Strategiekombination $(\tilde{q}_i(b_i(q_i)), s_{-i})$, wobei $\tilde{q}_i(b_i(q_i))$ aus der Transformation $q_i \rightarrow b_i(q_i) \rightarrow \tilde{q}_i(b_i(q_i))$ hervorgegangen ist.

Es sei wiederum eine Strategiekombination $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ und ein Spieler i ($i \in I$) fest gewählt. Im Falle $s_i = b_i \in Q_i$ existiert nach der zweiten Aussage von Satz 2.12 eine gemischte Strategie $q_i = q_i(b_i) \in Q_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i(b_i), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x)$$

für alle Endknoten $x \in E$. Dieses $q_i(b_i)$ kann auch konstruktiv mittels Formel (2.6) angegeben werden. Zu dieser gemischten Strategie $q_i(b_i)$ existiert nach der ersten Aussage von Satz 2.12 eine Verhaltensstrategie $\tilde{b}_i = \tilde{b}_i(q_i(b_i)) \in B_i$ mit

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{b}_i(q_i(b_i)), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i(b_i), s_{i+1}, \dots, s_n), x)$$

für alle Endknoten $x \in E$. Beide Gleichungen ergeben für *alle* Strategiekombinationen $s_{-i} \in \times_{j \in I, j \neq i} (Q_j \cup B_j)$ ausser für Spieler i und für alle Endknoten $x \in E$

$$r((s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{b}_i(q_i(b_i)), s_{i+1}, \dots, s_n), x) = r((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n), x),$$

d.h. die Realisierungswahrscheinlichkeit eines jeden Endknotens ist unter der Strategiekombination (b_i, s_{-i}) dieselbe wie unter der Strategiekombination $(\tilde{b}_i(q_i(b_i)), s_{-i})$, wobei $\tilde{b}_i(q_i(b_i))$ aus der Transformation $b_i \rightarrow q_i(b_i) \rightarrow \tilde{b}_i(q_i(b_i))$ hervorgegangen ist.

Beispiel

An einem Beispiel zeigen wir, dass die Forderung nach vollkommener Erinnerung in unseren extensiven Spielen für die Aussagen des Satzes 2.12 nicht weggelassen werden kann. Dazu betrachten wir das extensive Spiel in Abbildung 2.2. Wir zeigen, dass es für die gemischte Strategie q_1 des Spielers 1 mit

$$q_1((L_1, l)) := \frac{1}{2}, \quad q_1((L_1, r)) := 0, \quad q_1((R_1, l)) := 0 \quad \text{und} \quad q_1((R_1, r)) := \frac{1}{2}$$

sowie die Verhaltensstrategie (oder gemischte Strategie) b_2 des Spielers 2 mit

$$b_2(2, L_2) := 1 - p \quad \text{und} \quad b_2(2, R_2) := p, \quad p \in (0, 1)$$

keine realisationsäquivalente Verhaltensstrategie b_1 mit

$$b_1(1_1, L_1) := b_{L_1}, \quad b_1(1_1, R_1) := 1 - b_{L_1}, \quad b_1(1_2, l) := b_l \quad \text{und} \quad b_1(1_2, r) := 1 - b_l$$

und $b_{L_1}, b_l \in [0, 1]$ des Spielers 1 geben kann. Dazu betrachten wir die von (q_1, b_2) und (b_1, b_2) über den Endknoten z_1, \dots, z_6 erzeugte Verteilung. Dieses sind in Abbildung 2.3 abgetragen, wobei in Zeile 2 die Verteilung zu (q_1, b_2) und in Zeile 3 die Verteilung zu (b_1, b_2) steht.

Angenommen, es würde eine zu q_1 realisationsäquivalente Verhaltensstrategie b_1 existieren. Dann müsste für jedes z_1, \dots, z_6 durch eine spezielle Wahl von b_{L_1} und b_l die zweite und dritte Zeile der Tabelle identisch sein. Aus Spalte 1 folgt wegen $p \in (0, 1)$, dass $b_{L_1} = 1/2$ sein muss. Spalte 2 impliziert nun $b_l = 1$. Damit stimmen aber die Zeilen 2 und 3 weder in Spalte z_4 noch in der Spalte z_5 überein. Also existiert für alle b_2 ($p \in (0, 1)$ vorausgesetzt) *keine* zu q_1 realisationsäquivalente Verhaltensstrategie b_1 . Für Spieler 1 ist in diesem Spiel die Bedingung der perfekten Erinnerung verletzt. \diamond

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}p$	0	0	$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}p$
$b_{L_1}(1-p)$	$b_{L_1}pb_l$	$b_{L_1}p(1-b_l)$	$(1-b_{L_1})(1-p)b_l$	$(1-b_{L_1})(1-p)(1-b_l)$	$(1-b_{L_1})p$

Abbildung 2.3: Verteilung über den Endknoten des Spiels aus Abbildung 2.2.

Aus Satz 2.12 folgt nun

Satz 2.13.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Dann gilt für alle Strategiekombinationen $s := (s_1, \dots, s_n) \in \times_{i=1}^n (Q_i \cup B_i)$ und alle Spieler i ($i \in I$):

1. Ist $s_i = q_i \in Q_i$, so existiert eine Verhaltensstrategie $b_i \in B_i$ mit

$$H_j((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n)) = H_j((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n))$$

für alle Spieler $j \in I$.

2. Ist $s_i = b_i \in B_i$, so existiert eine gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ mit

$$H_j((s_1, \dots, s_{i-1}, q_i, s_{i+1}, \dots, s_n)) = H_j((s_1, \dots, s_{i-1}, b_i, s_{i+1}, \dots, s_n))$$

für alle Spieler $j \in I$. \square

Der Beweis folgt aus Satz 2.12, da realisationsäquivalente Strategien auch auszahlungsäquivalent sind. Der von KUHNS in [Kuh53] bewiesene Satz zeigt, dass die Bedingung (iii) aus Definition 2.4 für die Existenz realisierungsäquivalenter Strategien sowohl hinreichend als auch *notwendig* ist (abgesehen von einigen Trivialfällen). Wir verwenden in dieser Arbeit nur die "hinreichende" Schlussrichtung aus Satz 2.12 bzw. Satz 2.13.

Kapitel 3

Normalformspiele mit reellwertigen Auszahlungen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der Normalformspiele mit reellwertigen Auszahlungen zusammengefasst, insbesondere wird mit dem Nash-Gleichgewicht das zentrale Lösungskonzept für nicht-kooperative Spiele eingeführt. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf den Aussagen, die wir in den folgenden Kapiteln bei Beweisen verwenden werden. Ein anderer Schwerpunkt bezieht sich auf die Ergebnisse, für die es in Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen keine analogen Resultate gibt.

Die Darstellung in diesem Kapitel orientiert sich an AVENHAUS [Ave99], VAN DAMME [vD87], MYERSON [Mye91] und BERNINHAUS ET. AL. [BEG02].

3.1 Das Nash-Gleichgewicht

Was verstehen wir unter der „Lösung“ eines Normalformspieles? Dazu führen wir zuerst das Gleichgewichts-Konzept von Nash [Nas51] ein: Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategienkombination, bei der kein Spieler durch einseitiges Abweichen seine Auszahlung verbessern kann. Das führt zur

Definition 3.1.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$.

1. Eine Strategienkombination $q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **Nash-Gleichgewicht** von \mathcal{N}^* , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und alle gemischten Strategien $q_i \in Q_i$ gilt

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq H_i((q_i, q_{-i}^*)). \quad (3.1)$$

2. Eine Strategienkombination $\phi^* := (\phi_1^*, \dots, \phi_n^*) \in \Phi$ ist genau dann ein **Nash-Gleichgewicht** von \mathcal{N} , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i$ gilt

$$h_i((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)) \geq h_i((\phi_i, \phi_{-i}^*)). \quad \square$$

Für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategienkombination $q_{-i} \in Q_{-i}$ für die anderen Spieler definiert man

$$BR_i(q_{-i}) := \{q_i \in Q_i : H_i((q_i, q_{-i})) \geq H_i((\tilde{q}_i, q_{-i})) \text{ für alle } \tilde{q}_i \in Q_i\} \quad (3.2)$$

als die Menge der besten Antworten von Spieler i auf q_{-i} . Dann gilt mit Definition 3.1: Eine Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , wenn alle Strategien q_i^* aus q^* wechselseitig beste Antworten sind, d.h. wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt: $q_i^* \in BR_i(q_{-i}^*)$.

Kehren wir nun zur eingangs gestellten Frage zurück und fordern im Einklang mit der Theorie, dass die Lösung eines Spieles immer ein Nash-Gleichgewicht sein muss. Warum ist dies aber so? Myerson [Mye91] argumentiert wie folgt:

„[It is] not directly argued that intelligent rational players must use equilibrium strategies in a game. When asked why players in a game should behave as in some Nash equilibrium, my favorite response is to ask „Why not?“ and to let the challenger specify what he thinks the players should do. If this specification is not an equilibrium, then we can show that it would destroy its own validity if the players believed it to be an accurate description of each other’s behavior.“

Eine axiomatische Rechtfertigung von Nash-Gleichgewichten wird zum Beispiel in BERNINGHAUS ET. AL. [BEG02] behandelt.

Für ein Nash-Gleichgewicht $\phi^* \in \Phi$ in reinen Strategien muss nach Definition 3.1 unterschieden werden, ob ϕ^* als Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* oder ϕ^* als Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N} aufgefasst werden soll. Diese Trennung haben wir hier eingeführt, um später Unterschiede zu Pareto-Gleichgewichten aufzeigen zu können. Für die in diesem Kapitel betrachteten Normalformspiele sind jedoch beide Definition äquivalent. Um das zu sehen formulieren wir zunächst

Lemma 3.2.

Es sei $\mathcal{N}^ := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Die Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i$ gilt*

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq H_i((\phi_i, q_{-i}^*)). \quad (3.3)$$

Beweis.

” \implies “: Ist die Strategienkombination q^* ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , so ist die Ungleichung (3.1) für alle $q_i \in Q_i$, also insbesondere auch für alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i$ erfüllt. Damit gilt (3.3) für alle $\phi_i \in \Phi_i$ und alle Spieler i ($i \in I$).

” \impliedby “: Für jeden Spieler i ($i \in I$) und alle Strategien $q_i \in Q_i$ folgt aus (3.3) für alle $\phi_i \in \Phi_i$

$$q_i(\phi_i) H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq q_i(\phi_i) H_i((\phi_i, q_{-i}^*))$$

und folglich mit (2.4)

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) = \sum_{\phi_i \in \Phi_i} q_i(\phi_i) H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq \sum_{\phi_i \in \Phi_i} q_i(\phi_i) H_i((\phi_i, q_{-i}^*)) = H_i((q_i, q_{-i}^*)).$$

Somit ist die Strategienkombination q^* ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* . \square

Da für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategienkombinationen $\phi \in \Phi$ stets $H_i(\phi) = h_i(\phi)$ gilt, folgt mit Lemma 3.2, dass die Strategienkombination $\phi^* \in \Phi$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist, wenn die Strategienkombination ϕ^* ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N} ist. Wie wir im sechsten Kapitel sehen werden, ist eine analoge Aussage für Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen im allgemeinen nicht mehr richtig.

Lemma 3.2 kann insbesondere zum Nachweis, ob eine Strategienkombination $q^* \in Q$ ein Nash-Gleichgewicht ist, herangezogen werden. Ein Hilfsmittel zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten liefert folgendes

Lemma 3.3.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann gilt für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategienkombination $q_{-i} \in Q_{-i}$ für die anderen Spieler

$$H_i^*[q_{-i}] := \max_{q_i \in Q_i} H_i((q_i, q_{-i})) = \max_{\phi_i \in \Phi_i} H_i((\phi_i, q_{-i})).$$

Für alle $q_{-i} \in Q_{-i}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $H_i((q_i, q_{-i})) = H_i^*[q_{-i}]$,
- für alle $\phi_i \in \Phi_i$ mit $q_i(\phi_i) > 0$ gilt: $H_i((\phi_i, q_{-i})) = H_i^*[q_{-i}]$.

Der Beweis von Lemma 3.3 wird in AVENHAUS [Ave99] geführt. \square

Die Bedeutung von Lemma 3.3 für die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten zeigt das folgende Beispiel. Wir betrachten das Drei-Personen-Normalformspiel in Abbildung 3.1. Dabei ist die Spielermenge $I = \{1, 2, 3\}$ und die Menge der reinen Strategien $\Phi_i = \{1, 2\}$ für jedes i ($i \in \{1, 2, 3\}$). In der linken Matrix von Abbildung 3.1 sind alle Auszahlungen für die reinen Strategienkombinationen mit $\phi_3 = 1$ und in der rechten Matrix alle Auszahlungen für die reinen Strategienkombinationen mit $\phi_3 = 2$ abgetragen. In einem Feld gehört dabei der Eintrag links unten zu Spieler 1, der Eintrag in der Mitte zu Spieler 2 und der Eintrag rechts oben zu Spieler 3. Als Aufgabe wollen wir ein vollständig gemischtes Nash-Gleichgewicht des Spiels bestimmen, d.h. eine Strategienkombination $q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) \in Q$ mit $C(q_i^*) = \Phi_i$ für alle i ($i \in \{1, 2, 3\}$).

Da $|\Phi_i| = 2$ für jeden Spieler i ($i \in \{1, 2, 3\}$) gilt, können mit den reellen Zahlen $x, y, z \in [0, 1]$ die jeweiligen gemischten Strategien geschrieben werden als

$$q_1 = (x, 1 - x)^T, \quad q_2 = (y, 1 - y)^T \quad \text{und} \quad q_3 = (z, 1 - z)^T.$$

1 \ 2	1	2
1	0	0
2	0	1

1 \ 2	1	2
1	2	0
2	0	0

Abbildung 3.1: Ein Drei-Personen-Normalformspiel.

Damit erhalten wir für eine Strategienkombination $q = (q_1, q_2, q_3) \in Q$ die zu erwartenden Auszahlungen

$$\begin{aligned} H_1(q) &= 2(1-x)yz + x(1-y)(1-z) \\ H_2(q) &= 2x(1-y)z + (1-x)y(1-z) \\ H_3(q) &= 2xy(1-z) + (1-x)(1-y)z. \end{aligned}$$

Angenommen es existiert ein vollständiges gemischtes Nash-Gleichgewicht (q_1^*, q_2^*, q_3^*) . Dann folgt mit der zweiten Aussage von Lemma 3.3, dass für jeden Spieler i ($i \in \{1, 2, 3\}$) die Gleichung $H_i((1, q_{-i}^*)) = H_i((2, q_{-i}^*))$ erfüllt sein muss, d.h. (q_1^*, q_2^*, q_3^*) löst das *nichtlineare* Gleichungssystem

$$2y^*z^* = (1-y^*)(1-z^*), \quad 2x^*z^* = (1-x^*)(1-z^*), \quad 2x^*y^* = (1-x^*)(1-y^*).$$

Als Lösungen erhält man $x_1^* = y_1^* = z_1^* = \sqrt{2} - 1$ und $x_2^* = y_2^* = z_2^* = -\sqrt{2} - 1$, wobei hier nur die erste Lösung in Betracht kommt. Die Gleichgewichtsauszahlung beträgt für jeden Spieler $H_i(q^*) = 6 - 4\sqrt{2}$.

An diesem Spiel ist das Phänomen zu beobachten, dass wegen

$$q_1^* = q_2^* = q_3^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

beide Komponenten der Nash-Gleichgewichtsstrategie *irrationale* Zahlen sind, obwohl für alle Spieler i ($i \in \{1, 2, 3\}$) und alle Strategienkombinationen $\phi \in \Phi$ gilt: $H_i(\phi) \in \mathbb{Q}$. Dieses Phänomen kann bei Bimatrixspielen mit Auszahlungen aus \mathbb{Q} *nicht* auftreten, da nach Lemma 3.3 zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten in solchen Spielen nur *lineare* Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

Es soll noch erwähnt werden, dass das obige Spiel die Strategienkombinationen $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$ und $(2, 1, 2)$ als Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien besitzt. \diamond

Die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes in \mathcal{N}^* liefert der Satz von NASH [Nas51]:

Satz 3.4.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht in \mathcal{N}^* . \square

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe des Browserschen Fixpunktsatzes geführt (siehe [Nas51]). Dort wird auch gezeigt, dass die Menge der Nash-Gleichgewichte eine abgeschlossene Menge in Q ist.

In Bimatrixspielen kann nach CANTY [Can99] und AVENHAUS UND CANTY [AC95] die Ermittlung *aller* Nash-Gleichgewichte auf das Lösen eines linearen Komplementaritätsproblems zurückgeführt werden. Für die Bestimmung *eines* Gleichgewichtes kann der Algorithmus von LEMKE UND HOWSON [LH64] verwendet werden.

Für n -Personen-Normalformspiele ($n \geq 3$) ist die Situation komplizierter. Wir haben bereits im Drei-Personen-Normalformspiel aus Abbildung 3.1 gesehen, dass zur Ermittlung eines vollständig gemischten Nash-Gleichgewichtes ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden musste. Für beliebige n -Personen-Normalformspiele ($n \geq 3$) kann der Algorithmus von SCARF UND HANSEN [Sca67], [Han74] zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten verwendet werden. Ein Ansatz von BUBELIS [Bub79] zeigt, dass jedes n -Personen-Normalformspiel ($n \geq 4$) auf ein Drei-Personen-Normalformspiel zurückgeführt und damit im Prinzip gelöst werden kann.

Wir befassen uns in dieser Arbeit nicht mit numerischen Aspekten der Gleichgewichtsbestimmung, da insbesondere die Spiele im siebenten Kapitel Gleichgewichte in reinen Strategien besitzen werden. Diese können relativ leicht bestimmt werden.

Für einen späteren Vergleich formulieren wir ohne Beweis eine Aussage über die Anzahl der Nash-Gleichgewichte in einem Bimatrixspiel. $C(q_i)$ bezeichnet dabei wieder den Träger der gemischten Strategie $q_i \in Q_i$. Nach STENGEL [vS02] definieren wir

Definition 3.5.

Es sei $\mathcal{N}^* := (\{1, 2\}, (Q_1, Q_2), (H_1, H_2))$ die gemischten Erweiterung des Bimatrixspiels $\mathcal{N} = (\{1, 2\}, (\Phi_1, \Phi_2), (h_1, h_2))$. Das Spiel \mathcal{N}^* heisst genau dann **nichtdegeneriert**, wenn es für jede gemischte Strategie $q_1 \in Q_1$ höchstens $|C(q_1)|$ reine beste Antworten von Spieler 2 auf q_1 gibt, und für jede gemischte Strategie $q_2 \in Q_2$ höchstens $|C(q_2)|$ reine beste Antworten von Spieler 1 auf q_2 gibt. \square

Damit erhalten wir

Satz 3.6.

Es sei $\mathcal{N}^* := (\{1, 2\}, (Q_1, Q_2), (H_1, H_2))$ die gemischten Erweiterung des Bimatrixspiels $\mathcal{N} = (\{1, 2\}, (\Phi_1, \Phi_2), (h_1, h_2))$. Dann gilt: Jedes nichtdegenerierte Bimatrixspiel \mathcal{N}^* besitzt eine ungerade Anzahl an Nash-Gleichgewichten.

Der Beweis hierfür wird in ROSENMÜLLER [Ros81] erbracht. \square

3.2 Perfekte Gleichgewichte

Besitzt ein endliches n -Personen-Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen mehr als ein Nash-Gleichgewicht, so kann nicht von "der" Lösung des Spieles gesprochen werden. Da die Eindeutigkeit eines Nash-Gleichgewichtes jedoch eine wünschenswerte Eigenschaft von Spielen ist, wurden Auswahlkonzepte entwickelt, die die Anzahl von Nash-Gleichgewichten vermindern sollen. Für Bimatrixspiele mit je zwei reinen Strategien für jeden Spieler wird das Konzept der *Auszahlungsdominanz* und der *Risikodominanz* in AVENHAUS [Ave99] und GÜTH [Güt99] diskutiert.

In diesem Abschnitt stellen wir das von SELTEN [Sel75] entwickelte Auswahlkonzept des perfekten Gleichgewichtes vor und beginnen mit einer intuitiven Erläuterung.

Beispiel

Wir betrachten das Bimatrixspiel in Abbildung 3.2.

		↔	
		1	2
	1	100	100
	2	-10	40
↑			↓
		→	

Abbildung 3.2: Ein Bimatrixspiel.

Mit Hilfe von Lemma 3.2 und den eingezeichneten Abweichungspfeilen kann gezeigt werden, dass die Paare $(1, 1)$ und $(2, 2)$ die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^* \\ 1-y^* \end{pmatrix}\right)$ mit $y^* \in [4/5, 1)$ die Nash-Gleichgewichte des Spieles in gemischten Strategien sind.

Gehen wir zunächst von dem Nash-Gleichgewicht $(1, 1)$ aus und nehmen an, Spieler 1 spielt mit kleiner, aber positiver Wahrscheinlichkeit ϵ ($\epsilon > 0$) seine reine Strategie 2, d.h. Spieler 1 zittert beim Spielen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $q'_1 := (1 - \epsilon, \epsilon)^T$ erhalten wir für alle $\epsilon \in (0, 1]$

$$H_2((q'_1, 1)) = 100 - 110 \epsilon < H_2((q'_1, 2)) = 100 - 60 \epsilon .$$

Spieler 2 wird also von seiner reinen Strategie 1 abweichen, wenn Spieler 1 mit noch so kleiner Wahrscheinlichkeit seine reine Strategie 2 spielt. Dieses Nash-Gleichgewicht ist nicht stabil gegenüber einem Zittern von Spieler 1.

Betrachten wir das Nash-Gleichgewicht $(2, 2)$. Wir zeigen, dass dieses Gleichgewicht robust gegenüber kleinen Störungen beider Spieler ist. Nehmen wir an Spieler 2 wählt mit Wahrscheinlichkeit δ ($\delta \in (0, 1]$) seine reine Strategie 1, d.h. Spieler 1 wird mit der Strategie $q'_2 := (\delta, 1 - \delta)^T$ konfrontiert. Dann erhalten wir für alle $\delta \in (0, 4/5)$

$$H_1((1, q'_2)) = 0 < H_2((2, q'_2)) = 40 - 50 \delta .$$

Andererseits wird Spieler 2 mit der Strategie $q'_1 := (\epsilon, 1 - \epsilon)^T$ des Spielers 1 konfrontiert. Wir erhalten für alle $\epsilon \in (0, 1)$

$$H_2((q'_1, 1)) = -10 + 110 \epsilon < H_2((q'_1, 2)) = 40 + 60 \epsilon .$$

Beide Ungleichungen zeigen, dass für beliebig kleine Störungen beider Spieler folgendes gilt: die reine Strategie 2 des Spielers 1 ist beste Antwort auf alle q'_2 und die reine Strategie 2 des Spielers 2 ist beste Antwort auf alle q'_1 . \diamond

Dieses Beispiel führt uns zu einer (zu mehreren anderen äquivalenten) Definition eines perfekten Gleichgewichtes:

Definition 3.7.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Eine Strategiekombination $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **perfektes Gleichgewicht** von \mathcal{N}^* , wenn eine Folge $(q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}) \in Q$ existiert, so dass für alle Spieler i ($i \in I$) gilt:

1. $C(q_i^{(k)}) = \Phi_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
2. $q_i^{(k)} \rightarrow q_i^*$ für $k \rightarrow \infty$, d.h., für alle $\phi_i \in \Phi_i$ gilt $q_i^{(k)}(\phi_i) \rightarrow q_i^*(\phi_i)$ für $k \rightarrow \infty$, und
3. q_i^* ist beste Antwort auf $q_{-i}^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h., es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k)})) \geq H_i((q_i, q_{-i}^{(k)})) \quad \forall q_i \in Q_i . \quad \square$$

Die Schwierigkeit beim Nachweis der Perfektheit einer Strategiekombination $q^* \in Q$ besteht im "Hinzuzaubern geeigneter Folgen" (Zitat aus [Can99]) von vollständig gemischten Strategien.

Als erste Anwendung von Definition 3.7 zeigen wir, dass jedes vollständig gemischte Nash-Gleichgewicht $q^* \in Q$ ein perfektes Gleichgewicht ist. Man setze dazu für jeden Spieler i ($i \in I$), jede reine Strategie $\phi_i \in \Phi_i$ und jedes $k \in \mathbb{N}$

$$q_i^{(k)}(\phi_i) := q_i^*(\phi_i) .$$

Dann sind nach Voraussetzung die Punkte 1. und 2. von Definition 3.7 erfüllt. Überdies folgt aus der Bemerkung nach (3.2), dass die Strategie q_i^* beste Antwort auf die Strategiekombination q_{-i}^* und damit auch Punkt 3. aus Definition 3.7 zutrifft. \diamond

Als zweite Anwendung betrachten wir nochmals das Bimatrixspiel in Abbildung 3.2. Diesmal wollen wir *beweisen*, dass das Nash-Gleichgewicht $(2, 2)$ das *einzige* perfekte Gleichgewicht des Spiels ist.

Dazu definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$q_1^{(k)} := q_2^{(k)} := \left(\frac{1}{k+2}, 1 - \frac{1}{k+2} \right)^T.$$

Damit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und jeden Spieler i ($i \in \{1, 2\}$) sowohl $C(q_i^{(k)}) = \Phi_i$, als auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_1^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} q_2^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h., Punkt 1. und 2. aus Definition 3.7 treffen für die Folge $q^{(k)} := (q_1^{(k)}, q_2^{(k)})$ zu. Weiterhin erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$H_1((1, q_2^{(k)})) = 0 < H_2((2, q_2^{(k)})) = 40 - \frac{50}{k+2}$$

und

$$H_2((q_1^{(k)}, 1)) = -10 + \frac{110}{k+2} < H_2((q_1^{(k)}, 2)) = 40 + \frac{60}{k+2},$$

d.h. aber, dass die reine Strategie $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Spielers 1 beste Antwort auf jedes $q_2^{(k)}$ und dass die reine Strategie $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Spielers 2 beste Antwort auf jedes $q_1^{(k)}$ ist. Es ist damit auch 3. aus Definition 3.7 erfüllt und die reine Strategienkombination $(2, 2)$ ein perfektes Gleichgewicht.

Um die Eindeutigkeit des perfekten Gleichgewichtes $(2, 2)$ zu beweisen, argumentieren wir wie folgt. Angenommen es gäbe ein weiteres perfektes Gleichgewicht $q^* = (q_1^*, q_2^*)$. Dann existiert nach Definition 3.7 eine Folge $(q_1^{(k)}, q_2^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass für jeden Spieler i ($i \in \{1, 2\}$) die Bedingungen 1. und 2. aus Definition 3.7 erfüllt sind. Mit $q_1^{(k)} := \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ 1-x^{(k)} \end{pmatrix}$ ($x^{(k)} \in (0, 1)$) und $q_2^{(k)} := \begin{pmatrix} y^{(k)} \\ 1-y^{(k)} \end{pmatrix}$ ($y^{(k)} \in (0, 1)$) erhalten wir

$$H_2((q_1^{(k)}, 1)) = 100 x^{(k)} - 10 (1 - x^{(k)}) < H_2((q_1^{(k)}, 2)) = 100 x^{(k)} + 40 (1 - x^{(k)}),$$

so dass Spieler 2 immer seine reine Strategie 2 wählen wird. Daraus folgt aber $y^{(k)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ und damit

$$H_1((1, q_2^{(k)})) = 0 < H_2((2, q_2^{(k)})) = 40 - 50 y^{(k)}$$

für hinreichend großes k . Spieler 1 wird somit stets seine reine Strategie 2 wählen. Damit erhalten wir $(2, 2)$ als einziges perfektes Gleichgewicht des Spiels. \diamond

Dass jedes n -Personen-Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen ein perfektes Nash-Gleichgewicht besitzt, liefert

Satz 3.8.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann gibt es mindestens ein perfektes Gleichgewicht in \mathcal{N}^* .

Der Beweis dieses Satzes wird in PETERS UND VRIEZE [PV92] geführt. \square

Am Beispiel des Bimatrixspiels in Abbildung 3.2 hatten wir gesehen, dass das perfekte Gleichgewicht $(2, 2)$ auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Eine solche Beziehung gilt allgemein:

Satz 3.9.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit reellwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann ist jedes perfekte Gleichgewicht ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis.

Angenommen die Strategienkombination q^* sei ein perfektes Gleichgewicht aber kein Nash-Gleichgewicht. Dann existiert ein Spieler i ($i \in I$) und eine Strategie $\tilde{q}_i \in Q_i$ mit

$$H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*)) > H_i((q_i^*, q_{-i}^*)). \quad (3.4)$$

Da q^* ein perfektes Gleichgewicht ist, existiert eine Folge $q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}) \in Q$ mit den Eigenschaften aus Definition 3.7. Insbesondere gilt nach Punkt 3. für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle Strategien $q_i \in Q_i$

$$H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k)})) \geq H_i((q_i, q_{-i}^{(k)})).$$

Es folgt also insbesondere mit $q_i := \tilde{q}_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k)})) \geq H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^{(k)})). \quad (3.5)$$

Da für jedes $\phi_j \in \Phi_j$ ($j \in I$) die Beziehung $q_j^{(k)}(\phi_j) \rightarrow q_j^*(\phi_j)$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, erhalten wir mit Ungleichung (3.5)

$$H_i((q_i^*, q_{-i}^*)) \geq H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*)),$$

was ein Widerspruch zu Ungleichung (3.4) ist. \square

Nach Satz 3.9 ist jedes perfekte Gleichgewicht auch ein Nash-Gleichgewicht. Das Beispiel in Abbildung 3.2 zeigt aber, dass *nicht* jedes Nash-Gleichgewicht auch ein perfektes Gleichgewicht sein muss. Daher liefert die Perfektheit von Gleichgewichten im Prinzip ein Auswahlkonzept. Leider gibt es bereits einfache Spiele, bei denen alle Nash-Gleichgewichte perfekte Gleichgewichte sind (siehe CANTY [Can99]). In diesem Fall können weitere Verfeinerungskonzepte betrachtet werden, die ausführlich in der Monographie von VAN DAMME [vD87] diskutiert werden.

Ein allgemein akzeptiertes Kriterium, dass in jedem Falle zur Auswahl eines einzigen Nash-Gleichgewichtes führt, wurde bisher nicht gefunden. Vielleicht kann es gar nicht gefunden werden, weil es den durch ein Normalformspiel abgesteckten Rahmen überschreiten würde. Mit anderen Worten: mehrfache Nash-Gleichgewichte liegen unter Umständen in der Natur des zu behandelnden Problems.

Kapitel 4

Extensive Spiele mit reellwertigen Auszahlungen

In Fortführung der Darstellung der Normalformspiele fassen wir in diesem Kapitel die wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der extensiven Spiele mit reellwertigen Auszahlungen zusammen. Ein Schwerpunkt liegt wie im vorigen Kapitel auf den Aussagen, die wir in den folgenden Kapiteln bei Beweisen verwenden werden. Ein anderer Schwerpunkt bezieht sich auf die Ergebnisse, für die es in extensiven Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen keine analogen Resultate gibt.

Die Darstellung in diesem Kapitel orientiert sich an AVENHAUS [Ave99], VAN DAMME [vD87] und RAUHUT ET. AL. [RSZ79].

4.1 Das Nash-Gleichgewicht

Die Idee des Nash-Gleichgewichtes aus Definition 3.1 kann direkt auf extensive Spiele mit reellwertigen Auszahlungen übertragen werden:

Definition 4.1.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen.

1. Eine Strategienkombination $b^* := (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ ist genau dann ein **Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien** von Γ , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und jedes $b_i \in B_i$ gilt

$$H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \geq H_i((b_i, b_{-i}^*)). \quad (4.1)$$

2. Eine Strategienkombination $q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$ (vgl. Definition 2.10), wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und jedes $q_i \in Q_i$ gilt

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq H_i((q_i, q_{-i}^*)). \quad \square \quad (4.2)$$

Für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategienkombination $b_{-i} \in B_{-i}$ für die anderen Spieler definiert man

$$BR_i(b_{-i}) := \{b_i \in B_i : H_i((b_i, b_{-i})) \geq H_i((\tilde{b}_i, b_{-i})) \text{ für alle } \tilde{b}_i \in B_i\}$$

als die Menge der besten Antworten von Spieler i auf b_{-i} . Dann gilt mit Definition 4.1: Die Strategienkombination b^* ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ , wenn alle Verhaltenstrategien b_i^* aus b^* wechselseitig beste Antworten sind, d.h. wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt: $b_i^* \in BR_i(b_{-i}^*)$.

Um zu prüfen, ob eine gegebene Kombination von Verhaltensstrategien b^* ein Nash-Gleichgewicht ist, kann in Analogie zu den reellwertigen Normalformspielen formuliert werden:

Lemma 4.2.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen. Dann ist die Strategienkombination $b^ := (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i(\subset B_i)$ gilt*

$$H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \geq H_i((\phi_i, b_{-i}^*)). \quad (4.3)$$

Beweis.

" \implies ": Ist die Strategienkombination b^* ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ , so ist die Ungleichung (4.1) für alle $b_i \in B_i$, also insbesondere auch für alle $\phi_i \in \Phi_i \subset B_i$ erfüllt. Damit gilt die Ungleichung (4.3) für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i$.

" \impliedby ": Angenommen für eine Strategienkombination b^* gelte die Ungleichung (4.3) für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i$. Nach der zweiten Aussage von Satz 2.13 existiert zur Strategienkombination b^* eine Kombination von gemischten Strategien $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ mit $q_i^* = q_i^*(b_i^*)$, so dass für alle Spieler i ($i \in I$) sowohl

$$H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) = H_i((q_1^*, \dots, q_n^*))$$

als auch für alle Spieler i ($i \in I$) und jede reine Strategie $\phi_i \in \Phi_i$ gilt

$$H_i((\phi_i, b_{-i}^*)) = H_i((\phi_i, q_{-i}^*)).$$

Mit Hilfe von Ungleichung (4.3) erhalten wir nun für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede reine Strategie $\phi_i \in \Phi_i$

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) = H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \geq H_i((\phi_i, b_{-i}^*)) = H_i((\phi_i, q_{-i}^*)).$$

Unter Verwendung von Lemma 3.2 folgt

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \geq H_i((q_i, q_{-i}^*))$$

für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategie $q_i \in Q_i$, also für jedes $b_i \in B_i$

$$H_i((b_i, b_{-i}^*)) = H_i((q_i(b_i), b_{-i}^*)) = H_i((q_i(b_i), q_{-i}^*)) \leq H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) = H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)).$$

Somit ist die Strategienkombination b^* ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien. \square

Nun beweisen wir die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes in Verhaltensstrategien:

Satz 4.3.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen. Dann besitzt Γ mindestens ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien.

Beweis.

Nach Satz 3.4 existiert ein Nash-Gleichgewicht $q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$. Die erste Aussage von Satz 2.12 sichert nun für jeden Spieler i ($i \in I$) die Existenz einer zu q_i^* realisationsäquivalenten Verhaltensstrategie $b_i^* := b_i^*(q_i^*) \in B_i$. Damit und den Betrachtungen auf Seite 18-19 erhalten wir für jeden Spieler i ($i \in I$) und jedes $b_i \in B_i$

$$H_i((b_i, b_{-i}^*)) = H_i((q_i(b_i), b_{-i}^*)) = H_i((q_i(b_i), q_{-i}^*)) \leq H_i(q^*) = H_i(b^*).$$

Somit ist die Strategienkombination b^* ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ . \square

Für das Spiel in Abbildung 4.1 erhalten wir die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien $((R_1, l_1), R_2)$, $((R_1, r_1), R_2)$ und $((L_1, l_1), L_2)$. Diese Paare sind in der zu Γ gehörenden Normalformdarstellung mit * gekennzeichnet.

Zur Ermittlung der Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien bemerken wir, dass Spieler 1 niemals seine reine Strategie (L_1, r_1) wählen wird, da diese von allen anderen reinen Strategien dominiert wird. Weiterhin fassen wir die reinen Strategien (R_1, l_1) und (R_1, r_1) zu einer Strategie R zusammen, da $H_i((R_1, l_1), L_2) = H_i((R_1, r_1), L_2)$ und $H_i((R_1, l_1), R_2) = H_i((R_1, r_1), R_2)$ für jedes i ($i \in \{1, 2\}$) gilt. Spieler 1 hat damit nur noch die reinen Strategien aus $\tilde{\Phi}_1 = \{(L_1, l_1), (L_1, r_1), R\}$ als strategische Alternativen.

Mit Hilfe von Lemma 3.2 kann bestätigt werden, dass (q_1^*, q_2^*) mit

$$q_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q_2^* = \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y \in (0, 1/3]$$

Nash-Gleichgewichte von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$ sind. Da Spieler 2 nur einen Informationsbezirk besitzt und Spieler 1 eine reine Strategie in diesen gemischten Gleichgewichten spielt, sind q_1^* und q_2^* bereits die gesuchten Verhaltensstrategien.

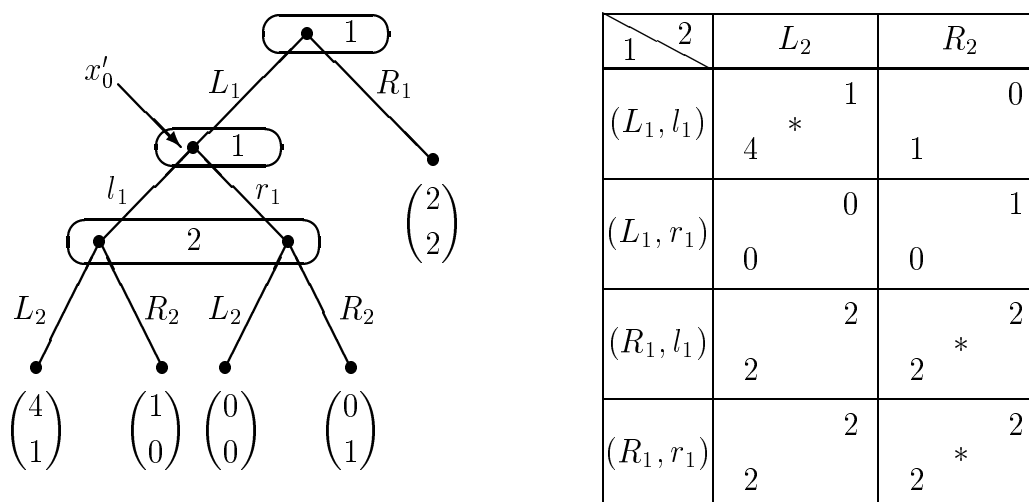


Abbildung 4.1: Ein extensives Zwei-Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und die dazu gehörende Normalformdarstellung.

4.2 Teilspielperfekte Gleichgewichte

RAUHUT ET. AL. [RSZ79] fassen die Idee des teilspielperfekten Gleichgewichtes wie folgt zusammen:

„Wenn einer der Spieler im Verlauf einer Partie Fehler macht in dem Sinne, dass er von einer Gleichgewichtsstrategie abweicht, dann können die anderen Spieler durch Verwendung einer auch in Teilspielen die Gleichgewichtseigenschaft aufweisende Strategie sicherstellen, dass sie auf solche Fehler ”optimal” reagieren.“

Diese teilspielperfekten Gleichgewichte wurden erstmals von SELTEN [Sel75] untersucht und sind in diesem Abschnitt der Gegenstand unserer Betrachtungen.

Beispiel

Gegeben sei das extensive Zwei-Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und seine zugehörige Normalformdarstellung in Abbildung 4.2. Da Spieler 2 bei seiner Wahl L_2 stets eine negative Auszahlung erhält, wird er die Strategie R_2 wählen, womit die Auswahl von Spieler 1 jedoch beliebig sein kann. Die Gleichgewichtspunkte dieses Spiels sind also von der Gestalt (q_1, R_2) mit einer beliebigen reinen oder gemischten Strategie q_1 des Spieler 1. Insbesondere könnte dann Spieler 1 auch R_1 spielen, obwohl der dann eine niedrigere Auszahlung als bei Wahl von L_1 erhielte, wenn er überhaupt zum Zuge käme, was im Gleichgewicht aber gerade nicht der Fall ist. Intuitiv sollte also Spieler 1 L_1 spielen, denn er verliert damit nichts, sondern kann nur gewinnen, wenn Spieler 2 einen Fehler macht

und L_2 spielt. Als Handlungsempfehlung kann hier also nur (L_1, R_2) gegeben werden. Die Begründung lautet dafür: In der zumindest denkbaren Situation, dass Spieler 1 zum Zuge kommt, ist L_1 seine optimale Strategie. Diese Gleichgewichtsauswahl legt also den Spielern ein Verhalten zugrunde, das bei allen, auch mit Wahrscheinlichkeit null erreichten Entscheidungspunkten "rational" ist. Dieses Konzept wird Teilspielperfektheit genannt. \diamond

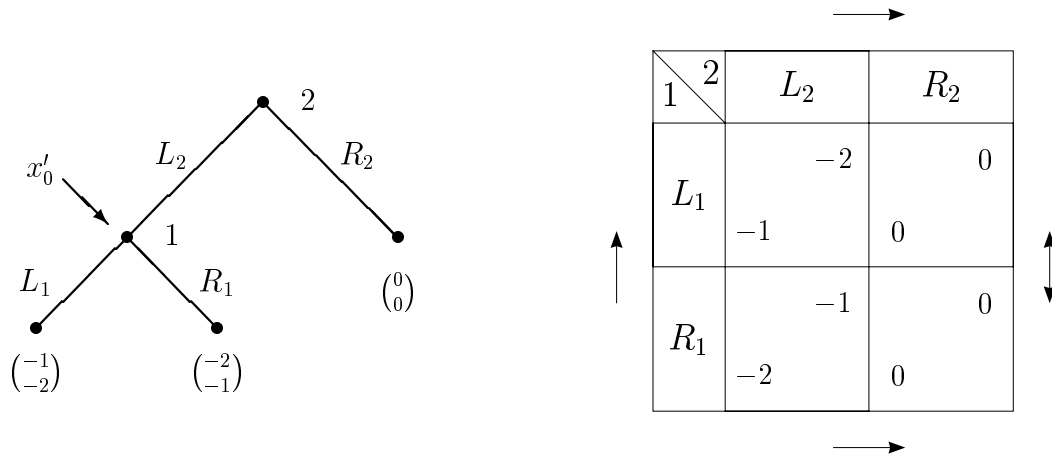


Abbildung 4.2: Spiel in extensiver Form mit reellwertigen Auszahlungen und zugehöriger Normalformdarstellung.

Um Gleichgewichte, die auch in Teilbäumen des Spielbaumes Gleichgewichte sind, besonders kennzeichnen zu können, definieren wir:

Definition 4.4.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel. Ein extensives Spiel $\Gamma' := (I'; K'; (h'_i)_{i \in I'}; P'; w'; U')$ heißt **Teilspiel** von Γ , wenn

- (i) $I' \subseteq I$ ist die (nichtleere) Menge der Spieler von Γ' ,
- (ii) K' ist ein Teilbaum von K , d.h. K' hat als Knotenmenge die Menge aller Nachfahren eines Knotens $x'_0 \in K$ (und damit x'_0 als Wurzel) sowie die entsprechenden Kanten und die gleiche Reihenfolge der Nachfahren,
- (iii) h'_i, P' und w' sind die Einschränkungen von h_i, P und w auf K' ,
- (iv) U' ist genau die Menge der in K' enthaltenen Informationsbezirke aus U . □

In der Spielermenge I' von Γ' sind alle die Spieler aus Γ , für die $U_i \cap K' \neq \emptyset$ ist. Oft werden wir in einem Teilspiel die Spieler wieder mit $1, \dots, \tilde{n}$ bezeichnen, obwohl zum Beispiel Spieler 1 aus Γ keine strategischen Alternativen in Γ' zu besitzen braucht. Es muss bemerkt werden, dass im Gegensatz zu Definition 2.4 zwar nur die Spieler aus I' in Γ' spielen, aber für alle Spieler aus Γ die Auszahlungen bzw. Auszahlungsvektoren in Γ' definiert sind. Nach Definition 4.4 ist Γ ein Teilspiel von sich selbst.

Betrachten wir das Spiel Γ in Abbildung 4.3 (die Auszahlungen an jeden Spieler haben wir dabei nicht angegeben), so sehen wir, dass es als einziges Teilspiel, Γ selbst hat. Bei keinem der Entscheidungsknoten des Spielers 2 kann nämlich ein Teilspiel beginnen, da der Informationsbezirk des Spielers 3 stets in K' "hineinragen" würde. Das ist jedoch nach Punkt (iv) der obigen Definition nicht erlaubt.

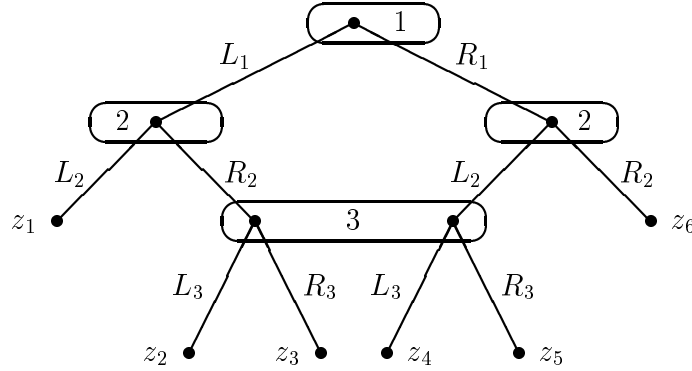


Abbildung 4.3: Ein extensives Drei-Personenspiel.

Teilspielperfektheit wird nun wie folgt definiert:

Definition 4.5.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen. Ein Nash-Gleichgewicht $b^* := (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ in Verhaltensstrategien von Γ ist genau dann **teilspielperfekt**, wenn für jedes Teilspiel $\Gamma' := (I'; K'; (h'_i)_{i \in I'}; P'; w'; U')$ von Γ die Einschränkung von b^* auf U' ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ' ist. \square

In dieser Definition werden nur Nash-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien betrachtet und nicht allgemein gemischte Strategien. Verhaltensstrategien lassen sich nämlich wie reine Strategien problemlos auf Teilspiele einschränken, da sie ebenfalls einzelnen Informationsbezirken Auswahlen zuordnen, wenn auch randomisierte und nicht eindeutige Auswahlen. Eine Einschränkung einer gemischten Strategie auf ein Teilspiel ist dagegen nicht so einfach möglich, da verschiedene reine Strategien in einem Teilspiel zusammenfallen können, wenn sie in dem betreffenden Zweig des Spielbaumes die gleichen Auswahlen definieren, und ihre Wahrscheinlichkeiten müssten dann addiert werden. Diese unnötige Komplexität wird durch Verhaltensstrategien vermieden, die in unseren extensiven Spielen auch ohne Einschränkung für Gleichgewichtspunkte (siehe Satz 4.3) betrachtet werden können. Da überdies stets $\Phi_i \subset B_i \subseteq Q_i$ ist, besteht für den Rest der vorliegenden Arbeit kein Grund, bei extensiven Spielen diese größere Klasse der gemischten Strategien zu betrachten. Wir werden daher im folgenden nur noch Aussagen für Nash-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien formulieren und beweisen.

Die Existenz mindestens eines teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien sichert ein Satz von KUHN [Kuh53]:

Satz 4.6.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen. Dann besitzt Γ mindestens ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien.

Der Beweis von Satz 4.6 wird in VAN DAMME [vD87] geführt. Das Hauptargument ist eine Rückwärtsinduktion, die wir im nächsten Abschnitt für eine spezielle Klasse von Spielen behandeln werden. \square

Die Ermittlung von teilspielperfekten Nash-Gleichgewichten in Verhaltensstrategien kann mit folgenden Algorithmus durchgeführt werden (siehe EICHBERGER [Eic93]):

Algorithmus 4.7.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen.

1. *Bestimme alle "minimalen" Teilspiele Γ' von Γ , d.h. alle Teilspiele, die keine anderen Teilspiele enthalten.*
2. *Für jedes solche Teilspiel berechne man ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien und die zugehörige Gleichgewichtsauszahlungen.*
3. *Sollte es ausser Γ selbst kein anderes Teilspiel geben, so ist das im vorigen Schritt bestimmte Nash-Gleichgewicht bereits ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*
4. *Im anderen Fall betrachte man eine neues Teilspiel, wobei die Knoten, an denen die Teilspiele aus Schritt 1 begannen, nun als Endknoten mit den Gleichgewichtsauszahlungen aus dem betreffenden Teilspiel gewählt werden. Gehe dann zu Schritt 2. \square*

Wenden wir dieses Verfahren auf das Spiel in Abbildung 4.1 an, so erhalten wir für das in x'_0 beginnende Teilspiel die Normalformdarstellung auf der linken Seite von Abbildung 4.4 und damit das einzige Nash-Gleichgewicht

$$(l_1, L_2).$$

Im nächsten Schritt wird nun der Knoten x'_0 ein Endknoten und an diesen wird die Gleichgewichtsauszahlungen des eben untersuchten Spiels vermerkt. Damit erhalten wir das Ein-Personenspiel auf der rechten Seite von Abbildung 4.4 und in diesem die Gleichgewichtsstrategie (L_1) . Zusammen ergibt sich das eindeutige teilspielperfekte Gleichgewicht

$$((L_1, l_1), L_2).$$

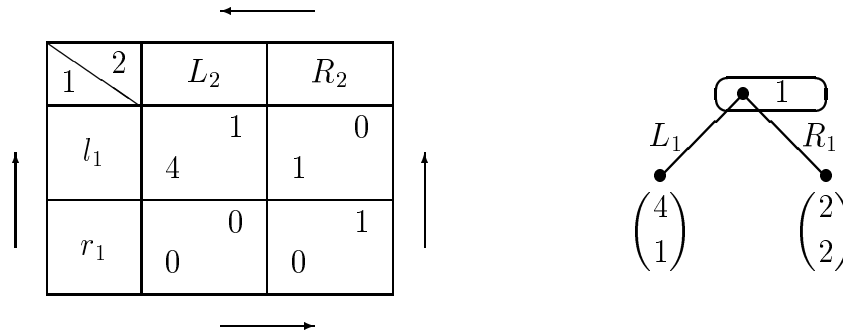


Abbildung 4.4: Links: Normalformdarstellung des in Knoten x'_0 beginnenden Spiels aus Abbildung 4.1. Rechts: Das nach dem ersten Reduktionsschritt überbleibende Spiel.

4.3 Extensive Spiele mit vollkommener Information

Im Falle von extensiven Spielen mit vollkommener Information kann Satz 4.6 dahingehend verallgemeinert werden, dass es stets ein teilspielperfektes Gleichgewicht in *reinen* Strategien gibt. Dieses Ergebnis ist als SATZ VON KUHN bekannt und wird in diesem Abschnitt bewiesen. Obwohl dieser Satz, wie einfache Beispiele zeigen, unmittelbar einleuchtet, wird sein Beweis in allen Details wiedergegeben, damit wir im siebenten Kapitel aufzeigen können, warum und an welchen Stellen das im Beweis vorgestellte Vorgehen der Rückwärtsinduktion bei extensiven Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen *nicht* angewendet werden kann. Unsere Ausführungen orientieren sich eng an dem entsprechenden Beweis in RAUHUT ET. AL. [RSZ79].

Satz 4.8.

Jedes extensive n -Personenspiel $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ mit reellwertigen Auszahlungen und vollkommener Information, d.h. $|A| = 1$ für alle $A \in U$, besitzt ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweis.

Der Beweis wird mit vollständiger Induktion über die Länge des Spieles Γ geführt. Dabei entspricht die Länge $M(\Gamma)$ des Spieles Γ der Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Endknoten. Für den Nachweis, dass $\phi^* \in \Phi$ ein Nash-Gleichgewicht ist, muss nach Lemma 4.2 nur mit den reinen Strategien eines jeden Spielers verglichen werden.

Induktionsanfang.

Es sei Γ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und $M(\Gamma) = 1$. Dann sind alle Knoten ausser der Wurzel x_0 Endknoten von Γ . Ist $P(x_0) = 0$, d.h. in x_0 ist der Zufall am Zug, dann ist Γ kein Spiel in unserem Sinn, da es keinen Spieler $i \neq 0$ gibt, der in Γ eine strategische Alternative besitzt. Ist dagegen $P(x_0) > 0$, so ist Γ ein Ein-Personenspiel. Wählt Spieler $P(x_0)$ eine Alternative l^* aus $\{1, \dots, a(x_0)\}$ mit

$$h_{P(x_0)}(l^*) = \max_{l \in \{1, \dots, a(x_0)\}} h_{P(x_0)}(l),$$

dann ist $\phi_{P(x_0)}^* := l$ ein Nash-Gleichgewicht von Γ .

Induktionsvoraussetzung.

Die Behauptung des Satzes 4.8 gelte für alle extensiven n -Personenspiele mit reellwertigen Auszahlungen und vollkommener Information und sowie $M(\Gamma) \leq k$.

$\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ sei ein Spiel mit $M(\Gamma) = k + 1$ und der Wurzel x_0 . Nach dem Zug von Spieler $P(x_0)$ geht das Spiel in einen der Söhne von x_0 über. Diese Söhne werden mit x_1, \dots, x_m , wobei $m := a(x_0)$ ist, bezeichnet. Für jedes x_j ($j = 1, \dots, m$) betrachten wir den Teilbaum K_j von K , der an der Wurzel x_j beginnt. Damit ist $K_j \cap K_k = \emptyset$ für alle $j \neq k$ und $\cup_{j=1}^m K_j = K \setminus \{x_0\}$.

Es sei J die Menge aller $j \in \{1, \dots, m\}$ für die mindestens ein $x \in K_j$ existiert, mit $P(x) \neq 0$, d.h. in dem zum Baum K_j gehörenden Teilspiel Γ_j kann wirklich gespielt werden in dem Sinne, dass es dort Spieler gibt, die strategische Alternativen besitzen:

$$J := \{j \in \{1, \dots, m\} : \exists x \in K_j \text{ mit } P(x) \neq 0\}.$$

Das Komplement von J wird mit $\bar{J} := \{1, \dots, m\} \setminus J$ bezeichnet. Es kann $\bar{J} = \emptyset$ gelten.

Sind von den am ursprünglichen Spiel Γ beteiligten Spielern $1, \dots, n$ im Spiel Γ_j ($j \in J$) noch die Spieler $i_1, \dots, i_{n_j} \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < \dots < i_{n_j}$ beteiligt, so erhalten diese Spieler in Γ_j die (neuen) Nummern $1, \dots, n_j$, d.h., Spieler i_k ($k = 1, \dots, n_j$) im Spiel Γ erhält in Spiel Γ_j die Nummer $Nr(i_k, j) := k$. Der Zufallszug behält die Bezeichnung 0. Jedes Teilspiel Γ_j ($j \in J$) von Γ ist somit ein extensives n_j -Personenspiel ($n_j \leq n$) mit reellwertigen Auszahlungen und vollkommener Information sowie $M(\Gamma_j) \leq k$.

Es sei E_j für jedes j ($j \in \{1, \dots, m\}$) die Menge der Endpunkte von K_j . Für jedes Teilspiel Γ_j ($j \in J$) bezeichnen wir mit $\Phi_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, n_j$) die Menge der reinen Strategien des Spieler i ($i \in \{1, \dots, n_j\}$) in Γ_j .

Nach Induktionsvoraussetzung existiert für jedes Teilspiel Γ_j ($j \in J$) ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht $\phi^{*(j)} := (\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)})$, d.h., für alle i ($i = 1, \dots, n_j$) und für alle $\phi_i^{(j)} \in \Phi_i^{(j)}$ gilt mit den Auszahlungsvektoren $h_i^{(j)}$ der Spiele Γ_j :

$$\sum_{x \in E_j} r(\phi^{*(j)}, x) \cdot h_i^{(j)}(x) \geq \sum_{x \in E_j} r((\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_i^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)}), x) \cdot h_i^{(j)}(x). \quad (4.4)$$

Wir unterscheiden nun im *Induktionsschritt* die beiden Fälle $P(x_0) = 0$ und $P(x_0) > 0$.

Fall 1: Es sei $P(x_0) = 0$. Wir definieren

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad \forall x \in U_i \cap K_j : \quad \phi_i^*(x) := \phi_{Nr(i,j)}^{*(j)}(x). \quad (4.5)$$

Diese Konstruktion besagt, dass Spieler i in jedem Teilspiel, wo er am Zug ist, genau dieselben Alternativen wählt wie die Gleichgewichtsstrategie $\phi_{Nr(i,j)}^{*(j)}(x)$. Damit ist ϕ_i^* für jeden Spieler i ($i \in I$) eine reine Strategie für das gesamte Spiel Γ .

Wir zeigen nun, dass $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ ein Nash-Gleichgewicht von Γ ist. Dazu sei $\phi_i \in \Phi_i$ ($i \in I$) eine beliebige reine Strategien des Spielers i im Spiel Γ und $\phi_{Nr(i,j)}^{(j)}$ die Einschränkung von ϕ_i auf das Teilspiel Γ_j , sofern dieser Spieler auch in Γ_j spielt, d.h. es gilt: $\phi_{Nr(i,j)}^{(j)}(x) := \phi_i(x)$ für alle $x \in U_i \cap K_j$. Damit erhalten wir für jedes $j \in J$ und jedes $x \in E_j$

$$r((\phi_1, \dots, \phi_n), x) = r((\phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{(j)}), x) \cdot w(x_0, x_j),$$

wobei $w(x_0, x_j)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Zufall in x_0 genau den Zug auswählt, der zum Sohn x_j von x_0 führt. Diese Gleichung besagt, dass die Realisierungswahrscheinlichkeit eines Endknotens in Γ_j unter (ϕ_1, \dots, ϕ_n) das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, mit welcher Spieler 0 in x_0 die Alternative j wählt und der Realisierungswahrscheinlichkeit von x im Teilspiel Γ_j unter $(\phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{(j)})$ ist. Für jedes $j \in \bar{J}$ und $x \in E_j$ ist

$$r((\phi_1, \dots, \phi_n), x) = \underbrace{\prod_{\nu=1}^{t-1} w(z_{\nu+1}, z_\nu)}_{=: p_x} \cdot w(x_0, x_j)$$

unabhängig von (ϕ_1, \dots, ϕ_n) für den Pfad (x_0, z_1, \dots, z_t) mit $z_1 := x_j$ und $z_t := x$. Somit folgt für jeden Spieler i ($i \in I$) mit

$$(\phi_i^{*(j)} \mid \phi_{Nr(i,j)}^{(j)}) := \begin{cases} (\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)}) & \text{falls Spieler } i \text{ nicht in } \Gamma_j \text{ spielt,} \\ (\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{Nr(i,j)}^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)}) & \text{falls Spieler } i \text{ in } \Gamma_j \text{ spielt,} \end{cases}$$

und für jedes $\phi_i \in \Phi_i$ mit (4.4)

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{x \in E_j} r((\phi_i^{*(j)} \mid \phi_{Nr(i,j)}^{(j)}), x) \cdot w(x_0, x_j) \cdot h_i(x) + \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{x \in E_j} p_x \cdot w(x_0, x_j) \cdot h_i(x) \\ &\leq \sum_{j \in J} \sum_{x \in E_j} r((\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)}), x) \cdot w(x_0, x_j) \cdot h_i(x) + \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{x \in E_j} p_x \cdot w(x_0, x_j) \cdot h_i(x) \\ &= \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x), \end{aligned}$$

d.h. aber gerade, dass $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ ein Nash-Gleichgewicht von Γ ist. Die Teilspielperfekteit von $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ wird im Anschluss an Fall 2 bewiesen.

Fall 2: Es sei $P(x_0) > 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass $P(x_0) = 1$ gilt. Für alle Spieler i ($i = 1, \dots, n$) definieren wir ϕ_i^* wie in (4.5). Spieler 1 dagegen muss noch seine Wahl in x_0 festlegen. Er wird dabei eine Alternative l^* wählen, die in ein (oder das) Teilspiel führt, das ihm die größte zu erwartende Auszahlung

liefert, d.h., Spieler 1 wählt $l^* \in \{1, \dots, a(x_0)\}$ so, dass für alle $j \in J$

$$\sum_{x \in E_{l^*}} r((\phi_1^{*(l^*)}, \dots, \phi_{n_{l^*}}^{*(l^*)}), x) \cdot h_1(x) \geq \sum_{x \in E_j} r((\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)}), x) \cdot h_1(x) \quad (4.6)$$

und für alle $j \in \bar{J}$

$$\sum_{x \in E_{l^*}} r((\phi_1^{*(l^*)}, \dots, \phi_{n_{l^*}}^{*(l^*)}), x) \cdot h_1(x) \geq \sum_{x \in E_j} p_x \cdot h_1(x) \quad (4.7)$$

gilt. Im Falle $l^* \in J$ folgt hieraus für alle Spieler i ($i = 2, \dots, n$), für jedes $\phi_i \in \Phi_i$ und $\phi_1^*(x_0) := l^*$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x) &= \sum_{x \in E_{l^*}} r((\phi^{*(l^*)} | \phi_{N_{r(i, l^*)}}^{(l^*)}), x) \cdot h_i(x) \\ &\leq \sum_{x \in E_{l^*}} r((\phi_1^{*(l^*)}, \dots, \phi_{n_{l^*}}^{*(l^*)}), x) \cdot h_i(x) = \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x) \end{aligned}$$

sowie im Fall $l^* \in \bar{J}$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x) &= \sum_{x \in E_{l^*}} p_x \cdot h_i(x) \\ &= \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_i(x), \end{aligned}$$

da p_x unabhängig von (ϕ_1, \dots, ϕ_n) ist. Für Spieler 1 erhalten wir für jedes $\phi_1 \in \Phi_1$ und $l := \phi_1(x_0) \in J$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} r((\phi_1, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_1(x) &= \sum_{x \in E_l} r((\phi^{*(l)} | \phi_{N_{r(1, l)}}^{(l)}), x) \cdot h_1(x) \\ &\leq \sum_{x \in E_l} r((\phi_1^{*(l)}, \dots, \phi_{n_l}^{*(l)}), x) \cdot h_1(x) \leq \sum_{x \in E_{l^*}} r((\phi_1^{*(l^*)}, \dots, \phi_{n_{l^*}}^{*(l^*)}), x) \cdot h_1(x) \\ &= \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_1(x) \end{aligned}$$

wie auch im Fall $l = \phi_1(x_0) \in \bar{J}$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} r((\phi_1, \phi_2^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_1(x) &= \sum_{x \in E_{l^*}} p_x \cdot h_1(x) \\ &= \sum_{x \in E} r((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*), x) \cdot h_1(x) \end{aligned}$$

da wiederum p_x unabhängig von (ϕ_1, \dots, ϕ_n) ist. Damit ist $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ in allen Fällen ein Nash-Gleichgewicht von Γ .

Wir zeigen nun, dass in beiden Fällen $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ auch ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht von Γ ist. Jedes von Γ verschiedene Teilspiel Γ' ist ein Teilspiel eines der Spiele Γ_j für ein gewisses j ($j \in J$). Die Einschränkung von $(\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)$ auf Γ' stimmt dabei mit der Einschränkung von $(\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)})$ auf Γ' überein. $(\phi_1^{*(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{*(j)})$ ist aber nach Voraussetzung ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, d.h. insbesondere ein Nash-Gleichgewicht von Γ' . \square

Das im Beweis von Satz 4.8 verwendete Konstruktionsverfahren eines teilspielperfekten Nash-Gleichgewichtes in reinen Strategien wird auch *Rückwärtsinduktion* genannt.

Beispiel

Wir demonstrieren das soeben vorgestellte Verfahren an dem extensiven Spiel aus Abbildung 4.5.

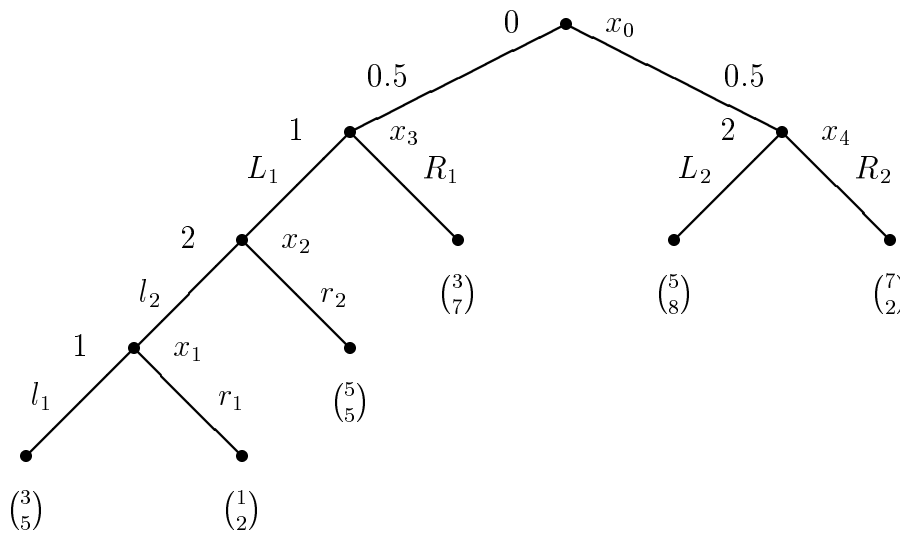


Abbildung 4.5: Ein extensives Zwei-Personenspiel Γ mit reellwertigen Auszahlungen und Zufallszug.

Spieler 1 entscheidet sich am Knoten x_1 für die Auswahl l_1 , da diese die Auszahlung von Spieler 1 in diesem Teilspiel maximiert. Spieler 2 kann am Knoten x_2 beide Alternativen auswählen, da er in beiden Teilspielen, in die er gelangen würde, die Auszahlung 5 erhält. Für das Teilspiel beginnend an Knoten x_2 erhalten wir also die beiden teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte

$$(l_1, l_2) \quad \text{und} \quad (l_1, r_2).$$

Spieler 1 wählt nun am Knoten x_3

- im Falle (l_1, l_2) die Alternative L_1 oder R_1 ,
- im Falle (l_1, r_2) die Alternative L_1 .

Damit sind

$$((L_1, l_1), l_2), ((R_1, l_1), l_2) \quad \text{und} \quad ((L_1, l_1), r_2)$$

die teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien des Teilspiels beginnende in x_3 . Spieler 2 wählt am Knoten x_4 die Alternative L_2 , da diese die Auszahlung von Spieler 2 in diesem Teilspiel maximiert. Zusammen erhalten wir die teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien für das gesamte Spiel Γ :

$$((L_1, l_1), (L_2, l_2)), ((R_1, l_1), (L_2, l_2)) \quad \text{und} \quad ((L_1, l_1), (L_2, r_2)).$$

In Abbildung 4.6 ist das zu Γ gehörende Normalformspiel dargestellt. Die mit ** gekennzeichneten Paare sind die teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien; die mit einem * gekennzeichneten Paare die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, die keine teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte sind. \diamond

1 \ 2	(L_2, l_2)	(L_2, r_2)	(R_2, l_2)	(R_2, r_2)
(L_1, l_1)	4 ** 6.5	5 ** 6.5	5 3.5	6 3.5
(L_1, r_1)	3 5	5 * 6.5	4 2	6 3.5
(R_1, l_1)	4 ** 7.5	4 7.5	5 4.5	5 4.5
(R_1, r_1)	4 * 7.5	4 7.5	5 4.5	5 4.5

Abbildung 4.6: Die Normalformdarstellung des Spieles Γ aus Abbildung 4.5.

Aus dem Beweis von Satz 4.8 erhalten wir zwei allgemeine Folgerungen:

Im Falle $P(x_0) \geq 1$ betrachtet der in x_0 entscheidende Spieler $P(x_0)$ nur seine zu erwartenden Auszahlungen für die Teilspiele Γ_j ($j \in J$) bzw. Teilbäume K_j ($j \in \bar{J}$) und wählt eine Alternative aus, bei der das Spiel in den (oder einen) Knoten x_j mit der höchsten zu erwartenden Auszahlung für Spieler $P(x_0)$ in dem zugehörigen Teilspiel bzw. Teilbaum übergeht. Dies folgt aus den Konstruktionen (4.5), (4.6) und (4.7). Insbesondere ist jede Kombination von teilspielperfekten Gleichgewichten aus den Teilspielen Γ_j ein teilspielperfektes Gleichgewicht von Γ .

Teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte aus den Teilspielen Γ_j ($j \in J$) können, insbesondere wenn $P(x_0) = 0$ gilt, zu einem Nash-Gleichgewicht für Γ zusammengefasst werden.

Wiederum liefert *jede* Kombination von teilspielperfekten Gleichgewichten aus Γ_j ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Γ .

Dass eine zu Satz 4.8 entsprechenden Aussage für extensive Spiele mit unendlichem Spielbaum oder überabzählbaren Strategiemengen nicht zu gelten braucht, zeigen Beispiele in GALE UND STEWART [GS53] sowie HELLWIG ET. AL. [HLRR90].

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden Algorithmus zur Berechnung von teilspielperfekten Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien.

Algorithmus 4.9.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und vollkommener Information sowie der Länge N .

1. *Bestimme für alle Teilspele Γ' von Γ mit $M(\Gamma') = 1$*

- *im Falle $P(x'_0) = 0$ die zu erwartende Auszahlung für jeden Spieler i ($i \in I$).*
- *im Falle $P(x'_0) \geq 1$ sämtliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.*

2. *Von $k = 1$ bis $N - 1$ durchlaufe man die Schritte:*

- *Betrachte jedes Teilspele Γ' von Γ mit der Länge $M(\Gamma') = k + 1$.*
- *Jedes dieser Teilspele Γ' besitzt wiederum Teilspele Γ_j ($j \in J$) mit $M(\Gamma_j) \leq k$. Für diese wurden im letzten Schritt bereits teilspielperfekte Gleichgewichte ermittelt. Nun wird gemäss (4.5) und/oder (4.6) und (4.7) eine Strategie für das Spele Γ' gebildet, wobei irgendeine Auswahl eines teilspielperfekten Gleichgewichtes aus Γ_j mit anderen aus anderen Teilspelele Γ_k kombiniert werden kann. \square*

Der Beweis von Satz 4.8 stellt nun sicher, dass das erhaltene Gleichgewicht in der Tat ein teilspielperfektes Gleichgewicht für das Spele Γ ist. Der obige Algorithmus ermöglicht nicht nur die Bestimmung aller teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien von Γ , sondern er endet stets auch nach einer endlichen Anzahl von an Schritten mit einem solchen Gleichgewicht.

Aus dem Beweis von Satz 4.8 entnehmen wir, dass jedes durch Rückwärtsinduktion gewonnene Gleichgewicht in reinen Strategien auch ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 4.10.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und vollkommener Information, d.h. $|A| = 1$ für alle $A \in U$. Dann kann jedes teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien durch Rückwärtsinduktion erhalten werden.

Der Beweis dieses Satzes wird in WIESE [Wie92b] geführt. \square

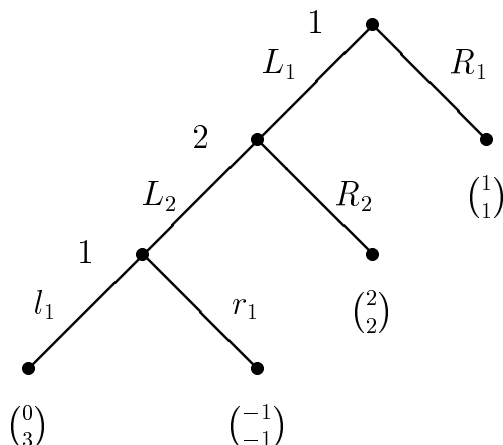


Abbildung 4.7: Ein extensives Zwei-Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen und einem auszahlungsdominanten nicht-teilspielperfekten Gleichgewicht.

Da jedes teilspielperfekte Gleichgewicht eines extensiven n -Personenspiels Γ mit reellwertigen Auszahlungen per Definition auch ein Nash-Gleichgewicht von Γ ist, stellt die Teilspielperfektheit ein Auswahlkonzept für diese extensiven n -Personenspiele dar. Dabei kann es jedoch bei der Anwendung dieses Konzeptes zu Konflikten mit anderen Auswahlkonzepten zum Beispiel der Auszahlungsdominanz kommen. In VAN DAMME [vD87] wird dazu das extensive Zwei-Personenspiel in Abbildung 4.7 betrachtet. Dieses Spiel besitzt genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, nämlich $((R_1, l_1), L_2)$ mit den Auszahlungen 1 für beide Spieler. Dieses kann man mit Hilfe des Algorithmus 4.9 bestimmt werden. Das Nash-Gleichgewicht $((L_1, r_1), R_2)$ ist jedoch auszahlungsdominant, da beide Spieler die Auszahlung 2 erhalten.

Die Teilspielperfektheit stellt bei vielen extensiven Spielen eine überaus strenge Anforderung an die Rationalität der Spieler und an die Kenntnis der Rationalität der anderen Spieler (siehe BERNINGHAUS [BEG02]). Weitere Kritikpunkte zur Teilspielperfektheit und Rückwärtsinduktion basieren auf psychologischen Argumenten. Ausführungen dazu finden sich in FUDENBERG UND TIROLE [FT91] sowie MEHLMANN [Meh97].

Auch für extensive Spiele mit reellwertigen Auszahlungen können perfekte Gleichgewichte betrachtet werden. Diese werden über die sogenannte Agentennormalform eines Spieles Γ definiert. Wir gehen an dieser Stelle nicht auf Details ein, da wir im sechsten und siebenten Kapitel sehen werden, dass die dort eingeführten perfekten Vektor-Gleichgewichte leider kein Verfeinerungskonzept des Pareto-Gleichgewichtes darstellen. Wie an der entsprechenden Stelle ausgeführt werden wird, macht es keinen Sinn, perfekte Vektor-Gleichgewichte in extensiven Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen zu betrachten. Daher führen wir auch hier die perfekten Gleichgewichte nicht ein.

Kapitel 5

Grundlagen der Vektoroptimierung

In diesem Kapitel führen wir als Vorbereitung des sechsten und siebenten Kapitels die Grundbegriffe der Vektoroptimierung ein. Dabei kommen wir über ein Einführungsbeispiel in Abschnitt 5.1 zu allgemeinen Betrachtungen von reellen Maximum- und Vektormaximumaufgaben in Abschnitt 5.2. Anschliessend erläutern wir die in dieser Arbeit verwendeten Relationen und definieren damit den Begriff der Pareto-Maximalität. Lineare Vektormaximumaufgaben, die uns in spezieller Form in den nächsten Kapiteln begegnen werden, und Bemerkungen zu den verwendeten Relationen beschliessen den inhaltlichen Teil dieses Kapitels.

Die Darstellung orientiert sich an den Monographien GÖPFERT UND NEHSE [GN90], ZIMMERMANN [ZG91] und DINKELBACH [Din69].

5.1 Einführungsbeispiel

Zur Einführung betrachten wir die Funktionen $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) := \sqrt{5 - x^2}, \quad f_2(x) := \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad X := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}. \quad (5.1)$$

Definiert man für jedes $x \in X$ die Vektorfunktion $\mathbf{f}(x) := (f_1(x), f_2(x))^T$, so kann die Menge M der Bilder von \mathbf{f} , also $M := \{\mathbf{f}(x) : x \in X\}$, wie folgt geschrieben werden

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : z_1^2 + 4z_2^2 = 5, 2 \leq z_1 \leq \sqrt{5}, -\frac{1}{2} \leq z_2 \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad (5.2)$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind in Abbildung 5.1 skizziert. Die Menge M ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Betrachten wir nun eine Vektormaximumaufgabe mit der Vektorfunktion $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. eine Aufgabe der Art, dass die Vektorfunktion \mathbf{f} „irgendwie“ maximiert werden soll. Diese Aufgabe wird ganz allgemein abgekürzt mit

$$\text{vek max}_{x \in X} \mathbf{f}(x). \quad (5.3)$$

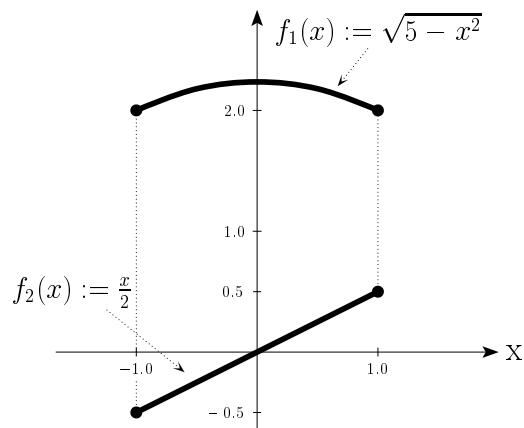


Abbildung 5.1: Die Funktionen f_1 und f_2 über X gemäss (5.1).

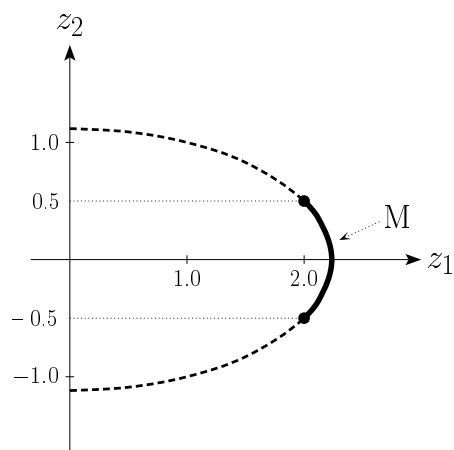


Abbildung 5.2: Darstellung der Menge M gemäss (5.2).

Im folgenden erläutern wir, was unter der Bezeichnung "vek max" verstanden werden kann. Angenommen beide Funktionen können gleichzeitig (simultan) über der Menge X *maximiert* werden, d.h. es existiert ein $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $f_1(x^*) = \max_{x \in X} f_1(x)$ und $f_2(x^*) = \max_{x \in X} f_2(x)$, dann könnte diese Maximalstelle als Lösung von (5.3) aufgefasst werden. Wie jedoch Abbildung 5.1 zeigt, existiert kein solches $x^* \in X$.

Zu beantworten ist nun die Frage: Welche $x^* \in X$ kommen als eine Lösung von (5.3) in Betracht? Drei Lösungskonzepte stellen wir im folgenden vor:

1. *Lösungskonzept*: Ein Element $x^* \in X$ heisst Maximalstelle von \mathbf{f} und damit Lösung

von (5.3), wenn kein $y \in X$ existiert mit $f_1(y) \geq f_1(x^*)$, $f_2(y) \geq f_2(x^*)$ und $f_i(y) > f_i(x^*)$ für mindestens ein i ($i = 1, 2$).

Damit ist (siehe Abbildung 5.1) jedes Element $x_1^* \in [0, 1]$ eine Maximalstelle von \mathbf{f} .

2. *Lösungskonzept:* Beim *lexikographischen* Vorgehen wird eine gegebene Reihenfolge der Zielfunktionen vorausgesetzt. Nehmen wir zunächst die Reihenfolge (f_1, f_2) an, wobei die Stelle im Tupel die Nummer in der Reihe angibt. Bezüglich dieser Reihenfolge werden folgende reellwertige Maximumaufgaben gelöst:

$$\max_{x \in X} f_1(x).$$

Besitzt diese Aufgabe eine Lösung, so wird die Menge der Lösungen mit X_0 bezeichnet, d.h. $X_0 := \{x^* \in X : f_1(x^*) = \max_{x \in X} f_1(x)\}$. Nun löst man die Maximumaufgabe

$$\max_{x \in X_0} f_2(x).$$

Alle Elemente $x^* \in X$, die auch diese Aufgabe lösen, können als eine Maximalstelle von \mathbf{f} bzw. als Lösung von (5.3) angesehen werden. Im allgemeinen liefert das lexikographische Vorgehen bei einer anderen Reihenfolge der Zielfunktionen auch andere Maximalstellen. Mit Hilfe von Abbildung 5.2 folgt, dass bei Verwendung der Reihenfolge (f_1, f_2) die lexikographische Maximalstelle bei $x_{21}^* = 0$ liegt, da $(\sqrt{5}, 0)^T$ das lexikographisch größte der Wertepaare von $(f_1(x), f_2(x))$ für alle $x \in X$ ist. Wird die Reihenfolge (f_2, f_1) betrachtet, so ist $x_{22}^* = 1$ lexikographische Maximalstelle von \mathbf{f} , da $(1/2, 2)^T$ das lexikographisch größte der Wertepaare von $(f_2(x), f_1(x))$ für alle $x \in X$ ist.

3. *Lösungskonzept:* Ein Element $x^* \in X$ könnte als eine Lösung von (5.3) aufgefasst werden, wenn x^* die Maximumaufgabe

$$\max_{x \in X} \min\{f_1(x), f_2(x)\}$$

löst. In diesem Fall erhält man $x_3^* = 1$.

Weitere Konzepte, wie z.B. die Maximierung der Funktion f_1 unter der Randbedingung, dass die Funktion f_2 gewisse Schranken nicht über- bzw. unterschreiten darf, werden von ZIMMERMANN [ZG91] und EHRGOTT [Ehr00] behandelt.

5.2 Reelle und vektorwertige Optimierungsaufgaben

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, welche $x^* \in X$ als Lösung einer Vektormaximumaufgabe betrachtet werden *könnten*. Um zu *dem* in dieser Arbeit verwendeten Lösungskonzept zu kommen, erläutern wir in diesem Abschnitt ausführlich die "vek max"-Forderung.

Betrachten wir zur Vorbereitung zuerst die reelle Maximumaufgabe

$$\max_{x \in X} f(x) \quad (5.4)$$

mit einer gegebenen reellwertigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Bei der Lösung dieser Aufgabe wird ausgenutzt, dass der Körper der reellen Zahlen total geordnet ist, d.h. für *alle* $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a \geq b$ oder (im einschliesslichen Sinn) $b \geq a$. In der Menge $\{f(x) : x \in X\}$ sind daher je zwei Elemente vergleichbar. Ein Element $x^* \in X$ heisst Lösung von (5.4), falls

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in X \quad (5.5)$$

gilt. Dafür schreibt man auch

$$x^* = \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x).$$

Gibt es kein solches Element $x^* \in X$, so betrachtet man die obere Grenze der Menge $\{f(x) : x \in X\}$. Statt "max" wird daher korrekterweise oft auch "sup" in (5.4) geschrieben, da zunächst die Existenz einer Lösung nicht vorausgesetzt werden kann. Zusammenfassend erhält man als Kenngrößen einer reellen Maximumaufgabe:

- die Menge der Bilder $\{f(x) : x \in X\}$ ist eine Teilmenge der reellen Zahlen,
- je zwei Elemente von $\{f(x) : x \in X\}$ sind vergleichbar und daher können in $\{f(x) : x \in X\}$ gemäss (5.5) maximale Elemente gesucht werden.

Kommen wir nun zu den Vektoroptimierungsaufgaben. GÖPFERT UND NEHSE [GN90] fassen die Idee der Vektoroptimierung wie folgt zusammen:

*„... Man spricht von **Vektoroptimierung**, wenn man in einer irgendwie gegebenen Menge M maximale Elemente sucht, wobei M nicht total geordnet sein muss, sondern nur eine "schwächer" Relation "kleiner" gegeben ist.“*

Eine Relation \mathcal{R} auf einer nichtleeren Menge X ist dabei eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times X$, d.h. $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Von den Lösungskonzepten aus dem vorigen Abschnitt hat sich nach GÖPFERT UND NEHSE das Lösungskonzept aus 1. durchgesetzt. Das führt zu folgender allgemeinen

Definition 5.1.

Es sei M eine nichtleere Menge versehen mit einer Relation. Ein Element $z^ \in M$ heisst **effizient**, wenn es im Sinne der definierenden Relation in M kein $z \in M$ gibt, mit*

- $z \neq z^*$ und
- z^* ist kleiner als z .

Die Menge aller solchen Elemente $z^ \in M$ heisst Menge der nichtdominierten Elemente von M , Effizienzmenge oder auch Kompromissmenge. \square*

Diese (Effizienz-) Definition ist auch gültig, wenn die Menge M als total geordnet vorausgesetzt wird, d.h. in M sind je zwei Elemente miteinander vergleichbar. Somit wird der Optimalitätsbegriff aus (5.5) ebenfalls in Definition 5.1 erfasst.

Wir betrachten in dieser Arbeit stets $M \subseteq \mathbb{R}^m$ (für gegebenes $m \in \mathbb{N}$) und verwenden folgende Relationen:

Definition 5.2.

Gegeben sei eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ sowie Vektoren $z := (z_1, \dots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $w := (w_1, \dots, w_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann definieren wir

$$\left\{ \begin{array}{l} z \succ w \\ z \succ w \\ z \sim w \end{array} \right\} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_i \geq w_i \text{ für alle } i = 1, \dots, m \\ z \succeq w \text{ und } z \neq w \\ \text{weder } z \succ w \text{ noch } w \succ z \end{array} \right\}.$$

Gilt für zwei Vektoren $z \succ w$, so sagt man, w wird von z dominiert. Die Menge der nichtdominierten Elemente einer nichtleeren Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ wird als

$$\mathcal{M}(M) := \{z^* \in M : \nexists z \in M \text{ mit } z \succ z^*\} \tag{5.6}$$

definiert. □

Eigenschaften dieser Relationen werden in Lemma 5.7 behandelt. Orientiert sich ein Entscheidungsträger an den obigen Relationen, so ist für ihn der Vektor z im Fall $z \succeq w$ mindestens so gut wie der Vektor w . Im Falle $z \succ w$ wird er z dem Vektor w vorziehen und im Falle $z \sim w$ ist der Entscheidungsträger indifferent zwischen z und w .

Die allgemeine Definition der Effizienz (siehe Definition 5.1) führt nun mit den Relationen aus Definition 5.2 zu folgender

Definition 5.3.

Es sei X eine nichtleere Menge und $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ein Element $x^* \in X$ heisst **pareto-maximal** für die Vektormaximumaufgabe

$$\text{vek max}_{x \in X} \mathbf{f}(x), \tag{5.7}$$

wenn es kein Element $x \in X$ gibt, mit

$$\mathbf{f}(x) \succ \mathbf{f}(x^*).$$

Der Vektor $\mathbf{f}(x^*)$ ist dann **effizient** bezüglich $\{\mathbf{f}(x) : x \in X\}$, d.h., $\mathbf{f}(x^*) \in \mathcal{M}(\{\mathbf{f}(x) : x \in X\})$. Alle Elemente $x^* \in X$ mit $\mathbf{f}(x^*) \in \mathcal{M}(\{\mathbf{f}(x) : x \in X\})$ bilden die Menge der Lösungen der Vektormaximumaufgabe (5.7) in dieser Arbeit. □

In Definition 5.3 wird zunächst nur die Pareto-Maximalität erfasst. In dieser Arbeit werden wir grundsätzlich davon ausgehen, dass die betrachteten Zielfunktionen maximiert werden sollen. Das stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Sollte nämlich eine Zielfunktion z.B. f_j ursprünglich minimiert werden, da diese z.B. als ein Maß für Kosten angesehen wird, dann betrachte man statt f_j die neue Zielfunktion $g_j(x) := -f_j(x)$, die nun maximiert werden muss. Es gilt nämlich

$$\min_{x \in X} f_j(x) = -\max_{x \in X} (-f_j(x)) = -\max_{x \in X} g_j(x). \quad (5.8)$$

Zur Bestimmung der nichtdominierten Elemente einer gegebenen Menge M kann die Aussage des folgenden Lemmas verwendet werden:

Lemma 5.4.

Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere Menge. Dann ist $z \in \mathcal{M}(M)$ genau dann, wenn

$$M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\} = \{z\}.$$

Beweis.

" \implies ": Es sei $z \in \mathcal{M}(M)$, dann ist gewiss auch $z \in M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\}$. Angenommen $M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\} \supset \{z\}$. Dann existiert ein Vektor w mit $w \neq z$ und $w \in M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\}$. Insbesondere gilt dann aber $w_i \geq z_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $w_j > z_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, m\}$. Das ist ein Widerspruch, da z als nichtdominiert vorausgesetzt wurde.

" \impliedby ": Angenommen es gilt $M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\} = \{z\}$ und $z \notin \mathcal{M}(M)$. Dann existiert nach Definition ein $y \in M$ mit $y \succ z$, d.h. aber $y \in M \cap \{w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq z_i, i = 1, \dots, m\}$, was wiederum zu einem Widerspruch führt. \square

Im Falle $M \subseteq \mathbb{R}^2$ legt man in jeden Punkt $(x, y)^T \in M$ ein neues Koordinatensystem mit Ursprung $(x, y)^T$. Die Koordinatenachsen sollen dabei parallel zu denen des Ursprungskordinatensystems sein. Nach Lemma 5.4 ist $(x, y)^T$ genau dann nichtdominiert bezüglich M , wenn im Durchschnitt der Menge M mit dem 1. Quadranten des neuen Koordinatensystems nur der Punkt $(x, y)^T$ liegt.

Mit (5.2) und Abbildung 5.2 erhalten wir für die Effizienzmenge des Einführungsbeispiels:

$$\mathcal{M}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : z_1^2 + 4z_2^2 = 5, 2 \leq z_1 \leq \sqrt{5}, z_2 \geq 0 \right\},$$

d.h. alle Elemente $x^* \in [0, 1]$ sind pareto-maximal.

Wie man an diesem Beispiel sehen kann, gibt es bei Vektormaximierungsaufgaben im allgemeinen viele Pareto-Maxima. Diese große Anzahl an Lösungen ist unserer Meinung nach nicht als eine Schwäche des Effizienzbegriffes zu werten, sondern vielmehr als ein Zeichen dafür, wie kompliziert und schwierig die Entscheidungssituation für den jeweiligen Entscheidungsträger ist.

Da in Definition (5.3) festgelegt wurde, welche Elemente $x^* \in X$ als Lösung der Aufgabe (5.7) betrachtet werden, müssen die mit den anderen Lösungskonzepten aus Abschnitt 5.1 gewonnenen "Lösungen" auf Pareto-Maximalität geprüft werden. Entsprechende *Effizienzaussagen* werden in GÖPFERT UND NEHSE [GN90] behandelt.

5.3 Lineare Vektormaximierungsaufgaben

Bei dieser Klasse von Vektormaximierungsaufgaben werden linearen Zielfunktionen auf einem zulässigen Bereich, der durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben wird, betrachtet. Im nächsten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen den dort eingeführten Gleichgewichten und linearen Vektormaximierungsaufgaben verdeutlicht.

Gegeben seien die natürlichen Zahlen m, n und k sowie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^k$. Damit definiert man (siehe STEUER [Ste86]) eine lineare Vektormaximierungsaufgabe wie folgt:

Definition 5.5.

Unter einer linearen Vektormaximierungsaufgabe versteht man die Vektormaximierungsaufgabe

$$\text{vek max}_{x \in X} \mathbf{f}(x), \quad (5.9)$$

wobei die Menge X gegeben ist durch

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = a \text{ und } x \succeq \mathbf{0}\}$$

und wobei gilt

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n \end{pmatrix} = Cx$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

□

Für lineare Vektormaximierungsaufgaben kann mit Hilfe von

$$\Delta := \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^T \in \mathbb{R}^m : t_k > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, m \text{ und } \sum_{k=1}^m t_k = 1\}$$

folgende Charakterisierung von Pareto-Maxima angegeben werden:

Satz 5.6.

Wir betrachten die lineare Vektormaximumaufgabe aus Definition 5.5. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Ein Element $x^* \in X$ ist ein Pareto-Maximum von (5.9),
2. Es existiert ein Vektor $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^T \in \Delta$, so dass das Element $x^* \in X$ eine Lösung der folgenden Maximierungsaufgabe ist:

$$\max_{x \in X} \sum_{k=1}^m t_k f_k(x).$$

Der Beweis dieses Satzes wird in STEUER [Ste86] geführt. □

Als Folgerung aus Satz 5.6 kann jedes Pareto-Maximum einer linearen Vektormaximumaufgabe durch das Lösen einer parametrisierten reellen linearen Maximumaufgabe bestimmt werden. Eine ähnlich Aussage zu der in Satz 5.6 werden wir im nächsten Kapitel in Satz 6.5 für Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen formulieren und beweisen.

5.4 Relationen

Wir stellen zunächst einige Definitionen zusammen, die Relationen betreffen. Dabei umgehen wir den Begriff der Ordnung bzw. Halbordnung, da diese in der Literatur nicht einheitlich definiert werden (für unterschiedliche Definitionen von Ordnung bzw. Halbordnung siehe zum Beispiel GÖPFERT UND NEHSE [GN90], DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK [RS94] oder IYANAGA UND KAWADA [IE]).

Eine Relation \mathcal{R} auf einer nichtleeren Menge X ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times X$, d.h. $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Gehört ein geordnetes Paar (x, y) zu \mathcal{R} , so schreibt man $x\mathcal{R}y$. Gilt $\mathcal{R} = X \times X$, d.h. jedes Element $x \in X$ steht mit jedem Element $y \in X$ in Relation, so nennt man X total geordnet. \mathcal{R} heisst

- reflexiv, wenn $x\mathcal{R}x$ für alle Elemente $x \in X$ gilt,
- irreflexiv, wenn $\neg x\mathcal{R}x$ für alle Elemente $x \in X$ gilt,
- transitiv, wenn für alle Elemente $x, y, z \in X$ aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ folgt, dass $x\mathcal{R}z$,
- antisymmetrisch, wenn aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}x$ folgt, dass $x = y$.

Mit diesen Definitionen erhalten wir ein Lemma, das für die Ausführungen im siebenten Kapitel von Bedeutung sein wird.

Lemma 5.7.

Die Relationen \succeq , \succ und \sim aus Definition 5.2 haben die Eigenschaften:

1. \succeq ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf \mathbb{R}^m ,
2. \succ ist eine irreflexive und transitive Relation auf \mathbb{R}^m ,
3. \sim ist eine reflexive Relation auf \mathbb{R}^m .

Mit keiner der Relationen \succeq , \succ oder \sim ist \mathbb{R}^m total geordnet. Die Relation \sim ist nicht transitiv.

Beweis.

Sämtliche Eigenschaften können unmittelbar mit Hilfe der Definition 5.2 gezeigt werden. Als Beispiel dafür, dass \mathbb{R}^m mit keiner der angegebenen Relationen total geordnet ist, betrachten wir die Vektoren

$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

In Falle, dass \mathbb{R}^m mit einer der Relationen total geordnet wäre, müsste für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}^m$ die Bedingung $x\mathcal{R}y$ oder (im einschliesslichen Sinne) $y\mathcal{R}x$ erfüllt sein. Da die Vektoren A und B nicht bezüglich der Relationen \succeq und \succ und die Vektoren A und C nicht bezüglich der Relation \sim miteinander vergleichbar sind, erhalten wir, dass \mathbb{R}^m mit keiner der angegebenen Relationen total geordnet ist.

Die Nicht-Transitivität der Indifferenzrelation erhält man ebenfalls aus (5.10), da $A \sim B$ und $B \sim C$, aber $A \succ C$ gilt. \square

Gerade das Fehlen der Transitivität der Indifferenz-Relation

$$A \sim B \quad \text{und} \quad B \sim C, \quad \text{aber} \quad A \succ C \quad (5.11)$$

wird uns ausführlich im siebenten Kapitel beschäftigen.

Ein Ansatz zur Lösung von Vektoroptimierungsaufgaben geht von der Existenz einer Skalarisierungsfunktion V aus, die es ermöglicht, die Bestimmung von Pareto-Maxima auf die Lösung reellwertiger Maximumaufgaben zurückzuführen. Dann ist ein Element $x^* \in X$ genau dann Pareto-Maximum von (5.7), wenn das Element $x^* \in X$ die reelle Maximumaufgabe

$$\max_{x \in X} V(f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad (5.12)$$

löst. In der Literatur haben wir keine Aussagen zur Existenz solcher Skalarisierungsfunktionen V mit den geforderten Eigenschaften finden können. Aus praktischer Sicht ist dabei nicht nur die Existenz, sondern vielmehr die Darstellbarkeit von V von Bedeutung.

Aktuelle Aufgabenstellungen aus dem Gebiet der Vektoroptimierung behandeln die Monographien von GÖPFERT UND NEHSE [GN90] und EHRGOTT [Ehr00]. In beiden Arbeiten werden Relationen betrachtet, die von Kegeln erzeugt werden. Das führt unter anderem dazu, dass bei geeigneter Definition eines Kegels der Vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix}$ besser ist als der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2,01 \end{pmatrix}$.

Kapitel 6

Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie der Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen. Dabei legen wir neben theoretischen Ergebnissen und Algorithmen zur Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten besonderen Wert auf das Herausarbeiten von Unterschieden zu Normalformspielen mit reellwertigen Auszahlungen.

Im ersten Abschnitt führen wir den Begriff des Pareto-Gleichgewichtes ein und diskutieren Besonderheiten dieses Gleichgewichtsbegriffes. Im zweiten Abschnitt behandeln wir den Charakterisierungssatz, mit dessen Hilfe die Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten auf die Bestimmung von Nash-Gleichgewichten in skalarisierten Spielen zurückgeführt werden kann. Das ermöglicht überdies einen eleganten Nachweis der Existenz von Pareto-Gleichgewichten. Im vorletzten Abschnitt des Kapitels wenden wir uns dann den perfekten Vektor-Gleichgewichten zu und untersuchen, ob diese Gleichgewichte eine Verfeinerung der Pareto-Gleichgewichte darstellen. Ein Vergleich mit schwachen Pareto-Gleichgewichten schliesst den inhaltlichen Teil des Kapitels.

6.1 Das Pareto-Gleichgewicht

Übertragen wir die Idee des Nash-Gleichgewichtes für Normalformspiele mit reellwertigen Auszahlungen auf solche mit vektorwertigen Auszahlungen, so ist diejenige Strategienkombination ein Pareto-Gleichgewicht, bei der ein einseitiges Abweichen eines Spielers von dieser Strategienkombination seinen Auszahlungsvektor nicht verbessert. Wieder können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass jeder Spieler seine einzelnen Ziele maximieren möchte (siehe dazu die Ausführungen zu (5.8)).

Das führt zu folgender

Definition 6.1.

Es sei $\mathcal{N}^ := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$.*

1. Eine Strategienkombination $q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **Pareto-Gleichgewicht** von \mathcal{N}^* , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \in \mathcal{M}(\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}), \quad (6.1)$$

wobei \mathcal{M} wie in Definition 5.2 gegeben ist.

2. Eine Strategienkombination $\phi^* := (\phi_1^*, \dots, \phi_n^*) \in \Phi$ ist genau dann ein **Pareto-Gleichgewicht** von \mathcal{N} , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt

$$h_i((\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)) \in \mathcal{M}(\{h_i((\phi_i, \phi_{-i}^*)) : \phi_i \in \Phi_i\}). \quad (6.2)$$

□

In der Definition eines Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen sind wir davon ausgegangen, dass für mindestens ein i ($i \in I$) $d_i \geq 2$ gilt. Der Fall $d_i = 1$ für alle i ($i \in I$) wird aber in Definition 6.1 auch abgedeckt. Damit q^* ein Pareto-Gleichgewicht ist, darf es für alle i ($i \in I$) nach (6.1) kein $\tilde{q}_i \in Q_i$ geben, so dass $H_i(q^*)$ von $H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*))$ dominiert wird, d.h. aber: es gibt kein \tilde{q}_i mit $H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*)) > H_i((q_i^*, q_{-i}^*))$. Das entspricht der Definition 3.1 eines Nash-Gleichgewichtes. Das Nash-Gleichgewicht ist also ein Spezialfall des Pareto-Gleichgewichtes; da letzteres viel älter ist, wurde in der spieltheoretischen Literatur diese Bezeichnung aus den Wirtschaftswissenschaften übernommen. Das im ersten Kapitel verbal eingeführte strenge Pareto-Gleichgewicht entspricht hier dem Pareto-Gleichgewicht.

Für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategienkombination $q_{-i} \in Q_{-i}$ für die anderen Spieler definiert man

$$BR_i(q_{-i}) := \{q_i \in Q_i : H_i((q_i, q_{-i})) \in \mathcal{M}(\{H_i((\tilde{q}_i, q_{-i})) : \tilde{q}_i \in Q_i\})\} \quad (6.3)$$

als die Menge der Pareto-besten Antworten von Spieler i auf q_{-i} . Dann gilt mit Definition 6.1: Eine Strategienkombination $q^* = (q_1, \dots, q_n^*)$ ist genau dann ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , wenn alle Strategien q_i^* aus q^* wechselseitig Pareto-beste Antworten sind, d.h. wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt: $q_i^* \in BR_i(q_{-i}^*)$.

In den Worten der Vektoroptimierung bedeutet die Bedingung (6.1) bzw. (6.2), dass für jedes i ($i \in I$) die Vektoren $H_i(q^*)$ bzw. $h_i(\phi^*)$ effizient bezüglich $\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}$ bzw. $\{h_i((\phi_i, \phi_{-i}^*)) : \phi_i \in \Phi_i\}$ sind. Da nach (2.4) die Komponenten von H_i lineare Funktionen in q_i bei festem $q_{-i} \in Q_{-i}$ sind, ist q_i^* beste Antwort auf q_{-i} genau dann, wenn q_i^* die lineare Vektormaximierungsaufgabe

$$\text{vek max}_{q_i \in Q_i} H_i((q_i, q_{-i}))$$

(siehe Definition 5.5) löst.

In der Definition des Nash-Gleichgewichtes (siehe Definition 3.1) hatten wir zwischen einem Nash-Gleichgewicht $\phi^* \in \Phi$ in der gemischten Erweiterung \mathcal{N}^* und einem Nash-Gleichgewicht $\phi^* \in \Phi$ von \mathcal{N} unterschieden. Die Bemerkung im Anschluss an das Lemma

3.2 zeigte aber, dass $\phi^* \in \Phi$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist, wenn ϕ^* ein Nash-Gleichgewicht von \mathcal{N} ist. Eine solche Beziehung gibt es bei Pareto-Gleichgewichten nicht mehr.

Um das zu zeigen, betrachten wir das Ein-Personen-Normalformspiel $\mathcal{N} := (\{1\}, \Phi_1, h_1)$ mit

$$\Phi_1 := \{1, 2, 3\}, \quad h_1(1) := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad h_1(2) := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_1(3) := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

In Abbildung 6.1 sind alle Auszahlungsvektoren $h_1(\phi_1)$ ($\phi_1 \in \Phi_1$) und im schattierten Bereich die Auszahlungsvektoren abgetragen, die der Spieler bei Verwendung gemischter Strategien erhalten kann. Mit Hilfe des zweiten Koordinatensystems und Lemma 5.4 erhalten wir das Ergebnis, dass die Strategien 1 und 2 Pareto-Gleichgewichte von \mathcal{N}^* sind. Dagegen sind alle reinen Strategien 1, 2 und 3 Pareto-Gleichgewichte von \mathcal{N} , da gilt

$$\mathcal{M}(\{h_1(\phi_1) : \phi_1 \in \Phi_1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

◇

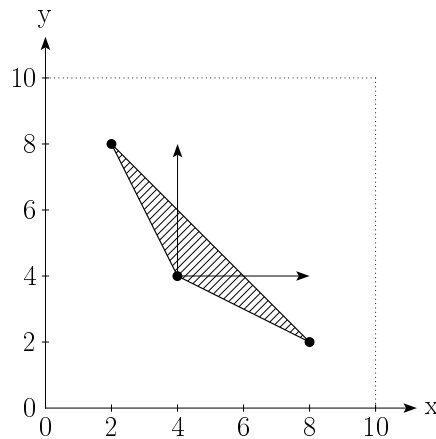


Abbildung 6.1: Beispiel zu Pareto-Gleichgewichten von \mathcal{N}^* und von \mathcal{N} .

Es gilt aber noch die folgende Aussage:

Lemma 6.2.

Es sei $\mathcal{N}^ := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Ist $\phi^* \in \Phi$ ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , dann ist ϕ^* ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N} .*

Beweis.

Angenommen ϕ^* ist kein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N} , dann existiert ein i ($i \in I$) und ein $\tilde{\phi}_i \in \Phi_i$ mit

$$h_i((\tilde{\phi}_i, \phi_{-i}^*)) \succ h_i((\phi_i^*, \phi_{-i}^*)).$$

Da allgemein $H_i(\phi) = h_i(\phi)$ für alle $\phi \in \Phi$ gilt, folgt

$$H_i((\tilde{\phi}_i, \phi_{-i}^*)) \succ H_i((\phi_i^*, \phi_{-i}^*)),$$

d.h. $H_i(\phi^*)$ wird dominiert in \mathcal{N}^* , was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. \square

Eine weitere Besonderheit bei Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen betrifft die Überprüfung der Behauptung, ob eine gegebene Strategiekombination q^* ein Pareto-Gleichgewicht darstellt. In Lemma 3.2 hatten wir gesehen, dass $q^* \in Q$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn für jeden Spieler i ($i \in I$) die Ungleichung $H_i(q^*) \geq H_i((\phi_i, q_{-i}^*))$ für jedes $\phi_i \in \Phi_i$ erfüllt ist. Eine analoge Aussage für vektorwertige Normalformspiele würde so aussehen: $q^* \in Q$ ist ein Pareto-Gleichgewicht genau dann, wenn $H_i(q^*)$ von keinem der Vektoren aus der Menge $\{H_i((\phi_i, q_{-i}^*)) : \phi_i \in \Phi_i\}$ dominiert wird. Leider ist diese Aussage im allgemeinen falsch. Um das zu zeigen betrachten wir wieder das vektorwertige Ein-Personen-Normalformspiel aus (6.4). Wie aus Abbildung 6.1 hervorgeht, sind alle $q_1^* \in Q_1$ Pareto-Gleichgewichte, für die $H_1(q_1^*)$ auf der Verbindungsgerade der Punkte $\binom{2}{8}$ und $\binom{8}{2}$ liegt. Mit der gemischten Strategie $q_1 := (1/2, 0, 1/2)^T$ erhalten wir den Auszahlungsvektor $H_1(q_1) = \binom{3}{6}$, der auf der Verbindungsgerade der Punkte $\binom{2}{8}$ und $\binom{4}{4}$ liegt. Damit wird aber $H_1(q_1)$ von keinem der Vektoren aus $\{H_1(\phi_1) : \phi_1 \in \Phi_1\} = \{\binom{2}{8}, \binom{8}{2}, \binom{4}{4}\}$ dominiert. Der Schluss, dass q_1 ein Pareto-Gleichgewicht ist, kann aber nicht gezogen werden, da der Vektor $\binom{3}{6}$ nicht auf der Verbindungsgerade der Punkte $\binom{2}{8}$ und $\binom{8}{2}$ liegt.

Es muss erwähnt werden, dass in Definition 6.1 stets *paarweise* verglichen wird, d.h. eben $H_i(q^*)$ mit $H_i((\phi_i, q_{-i}^*))$. Daher bringt das Fehlen der Transitivität der Indifferenzrelation \sim (siehe (5.11)) keine Schwierigkeit mit sich.

Beispiel

Für das Bimatrixspiel aus Abbildung 6.2 bestimmen wir nun formal und graphisch die Menge aller Pareto-Gleichgewichte.

Setzen wir $q_1 := (x, 1-x)^T$ ($x \in [0, 1]$) und $q_2 := (y, 1-y)^T$ ($y \in [0, 1]$), dann folgt

$$H_1((q_1, q_2)) = \begin{pmatrix} (-12y + 6)x + 4y + 2 \\ (7y - 4)x - 5y + 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_2((q_1, q_2)) = \begin{pmatrix} (-2x + 1)y - 3x + 5 \\ (-3x + 1)y - x + 2 \end{pmatrix}.$$

Zeichnet man die Funktionen $-12y + 6$ und $7y - 4$ sowie $-2x + 1$ und $-3x + 1$, so können die Menge der Pareto-besten Antworten für jeden Spieler (siehe (6.3)) ermittelt werden:

$$BR_1(q_2) = \begin{cases} Q_1 & \text{für } y \in [0, 1/2) \text{ oder } y \in (4/7, 1] \\ \{\binom{0}{1}\} & \text{für } y \in [1/2, 4/7] \end{cases}$$

1 \ 2	1	2
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abbildung 6.2: Ein Bimatrixspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

und

$$BR_2(q_1) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & \text{für } x \in [0, 1/3] \\ Q_2 & \text{für } x \in (1/3, 1/2) \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} & \text{für } x \in [1/2, 1] \end{cases} .$$

Mit der Bemerkung im Anschluss an (6.3) ist $(q_1^*, q_2^*) \in Q$ genau dann ein Pareto-Gleichgewicht, wenn $q_1^* \in BR_1(q_2^*)$ und $q_2^* \in BR_2(q_1^*)$ gilt. Damit sind alle $\left(\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}\right)$ mit

$$(x, y) \in \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \{1\} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{4}{7}, 1\right] \right\} \cup \left\{ \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \right\}$$

die Pareto-Gleichgewichte des Spieles in Abbildung 6.2. Die obige Menge ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

Da die Menge der Pareto-Gleichgewichte überabzählbar ist, folgt, dass eine analoge Aussage zu Satz 3.6 für Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen im allgemeinen nicht gelten kann. Das Beispiel zeigt überdies, dass die Menge der Pareto-Gleichgewichte nicht abgeschlossen bezüglich Q zu sein braucht, was nach der Bemerkung zu Satz 3.4 bei Nash-Gleichgewichten in Normalformspielen mit reellwertigen Auszahlungen stets der Fall ist.

6.2 Charakterisierung und Existenz von Pareto-Gleichgewichten

In diesem Abschnitt behandeln wir den Charakterisierungssatz für Pareto-Gleichgewichte in Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen. Diese Aussage ist aus theoretisch

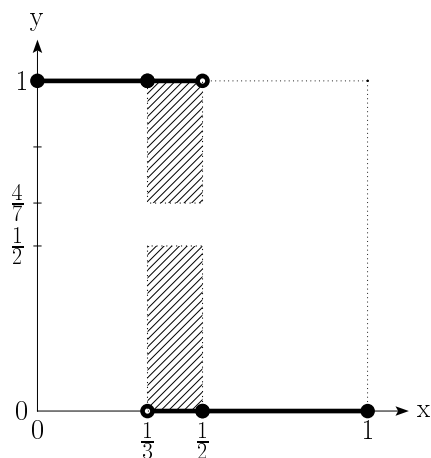


Abbildung 6.3: Zu den Pareto-Gleichgewichten des Spieles aus Abbildung 6.2.

wie praktischer Sicht interessant, da sie sowohl für den Beweis der Existenz von Pareto-Gleichgewichten als auch zur Bestimmung aller Pareto-Gleichgewichte herangezogen werden kann. Die Kernidee im Charakterisierungssatz besteht in der Umwandlung eines Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen in ein zugehöriges Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen.

Das zu einem Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen gehörende skalarisierte Normalformspiel wird wie folgt definiert:

Definition 6.3.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Weiterhin seien beliebige Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ ($i \in I$) gegeben. Für jedes $\phi \in \Phi$ betrachten wir die reelle Zahl $a_i^T h_i(\phi)$ und damit das endliche n -Personen-Normalformspiel mit reellwertigen Auszahlungen

$$\mathcal{N}_w := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (a_i^T h_i)_{i \in I}).$$

(w steht für „weighted“). Die gemischte Erweiterung von \mathcal{N}_w wird mit

$$[\mathcal{N}_w]^* = (I; (Q_i)_{i \in I}; (a_i^T H_i)_{i \in I}) \quad (6.5)$$

bezeichnet. □

Zunächst müsste in (6.5) für die Bezeichnung der Auszahlungen zum Beispiel \tilde{H}_i gewählt werden, für die nach Definition 2.3

$$\tilde{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \cdot [a_i^T h_i(\phi)]$$

für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategie $q \in Q$ gilt. Da jedoch

$$\tilde{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) [a_i^T h_i(\phi)] = a_i^T \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) h_i(\phi) = a_i^T H_i(q)$$

erfüllt ist, schreiben wir statt \tilde{H}_i kurz $a_i^T H_i$. Weiterhin kann die Bildung der gemischten Erweiterung und die Skalarisierung bei diesen Normalformspielen vertauscht werden. Bilden wir zum Spiel \mathcal{N} zuerst die gemischte Erweiterung \mathcal{N}^* und anschließend das skalarisierte Spiel $[\mathcal{N}^*]_w := (I; (Q_i)_{i \in I}; (\bar{H}_i)_{i \in I})$, so erhalten wir für die Auszahlungen

$$\bar{H}_i(q) = a_i^T \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \cdot h_i(\phi) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) [a_i^T h_i(\phi)] = a_i^T H_i(q).$$

Also sind die Auszahlungen in den Spielen $[\mathcal{N}^*]_w$ und $[\mathcal{N}_w]^*$ für jeden Spieler i ($i \in I$) und jedes $q \in Q$ gleich. Dies schreiben wir als $[\mathcal{N}^*]_w = [\mathcal{N}_w]^*$. \diamond

Im Beweis des nachfolgenden Satzes verwenden wir ein Lemma, dessen Beweis sich zum Beispiel in [Tij85] findet:

Lemma 6.4.

Es sei d eine gegebene natürliche Zahl und $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop, d.h. P ist die konvexe Hülle endlich vieler Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Ist $z \in P$ ein nichtdominiertes Element von P , d.h., $z \in \mathcal{M}(P)$, dann existiert ein Vektor $u = (u_1, \dots, u_d)^T \in \mathbb{R}^d$ mit $u_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, d$ und

$$u^T z \geq u^T x \quad \text{für alle } x \in P. \quad \square$$

Wir definieren zu einem Normalformspiel $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$ für jeden Spieler i ($i \in I$)

$$\Delta_i := \{a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id_i})^T \in \mathbb{R}^{d_i} : a_{ik} > 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, d_i \text{ und } \sum_{j=1}^{d_i} a_{ij} = 1\}$$

und erhalten den angekündigten Charakterisierungssatz für Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen.

Satz 6.5.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann gilt:

1. Ist für Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$) die Strategienkombination $q^* \in Q$ ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$, dann ist q^* ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* .
2. Ist $q^* \in Q$ ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* , dann existiert für jedes i ($i \in I$) ein Vektor $a_i \in \Delta_i$, so dass q^* Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}^*]_w$ ist.

Beweis.

1. Es sei q^* ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$. Wir müssen zeigen, dass (6.1) für alle i ($i \in I$) gilt. Dazu nehmen wir an, dass q^* kein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist. Dann existiert ein i ($i \in I$) und ein $\tilde{q}_i \in Q_i$ mit

$$H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*)) \succ H_i(q^*).$$

Mit $a_i \in \Delta_i$ erhalten wir, da q^* ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$ ist

$$a_i^T H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^*)) > a_i^T H_i(q^*) \geq a_i^T H_i((q_i, q_{-i}^*)) \quad \forall q_i \in Q_i.$$

Diese strikte Ungleichung ist jedoch nicht erfüllbar für $q_i := \tilde{q}_i$.

2. Es sei q^* ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* . Nun wählen wir ein i ($i \in I$) und definieren

$$d := d_i, \quad z := H_i(q^*) \quad \text{und} \quad P := \{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}.$$

Dann ist P ein Polytop in \mathbb{R}^{d_i} , da

$$\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\} = \left\{ \sum_{\phi_i \in \Phi_i} q_i(\phi_i) H_i((\phi_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i \right\}.$$

Da nach Voraussetzung q^* ein Pareto-Gleichgewicht ist, ist der Vektor z nichtdominiert in P . Nach Lemma 6.4 existiert ein Vektor $u_i := (u_{i1}, \dots, u_{id_i})^T \in \mathbb{R}^{d_i}$ mit $u_{ij} > 0$ für alle $j = 1, \dots, d_i$ und

$$\begin{aligned} u_i^T H_i(q^*) &\geq u_i^T x && \forall x \in \{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\} \\ &= u_i^T H_i((q_i, q_{-i}^*)) && \forall q_i \in Q_i. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Setzen wir

$$a_i := \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{d_i} u_{ij}},$$

so ist $a_i \in \Delta_i$. Mit Ungleichung (6.6) folgt

$$a_i^T H_i(q^*) \geq a_i^T H_i((q_i, q_{-i}^*)) \quad \forall q_i \in Q_i,$$

d.h., q^* ist ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}^*]_w$. Da wir i beliebig gewählt hatten, folgt die Behauptung. \square

Nach Definition 6.1 ist in einem Ein-Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (\{1\}, \Phi_1, h_1)$ die gemischte Strategie $q_1^* \in Q_1$ ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* genau dann, wenn $H_1(q_1^*) \in \mathcal{M}(\{H_1(q_1) : q_1 \in Q_1\})$ gilt. Die Bestimmung eines solchen q_1^* kann als eine spezielle lineare Vektormaximumaufgabe (siehe Abschnitt 5.3) aufgefasst werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dabei $\Phi_1 = \{1, \dots, n\}$ angenommen

werden. Die Komponenten von h_1 werden mit h_1, \dots, h_{d_1} bezeichnet. Setzt man $M := 1$, $n := |\Phi_1|$ und $m := d_1$, sowie

$$A := (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-mal}), \quad C := \begin{pmatrix} h_1(1) & h_1(2) & \cdots & h_1(n) \\ \vdots & & \vdots & \\ h_m(1) & h_m(2) & \cdots & h_m(n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a := 1,$$

so ist das Element $x^* \in X$ eine Lösung der linearen Vektormaximierungsaufgabe (5.9) aus Definition 5.5, wenn $q_1^* := x^*$ ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist und umgekehrt. Mit Satz 6.5 haben wir somit im Falle des Ein-Personen-Normalformspieles mit vektorwertigen Auszahlungen einen Spezialfall von Satz 5.6 formuliert und bewiesen.

Beispiel

Wir demonstrieren nun die Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten mit Hilfe der ersten Aussage aus Satz 6.5 anhand des Bimatrixspiel aus Abbildung 6.2.

Mit $a_1 := (\lambda, 1 - \lambda)^T$ ($\lambda \in (0, 1)$) und $a_2 := (\mu, 1 - \mu)^T$ ($\mu \in (0, 1)$) bilden wir das zu \mathcal{N} gehörende skalarisierte Normalformspiel \mathcal{N}_w . Dieses Spiel ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

	→		
		1	2
1		-1 + 2μ	1 + μ
2		3 - 3λ	1 + 7λ
1		3 + 3μ	2 + 3μ
2		6λ	5 - 3λ
	←		

Abbildung 6.4: Das zu \mathcal{N} aus Abbildung 6.2 gehörende parametrisierte Spiel \mathcal{N}_w .

In den Abbildungen 6.5 bis 6.9 werden in der linken Graphik Aussagen über Pareto-beste Antworten der Spieler auf eine gegebene gegnerische Strategie gemacht:

- Für jeden Punkt (x, y) auf der gepunkteten Linie gilt: $\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ ist Pareto-beste Antwort des Spielers 2 auf $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$.
- Für jeden Punkt (x, y) auf der gestrichelten Linie gilt: $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ ist Pareto-beste Antwort des Spielers 1 auf $\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$.

In der rechten Graphik wird jeweils der Bereich B , der dadurch entsteht, dass λ und μ die in der Abbildungsbeschriftung aufgeführten Intervalle durchläuft, schattiert oder mit Hilfe von Punkten dargestellt. Für B gilt:

- Ist $(x, y) \in B$, so ist $((\frac{x}{1-x}), (\frac{y}{1-y}))$ ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$.

Da für alle $\mu \in (0, 1)$ sowohl $-1 + 2\mu < 1 + \mu$ als auch $3 + 3\mu > 2 + 3\mu$ gilt, ergeben sich daraus die Abweichungspfeile für Spieler 2 in Abbildung 6.4. Bezüglich des Parameters λ müssen wir einige Fallunterscheidungen durchführen:

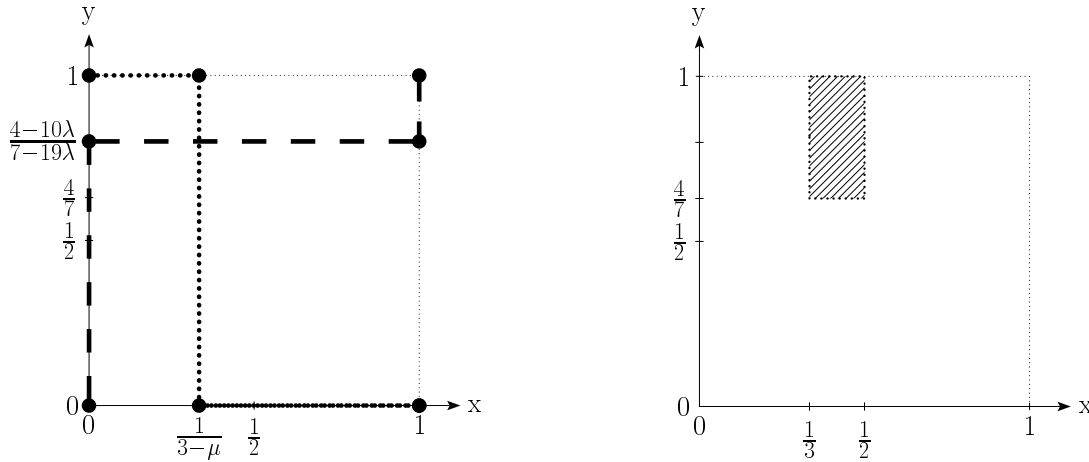


Abbildung 6.5: Beste Antworten (links) und Gleichgewichtsbereich (rechts) in Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ für $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$ und $\mu \in (0, 1)$ beliebig.

Es sei $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$: Dann ist $3 - 3\lambda > 6\lambda$ und $5 - 3\lambda > 1 + 7\lambda$. Damit besitzt das Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ genau ein Gleichgewicht in gemischten Strategien, dass mit Hilfe von Lemma 3.3 als Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden kann. Wir erhalten mit der Schreibweise $q_1 = (x, 1 - x)^T$ und $q_2 = (y, 1 - y)^T$:

$$x^* = \frac{1}{3 - \mu} \quad \text{und} \quad y^* = \frac{4 - 10\lambda}{7 - 19\lambda}. \quad (6.7)$$

Abbildung 6.5 stellt diesen Fall graphisch dar.

Ist $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$, dann folgt $3 - 3\lambda < 6\lambda$ und $5 - 3\lambda > 1 + 7\lambda$. Damit besitzt das Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ genau ein Gleichgewicht in reinen Strategien, nämlich $((\frac{0}{1}), (\frac{1}{0}))$. Dieser Fall wird in Abbildung 6.6 auf Seite 67 graphisch dargestellt.

Für den Fall $\lambda \in (\frac{2}{5}, 1)$ erhalten wir $3 - 3\lambda < 6\lambda$ und $5 - 3\lambda < 1 + 7\lambda$. Das Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ hat damit genau 3 Nash-Gleichgewichte: $((\frac{0}{1}), (\frac{1}{0}))$, $((\frac{1}{0}), (\frac{0}{1}))$ und $((\frac{x^*}{1-x^*}), (\frac{y^*}{1-y^*}))$ mit x^* und y^* aus (6.7). Abbildung 6.7 auf Seite 67 stellt diesen Fall graphisch dar.

In den Fällen $\lambda = \frac{1}{3}$ und $\lambda = \frac{2}{5}$ besitzt das Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ jeweils überabzählbar viele Nash-Gleichgewichte, wie aus den Abbildungen 6.8 und 6.9 auf Seite 68 hervorgeht. \diamond

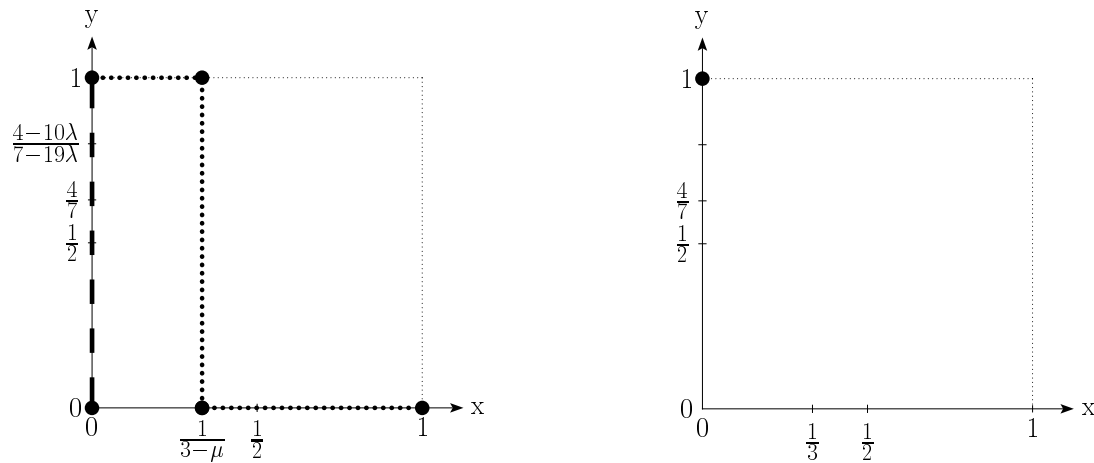


Abbildung 6.6: Beste Antworten (links) und Gleichgewichtsbereich (rechts) in Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ für $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ und $\mu \in (0, 1)$ beliebig.

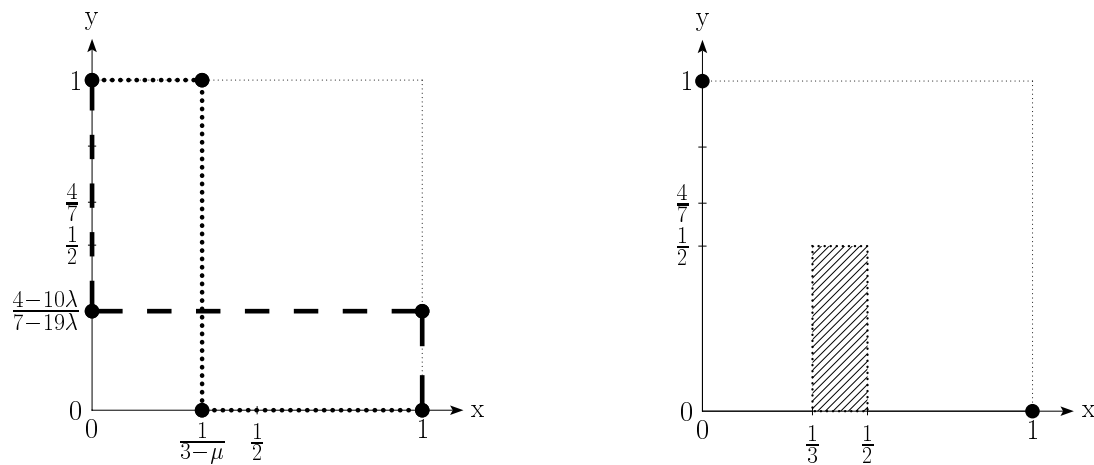


Abbildung 6.7: Beste Antworten (links) und Gleichgewichtsbereich (rechts) in Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ für $\lambda \in (\frac{2}{5}, 1)$ und $\mu \in (0, 1)$ beliebig.

Als eine Anwendung des Charakterisierungssatzes erhalten wir:

Satz 6.6.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann besitzt \mathcal{N}^* mindestens ein Pareto-Gleichgewicht.

Beweis.

Wir wählen beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$). Dann garantiert Satz 3.4 die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes $q^* \in Q$ von $[\mathcal{N}_w]^*$. Die erste Aussage von Satz 6.5 zeigt, dass q^* ein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist. \square

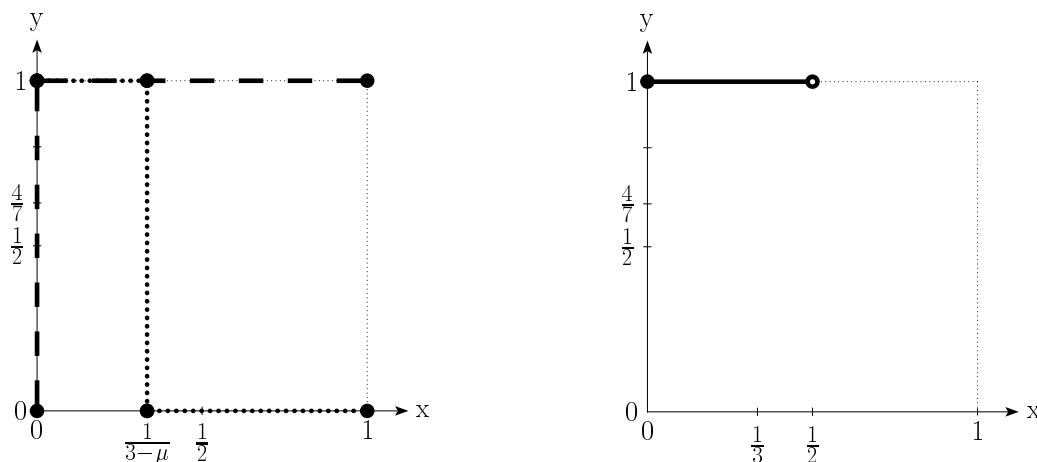


Abbildung 6.8: Beste Antworten (links) und Gleichgewichtsbereich (rechts) in Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ für $\lambda = \frac{1}{3}$ und $\mu \in (0, 1)$ beliebig.

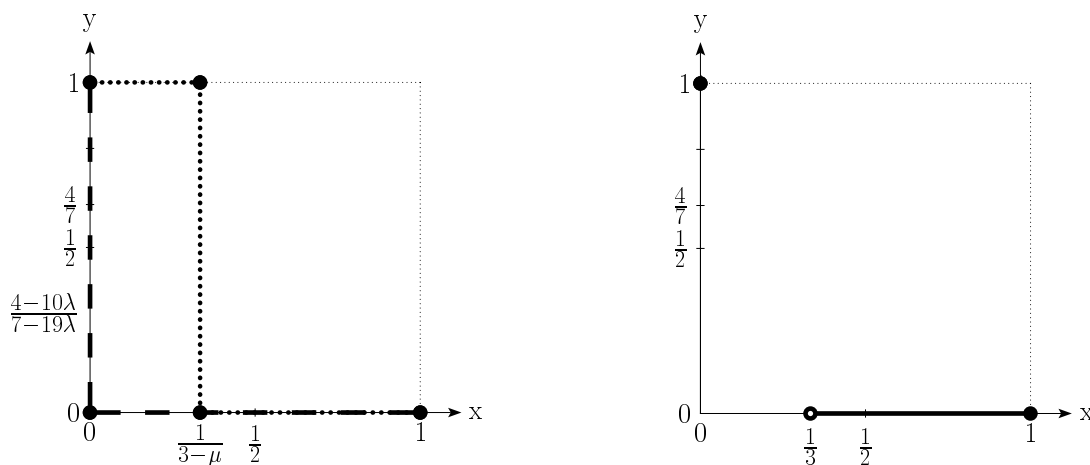


Abbildung 6.9: Beste Antworten (links) und Gleichgewichtsbereich (rechts) in Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ für $\lambda = \frac{2}{5}$ und $\mu \in (0, 1)$ beliebig.

Der folgende Algorithmus fasst das Vorgehen aus dem oben behandelten Beispiel zusammen:

Algorithmus 6.7.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$.

1. Wähle für alle i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$.
2. Bestimme alle Nash-Gleichgewichte von $(I; (Q_i)_{i \in I}; (a_i^T H_i)_{i \in I})$.
3. Wähle andere Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und wiederhole Schritt 2. □

Wenn alle Tupel (a_1, \dots, a_n) von Vektoren $a_i \in \Delta_i$ im Algorithmus betrachtet werden, so erhalten wir nach Satz 6.5 auch alle Pareto-Gleichgewichte. Da die Menge der möglichen Tupel (a_1, \dots, a_n) jedoch überabzählbar ist, wird die Bestimmung aller Pareto-Gleichgewichte mit Hilfe von Algorithmus 6.7 im allgemeinen nicht möglich sein.

6.3 Perfekte Vektor-Gleichgewichte

In diesem Abschnitt führen wir die perfekten Vektor-Gleichgewichte ein und zeigen, dass zu jedem n -Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen ein perfektes Vektor-Gleichgewicht existiert. Zwei interessante Effekte können dabei auftreten, die Unterschiede zwischen perfekten Gleichgewichten in Normalformspielen mit reellwertigen- bzw. vektorwertigen Auszahlungen aufzeigen.

In Analogie zur Definition eines perfekten Gleichgewichtes in Normalformspielen mit reellwertigen Auszahlungen zeichnet sich ein perfektes Vektor-Gleichgewicht q^* dadurch aus, dass jedes q_i^* eine Pareto-beste Antwort auf eine Folge von vollständig gemischten Strategienkombinationen ist, die ihrerseits gegen q^* konvergiert. Wir erhalten also

Definition 6.8.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Eine Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **perfektes Vektor-Gleichgewicht** von \mathcal{N}^* , wenn eine Folge $(q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}) \in Q$ existiert, so dass für alle i ($i \in I$) gilt:

1. $C(q_i^{(k)}) = \Phi_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
2. $q_i^{(k)} \rightarrow q_i^*$ für $k \rightarrow \infty$, d.h., für alle $\phi_i \in \Phi_i$ gilt $q_i^{(k)}(\phi_i) \rightarrow q_i^*(\phi_i)$ für $k \rightarrow \infty$, und
3. $H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k)})) \in \mathcal{M}(\{H_i((q_i, q_{-i}^{(k)})) : q_i \in Q_i\})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Die zwei uns hier interessierenden Effekte werden wegen ihrer Wichtigkeit im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 6.9.

Es existiert mindestens ein endliches Zwei-Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen, für das gilt:

1. Es gibt perfekte Vektor-Gleichgewichte, die keine perfekten Gleichgewichte in einem skalarisierten Normalformspiel sind.
2. Es gibt perfekte Vektor-Gleichgewichte, die keine Pareto-Gleichgewichte sind. Damit stellen die perfekten Vektor-Gleichgewichte kein Auswahlkonzept dar.

1 \ 2	1	2
1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildung 6.10: Ein Bimatrixspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

Beweis.

Der Beweis dieses Satzes wird konstruktiv geführt. Dazu betrachten wir das Bimatrixspiel in Abbildung 6.10.

Wir zeigen zunächst, dass q^* mit $q^* := (\binom{1/2}{1/2}, \binom{1}{0})$ kein Pareto-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist. Dazu nehmen wir an, q^* wäre doch ein Pareto-Gleichgewicht. Dann folgt mit $q_1^* := (\binom{1/2}{1/2})$, $q_1 := (\binom{x}{1-x})$ ($x \in [0, 1]$) und $q_2^* := (\binom{1}{0})$

$$H_1(q^*) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_1((q_1, q_2^*)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $x = 0$, so folgt

$$H_1((\binom{0}{1}, q_2^*)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \succ H_1(q^*) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann q^* kein Pareto-Gleichgewicht sein.

Als nächstes wird gezeigt, dass q^* ein perfektes Vektor-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* ist. Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$q_1^{(k)} := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q_2^{(k)} := \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4k} \\ \frac{1}{4k} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für jedes i ($i = 1, 2$) sowohl $C(q_i^{(k)}) = \{1, 2\} = \Phi_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$ als auch $q_i^{(k)}(\phi_i) \rightarrow q_i^*(\phi_i)$ für $k \rightarrow \infty$ und alle $\phi_i \in \Phi_i$. Wir zeigen zuerst, dass q_2^* Pareto-beste Antwort auf $q_1^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist. Allgemein erhalten wir mit $q_2 := (\binom{y}{1-y})$ ($y \in [0, 1]$)

$$H_2((q_1^{(k)}, q_2)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Pareto-beste Antwort auf $q_1^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, da nur für $y = 1$ der Vektor $H_2((q_1^{(k)}, q_2))$ nichtdominiert ist.

Nun zeigen wir, dass q_1^* Pareto-beste Antwort auf $q_2^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt für jedes $q_1 := \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ ($x \in [0, 1]$)

$$H_1((q_1, q_2^{(k)})) = \left(1 - \frac{1}{4k}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x}{2} \begin{pmatrix} -2 + \frac{1}{k} \\ \frac{1}{4k} \end{pmatrix}.$$

Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $-2 + \frac{1}{k} < 0$ und $\frac{1}{4k} > 0$ erfüllt sind, ist für jedes $x \in [0, 1]$ der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ Pareto-beste Antwort auf $q_2^{(k)}$, also auch $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Als letztes beweisen wir, dass es keine Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i = 1, 2$) gibt, so dass q^* ein perfektes Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$ ist. Zunächst bilden wir mit $a_1 := (\lambda, 1-\lambda)^T$ ($\lambda \in (0, 1)$) und $a_2 := (\mu, 1-\mu)^T$ ($\mu \in (0, 1)$) das zu \mathcal{N} gehörende skalarisierte Normalformspiel \mathcal{N}_w . Dieses Spiel ist in Abbildung 6.11 dargestellt.

	←	

Abbildung 6.11: Das zu \mathcal{N} gehörende parametrisierte Spiel \mathcal{N}_w .

Für die Abweichungspfeil haben wir folgende Beziehungen verwendet: Aus $\lambda \in (0, 1)$ folgt sowohl $1 - 2\lambda < 1 - \lambda$ als auch $(1 + \lambda)/2 > 0$. Wegen $\mu > 0$ ist $1 - 4\mu < 1 - 2\mu$.

Angenommen q^* wäre ein perfektes Gleichgewicht in einem Spiel $[\mathcal{N}_w]^*$ mit gewissen Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i = 1, 2$). Dann folgt aus Satz 3.9, dass q^* auch ein Nash-Gleichgewicht sein muss. Abbildung 6.11 zeigt nun aber, dass Spieler 1, wenn Spieler 2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spielt immer seine reine Strategie 2 wählen wird, d.h. $(1/2, 1/2)^T$ ist keine beste Antwort von Spieler 1 auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und kann damit keine Gleichgewichtsstrategie sein. Das ist ein Widerspruch. \square

Insbesondere zeigt der obige Satz, dass im allgemeinen die zweite Aussage aus Satz 6.5 nicht auf perfekte Vektor-Gleichgewichte und perfekte Gleichgewichte verallgemeinert

werden kann. Jedoch kann die folgende Aussage, die ein Analogon zur ersten Aussage darstellt, erhalten werden:

Satz 6.10.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Ist für Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$) q^* ein perfektes Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$, so ist q^* ein perfektes Vektor-Gleichgewicht von \mathcal{N}^* .

Beweis.

Da $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ein perfektes Gleichgewicht von $[\mathcal{N}_w]^*$ ist, existiert eine Folge $(q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}) \in Q$, die nach Definition 3.7 die Punkte 1. und 2. sowie für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_i^T H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k)})) \geq a_i^T H_i((q_i, q_{-i}^{(k)})) \quad \forall q_i \in Q_i \quad (6.8)$$

erfüllt. Diese Folge $(q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}) \in Q$ genügt auch den Punkten 1. und 2. aus Definition 6.8. Angenommen Punkt 3. wäre nicht erfüllt. Dann existiert ein i ($i \in I$), ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\tilde{q}_i \in Q_i$ mit

$$H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^{(k_0)})) \succ H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k_0)})).$$

Damit folgt aber für alle $q_i \in Q_i$ mit (6.8)

$$a_i^T H_i((\tilde{q}_i, q_{-i}^{(k_0)})) > a_i^T H_i((q_i^*, q_{-i}^{(k_0)})) \geq a_i^T H_i((q_i, q_{-i}^{(k_0)})).$$

Diese Ungleichung ist gewiss nicht für $q_i := \tilde{q}_i$ erfüllt, was ein Widerspruch ist. Damit ist q^* auch ein perfektes Vektor-Gleichgewicht. \square

Die Existenz mindestens eines perfekten Vektor-Gleichgewichtes liefert

Satz 6.11.

Es sei $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen n -Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Dann besitzt \mathcal{N}^* mindestens ein perfektes Vektor-Gleichgewicht.

Beweis.

Wir wählen für jedes i ($i \in I$) einen Vektor $a_i \in \Delta_i$ und betrachten das Normalformspiel $[\mathcal{N}_w]^*$. Nach Satz 3.8 besitzt $[\mathcal{N}_w]^*$ ein perfektes Gleichgewicht $q^* \in Q$. Aus Satz 6.10 folgt, dass q^* auch ein perfektes Vektor-Gleichgewicht ist. \square

Obwohl die Existenz und Bestimmung von Vektor-Gleichgewichten durch die Sätze 6.11 und 6.10 gesichert bzw. möglich ist, zeigt doch Satz 6.9, dass nicht jedes perfekte Vektor-Gleichgewicht auch ein Pareto-Gleichgewicht sein muss. Damit ist eine analoge Aussage zu der von Satz 3.9 nicht mehr gültig. Da das perfekte Vektor-Gleichgewicht also insbesondere kein Verfeinerungskonzept des Pareto-Gleichgewichtes darstellt, werden wir in dieser Arbeit nicht mehr darauf eingehen.

6.4 Schwache Pareto-Gleichgewichte

In diesem Abschnitt betrachten wir mit dem schwachen Pareto-Gleichgewicht, ein Gleichgewichtskonzept, das BORM ET. AL. ihrer Veröffentlichung [BvMT99] zugrundegelegt haben. Da wir im Verlauf dieser Arbeit nicht mehr auf dieses Konzept zurückkommen werden, führen wir die Definition nur für Zwei-Personen-Normalformspiele ein:

Definition 6.12.

Es sei mit $I = \{1, 2\}$ das Spiel $\mathcal{N}^* := (I; (Q_i)_{i \in I}; (H_i)_{i \in I})$ die gemischte Erweiterung des endlichen Zwei-Personen-Normalformspiels mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (h_i)_{i \in I})$. Die Strategienkombination $q^* = (q_1^*, q_2^*) \in Q$ ist genau dann ein **schwaches Pareto-Gleichgewicht** von \mathcal{N}^* , wenn für alle i ($i \in \{1, 2\}$) gilt: Es existieren kein $q_1 \in Q_1$ und kein $q_2 \in Q_2$ mit

$$\begin{aligned} H_{11}((q_1, q_2^*)) &> H_{11}((q_1^*, q_2^*)) \\ H_{12}((q_1, q_2^*)) &> H_{12}((q_1^*, q_2^*)) \\ H_{21}((q_1^*, q_2)) &> H_{21}((q_1^*, q_2^*)) \\ H_{22}((q_1^*, q_2)) &> H_{22}((q_1^*, q_2^*)), \end{aligned}$$

wobei H_{ij} die j -te Komponente des Vektors H_i ($i \in \{1, 2\}$) bezeichnet. □

Unterschiede zwischen Pareto- und schwachen Pareto-Gleichgewichten verdeutlicht das Ein-Personen-Normalformspiel mit vektorwertigen Auszahlungen $\mathcal{N} := (\{1\}, \Phi_1, h_1)$ mit

$$\Phi_1 := \{1, 2\}, \quad h_1(1) := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_1(2) := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

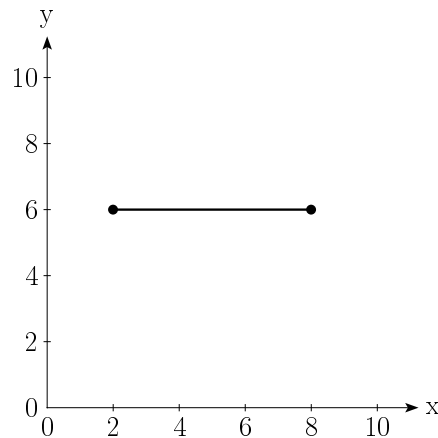


Abbildung 6.12: Unterschiede zwischen Pareto- und schwachen Pareto-Gleichgewichten.

In Abbildung 6.12 sind die Auszahlungsvektoren $H_1(q_1)$ für alle $q_1 \in Q_1$ dargestellt. Das Spiel \mathcal{N} besitzt genau ein Pareto-Gleichgewicht, nämlich die reine Strategie 2. Jedoch sind alle $q_1 \in Q_1$ *schwache* Pareto-Gleichgewichte, da für keinen Auszahlungsvektor $H_1(q_1)$ ein Auszahlungsvektor $H_1(\tilde{q}_1)$ existiert, der in *beiden* Komponenten grösser wäre.

Es kann aber gezeigt werden, dass jedes Pareto-Gleichgewicht auch ein schwaches Pareto-Gleichgewicht darstellt. Ist nämlich q^* ein Pareto-Gleichgewicht, so existiert für keinen Spieler i ($i \in I$) ein $q_i \in Q_i$ mit $H_i((q_i, q_{-i}^*)) \succ H_i(q^*)$. Damit existiert natürlich erst recht keine Strategienkombination, die zu einem Auszahlungsvektor führen würde, der echt besser in jeder Komponente ist. Diese Teilmengenbeziehung unter den Gleichgewichtskonzepten mag SHAPLEY [Sha59] dazu angeregt haben, zwischen *schwachen* und *strengen* Pareto-Gleichgewichten zu unterscheiden. Dabei sind die strengen Pareto-Gleichgewichte diejenigen, die wir in unserer Arbeit Pareto-Gleichgewichte nennen.

Der mathematische Vorteil dieser schwachen Pareto-Gleichgewichte besteht darin, dass das entsprechende perfekte Vektor-Gleichgewicht immer auch ein schwaches Pareto-Gleichgewicht ist. In diesem Fall ist also im Prinzip eine Gleichgewichtsauswahl möglich. Dagegen erscheint uns das in Definition 6.1 vorgestellte Pareto-Gleichgewicht aus der Sicht des Anwenders das natürlichere zu sein.

In der folgenden Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse, die mit beiden Gleichgewichtskonzepten gewonnen werden konnten, vergleichend dargestellt.

	Ergebnisse aus diesem Kapitel bezüglich des <i>strengen</i> Pareto-Gleichgewichtes	Ergebnisse aus aus [BvMT99] bezüglich des <i>schwachen</i> Pareto-Gleichgewichtes
Existenz eines Pareto-Gleichgewichtes	ja (Satz 6.6)	ja
Charakterisierung von Pareto-Gleichgewichten mittels Nash-Gleichgewichten	ja (Satz 6.5)	ja, analog Satz 6.5 (es müssen dabei die $a_i \in \Delta_i$ durch a_i mit $a_{ij} \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, d_i$ und $\sum_{j=1}^{d_i} a_{ij} = 1$ ersetzt werden)
Existenz eines perfekten Vektor-Gleichgewichtes	ja (Satz 6.11)	ja
Jedes perfekte Vektor-Gleichgewicht ist auch ein Pareto-Gleichgewicht	nein (Spiel aus Satz 6.9)	ja
Jedes perfekte Vektor-Gleichgewicht ist auch Nash-Gleichgewicht in einem skalarisierten Spiel	nein (Spiel aus Satz 6.9)	nein
Das Konzept des perfekten Vektor-Gleichgewichtes ist ein Auswahlkonzept	nein (Spiel aus Satz 6.9)	ja

Tabelle 6.1: Vergleich von Ergebnissen aus diesem Kapitel und den entsprechenden Aussagen aus der Arbeit [BvMT99].

6.5 Bemerkungen zur Literatur

Die Entwicklung der Theorie von Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen begann mit der von SHAPLEY [Sha59] im Jahre 1959 veröffentlichten Arbeit. In dieser formuliert und beweist er sowohl für die strengen als auch für die schwachen Pareto-Gleichgewichte eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels mit vektorwertigen Auszahlungen die Aussagen von Satz 6.5. Seit dieser Zeit haben sich insbesondere ZELENY [Zel76], NIEUWENHUIS [Nie83] und CORLEY [Cor85] mit verschiedensten Aspekten dieser Spiele, zum Beispiel numerischen Fragestellungen, auseinandergesetzt.

Für die Entwicklung der Zwei-Personen-(Nichtnullsummen)-Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen sind die Arbeiten von BORM ET. AL. [BTvdA88] und von BORM ET. AL. [BvMT99] zu nennen. In [BTvdA88] wird ein Spezialfall des Charakterisierungssatzes 6.5 bewiesen. Perfekte Vektor-Gleichgewichte bezüglich des schwachen Dominanzkonzeptes sind der Inhalt von [BvMT99]. Allgemeine Aussagen zur Struktur und Konvexität der Menge der Pareto-Gleichgewichte auch in stetigen Normalformspielen untersucht WIERZBICKI in [Wie92a] und [Wie90].

Eine axiomatische Rechtfertigung von schwachen Pareto-Gleichgewichten behandelt VOORNEFELD [VVB99]. Das reelle Analogon, also eine axiomatische Rechtfertigung von Nash-Gleichgewichten, wird zum Beispiel in BERNINGHAUS ET. AL. [BEG02] diskutiert. In NISHIZAKI UND SAKAWA [NS01] werden Normalformspiele mit vektorwertigen Auszahlungen unter Fuzzy-Aspekten studiert.

In dem vorliegenden Kapitel haben wir uns hauptsächlich an den Arbeiten [BTvdA88] und [BvMT99] von BORM ET. AL. orientiert, wobei die Herausarbeitung der Unterschiede zwischen Normalformspielen mit reell- und vektorwertigen Auszahlungen, die Verallgemeinerung von Satz 6.5 auf n -Personen-Normalformspiele und sämtliche Betrachtung zu den perfekten Vektor-Gleichgewichten in dieser Arbeit unseres Wissens erstmals formuliert werden. Die Bimatrixspiele in Abbildung 6.2 und 6.10 sind [BTvdA88] und [BvMT99] entnommen.

Kapitel 7

Extensive Spiele mit vektorwertigen Auszahlungen

In diesem letzten Kapitel entwickeln wir die Theorie der extensiven Spiele mit vektorwertigen Auszahlungen. Dabei werden wir neben theoretischen Aspekten Algorithmen zur Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten in Verhaltensstrategien sowie von Pareto-Gleichgewichten in reinen Strategien vorgestellt.

Sämtliche Ergebnisse dieses Kapitels werden hier erstmals vorgestellt.

7.1 Das Pareto-Gleichgewicht

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir wieder davon ausgehen, dass jeder Spieler seine einzelnen Ziele maximieren möchte (siehe dazu die Ausführungen zu (5.8)) und definieren in Anlehnung an 6.1 wie folgt:

Definition 7.1.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

1. Eine Strategienkombination $b^* := (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ ist genau dann ein **Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien** von Γ , wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt:

$$H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \in \mathcal{M}(\{H_i((b_i, b_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}), \quad (7.1)$$

wobei \mathcal{M} wie in Definition 5.2 gegeben ist.

2. Eine Strategienkombination $q^* := (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ ist genau dann ein **Pareto-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$ (vgl. Definition 2.10), wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt:

$$H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \in \mathcal{M}(\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}) .\square$$

Für jeden Spieler i ($i \in I$) und jede Strategienkombination $b_{-i} \in B_{-i}$ für die anderen Spieler definiert man

$$BR_i(b_{-i}) := \{b_i \in B_i : H_i((b_i, b_{-i})) \in \mathcal{M}(\{H_i((\tilde{b}_i, b_{-i})) : \tilde{b}_i \in B_i\})\}$$

als die Menge der Pareto-besten Antworten von Spieler i auf b_{-i} . Dann gilt mit Definition 7.1: Eine Strategienkombination $b^* = (b_1, \dots, b_n)$ ist genau dann ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ , wenn alle Strategien b_i^* aus b^* wechselseitig Pareto-beste Antworten sind, d.h. wenn für alle Spieler i ($i \in I$) gilt: $b_i^* \in BR_i(b_{-i}^*)$.

In Lemma 4.2 hatten wir gesehen, dass $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ ist, wenn für alle Spieler i ($i \in I$) und alle reinen Strategien $\phi_i \in \Phi_i(\subset B_i)$ die Ungleichung

$$H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \geq H_i((\phi_i, b_{-i}^*))$$

gilt. Eine analoge Aussage kann für die hier betrachteten Spiele nicht gelten. Um das zu sehen, betrachten wir das Ein-Personen-Normalformspiel \mathcal{N} aus (6.4). Dieses Spiel kann auch als die Normalformdarstellung eines extensiven Spieles der Länge 1 aufgefasst werden. Dazu muss Spieler 1 an der Wurzel nur die 3 Alternativen 1, 2 oder 3 als Auswahlen zur Verfügung haben. Je nachdem für welche Alternative l ($l \in \{1, 2, 3\}$) er sich entscheidet, erhält er den Auszahlungsvektor $h_1(l)$. Nun können wir die Argumentation im Anschluss an Lemma 6.2 verwenden und sehen, da in diesem Beispiel $Q_1 = B_1$ gilt, dass der Vektor $b_1 = (1/2, 0, 1/2)^T$ kein Pareto-Gleichgewicht von Γ ist, obwohl $H_1(b_1)$ von keinem der Vektoren aus $\{H_1(\phi_1) : \phi_1 \in \Phi_1\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ dominiert wird.

7.2 Charakterisierung und Existenz von Pareto-Gleichgewichten in extensiven Spielen

In diesem Abschnitt formulieren wir eine zu Satz 6.5 analoge Aussage für Verhaltensstrategien in extensiven n -Personenspielen mit vektorwertigen Auszahlungen. Damit kann im Anschluss sowohl die Existenz als auch ein Algorithmus zur Bestimmung von Pareto-Gleichgewichten in Verhaltensstrategien angegeben werden.

Wie bei Normalformspielen mit vektorwertigen Auszahlungen definieren wir zunächst das zu einem extensiven Spiel mit vektorwertigen Auszahlungen gehörende skalarisierte Spiel:

Definition 7.2.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und $a_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ ($i \in I$) beliebige Vektoren. Für jeden Endknoten $x \in E$ betrachten wir die reelle Zahl $a_i^T h_i(x)$. Das extensive n -Personenspiel mit reellwertigen Auszahlungen

$$\Gamma_w := (I; K; (a_i^T h_i)_{i \in I}; P; w; U)$$

(w steht für „weighted“) heisst das zu Γ gehörende skalarisierte Spiel. □

Für dieses skalarisierte Spiele Γ_w können wir nach Definition 2.10 die Normalformdarstellung $\mathcal{N}(\Gamma_w)$ und deren gemischte Erweiterung $[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^*$ betrachten. $[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^*$ kann aber auch auf anderen Wegen gewonnen werden. Diese sind in Abbildung 7.1 aufgeführt. Der linke Ast entspricht gerade dem Weg über Definition 2.10. Die rechten Äste gehen zunächst zur Normalformdarstellung $\mathcal{N}(\Gamma)$ von Γ über. Im linken Fall des rechten Astes wird dieses Normalformspiel wie in Definition 6.3 zu $[\mathcal{N}(\Gamma)]_w$ skalarisiert und anschließend die gemischte Erweiterung $[[\mathcal{N}(\Gamma)]_w]^*$ betrachtet. Im ganz rechten Ast wird sofort die gemischte Erweiterung von $\mathcal{N}(\Gamma)$ und anschliessend das skalarisierte Spiel $[[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w$ gebildet.

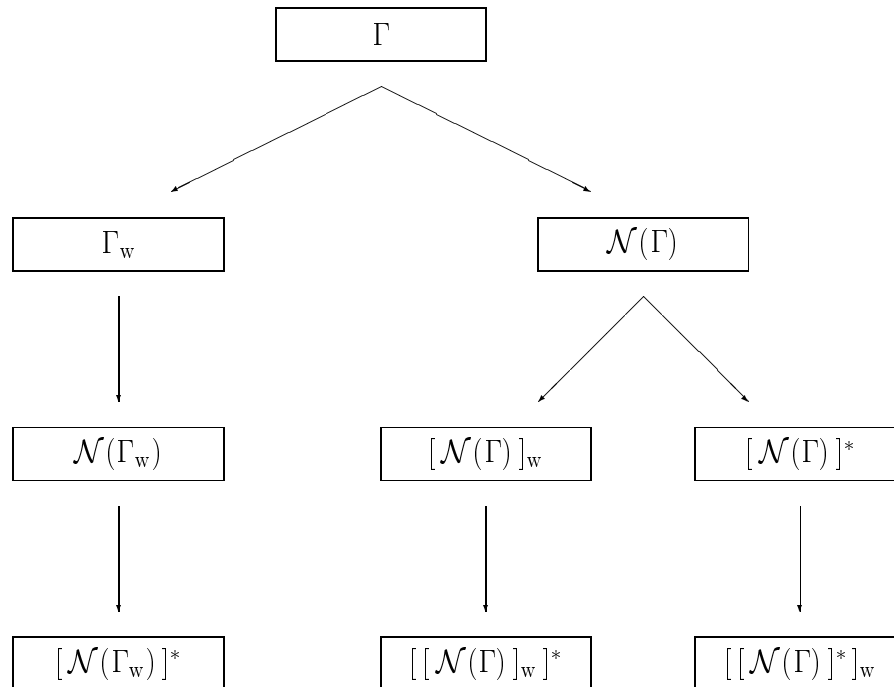


Abbildung 7.1: Unterschiedliche Wege der Mischung und Skalarisierung der Normalformdarstellung von Γ .

Wie im folgenden Lemma behauptet wird, führen alle drei Wege zum selben Resultat.

Lemma 7.3.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und $a_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ ($i \in I$) beliebige Vektoren. Dann gilt:

$$[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^* = [[\mathcal{N}(\Gamma)]_w]^* = [[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w,$$

wobei diese Gleichheit bedeuten soll, dass für alle $q \in Q$ die entsprechenden Auszahlungen an jeden Spieler i ($i \in I$) übereinstimmen.

Beweis.

Im Beweis ermitteln wir die drei Darstellungen für die Mischungen und sehen dann, dass die Auszahlungen gleich sind.

1. Zu $[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^*$:

Mit den Definition 7.2 und 2.10 erhalten wir $\mathcal{N}(\Gamma_w) = (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (\tilde{h}_i)_{i \in I})$, wobei für alle i ($i \in I$) und alle $\phi \in \Phi$ gilt

$$\tilde{h}_i(\phi) = \sum_{x \in E} r(\phi, x) \cdot [a_i^T h_i(x)] = a_i^T \sum_{x \in E} r(\phi, x) \cdot h_i(x).$$

Aus Definition 2.3 folgt $[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^* = (I; (Q_i)_{i \in I}; (\tilde{H}_i)_{i \in I})$, wobei

$$\tilde{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \tilde{h}_i(\phi) \quad (7.2)$$

für alle i ($i \in I$) und alle $q \in Q$ gilt.

2. Zu $[[\mathcal{N}(\Gamma)]_w]^*$:

Aus $\mathcal{N}(\Gamma) = (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (\hat{h}_i)_{i \in I})$ folgt mit Definition 6.3 $[\mathcal{N}(\Gamma)]_w = (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (a_i^T \hat{h}_i)_{i \in I})$. Mit Definition 2.3 erhalten wir $[[\mathcal{N}(\Gamma)]_w]^* = (I; (Q_i)_{i \in I}; (\hat{H}_i)_{i \in I})$, wobei

$$\hat{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) [a_i^T \hat{h}_i(\phi)] \quad (7.3)$$

für alle i ($i \in I$) und alle $q \in Q$ gilt.

3. Zu $[[\mathcal{N}(\Gamma)]_w]^*$:

Aus $\mathcal{N}(\Gamma) = (I; (\Phi_i)_{i \in I}; (\hat{h}_i)_{i \in I})$ folgt mit Definition 2.3 $[\mathcal{N}(\Gamma)]^* = (I; (Q_i)_{i \in I}; (\bar{H}_i)_{i \in I})$ mit

$$\bar{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \hat{h}_i(\phi) \quad (7.4)$$

für alle i ($i \in I$) und alle $q \in Q$. Dann erhalten wir mit Definition 6.3 $[[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w = (I; (Q_i)_{i \in I}; (a_i^T \bar{H}_i)_{i \in I})$.

4. Da für jedes i ($i \in I$) und jedes $\phi \in \Phi$

$$\tilde{h}_i(\phi) = \sum_{x \in E} r(\phi, x) \cdot [a_i^T h_i(x)] = a_i^T \sum_{x \in E} r(\phi, x) \cdot h_i(x) = a_i^T \hat{h}_i(\phi)$$

gilt, folgt aus (7.2), (7.3) und (7.4)

$$\tilde{H}_i(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \tilde{h}_i(\phi) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) [a_i^T \hat{h}_i(\phi)] = \hat{H}_i(q) = a_i^T \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) \hat{h}_i(\phi) = a_i^T \bar{H}_i(q).$$

Damit sind für jeden Spieler i ($i \in I$) und für jedes $q \in Q$ die entsprechenden Auszahlungen in den Spielen gleich. Das war zu zeigen. \square

Nun kommen wir zum angekündigten Charakterisierungssatz:

Satz 7.4.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen. Dann gilt:

1. Ist für Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$) die Strategienkombination $b^* \in B$ ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ_w , dann ist b^* ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ .
2. Ist $b^* \in B$ ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ , dann existiert für jedes i ($i \in I$) ein Vektor $a_i \in \Delta_i$, so dass b^* ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ_w ist.

Beweis.

Vorbemerkungen. Es sei $b^* \in B$ gegeben. Aus Satz 2.12 erhalten wir für jedes i ($i \in I$) die Existenz einer Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in Q$ mit $q_i^* = q_i^*(b_i^*) \in Q_i$ (q_i^* ist nur von b_i^* abhängig) und

$$r((b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*), x) = r((q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*), x)$$

für alle Endknoten $x \in E$. Damit folgt

$$H_i((b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)) = H_i((q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)).$$

Überdies folgt weiter aus Satz 2.12 für alle i ($i \in I$)

$$\{H_i((b_i, q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\} = \{H_i((q_i(b_i), q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\} \subset \{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}$$

und

$$\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\} = \{H_i((b_i(q_i), q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\} \subset \{H_i((b_i, q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\},$$

also

$$\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\} = \{H_i((b_i, q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}.$$

1. Da b^* ein Nash-Gleichgewicht von Γ_w ist, folgt für alle i ($i \in I$) und für alle $q_i \in Q_i$

$$\begin{aligned} a_i^T H_i((q_i, q_{-i}^*)) &= a_i^T \left(\sum_{x \in E} r((q_i, q_{-i}^*), x) h_i(x) \right) = a_i^T \left(\sum_{x \in E} r((b_i(q_i), q_{-i}^*), x) h_i(x) \right) \\ &= \dots = a_i^T \left(\sum_{x \in E} r((b_i(q_i), b_{-i}^*), x) h_i(x) \right) = a_i^T H_i((b_i(q_i), b_{-i}^*)) \\ &\leq a_i^T H_i((b_i^*, b_{-i}^*)) = a_i^T H_i((q_i^*, q_{-i}^*)), \end{aligned}$$

d.h. aber, dass q^* ist ein Nash-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^*$ ist. Nach Lemma 7.3 ist

$$[\mathcal{N}(\Gamma_w)]^* = [[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w.$$

Mit der ersten Aussage von Satz 6.5 folgt, dass q^* ein Pareto-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$ ist. Damit erhalten wir für jedes i ($i \in I$)

$$\begin{aligned} H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) &= H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) \in \mathcal{M}(\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}) \\ &= \mathcal{M}(\{H_i((b_i, q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}) \\ &= \mathcal{M}(\{H_i((b_i, b_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}), \end{aligned}$$

d.h. aber, dass (b_1^*, \dots, b_n^*) ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ ist.

2. Da (b_1^*, \dots, b_n^*) ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ ist, folgt für alle i ($i \in I$)

$$\begin{aligned} H_i((q_1^*, \dots, q_n^*)) &= H_i((b_1^*, \dots, b_n^*)) \in \mathcal{M}(\{H_i((b_i, b_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}) \\ &= \mathcal{M}(\{H_i((b_i, q_{-i}^*)) : b_i \in B_i\}) \\ &= \mathcal{M}(\{H_i((q_i, q_{-i}^*)) : q_i \in Q_i\}), \end{aligned}$$

d.h. aber, (q_1^*, \dots, q_n^*) ist ein Pareto-Gleichgewicht von $[\mathcal{N}(\Gamma)]^*$. Mit der zweiten Aussage von Satz 6.5 folgt die Existenz von Vektoren $a_1 \in \Delta_1, \dots, a_n \in \Delta_n$, so dass q^* Nash-Gleichgewicht von $[[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w$ ist. Da

$$[[\mathcal{N}(\Gamma)]^*]_w = [\mathcal{N}(\Gamma_w)]^*$$

folgt für jedes i ($i \in I$) und für alle $b_i \in B_i$

$$a_i^T H_i((b_i, b_{-i}^*)) = \dots = a_i^T H_i((q_i(b_i), q_{-i}^*)) \leq a_i^T H_i((q_i^*, q_{-i}^*)) = a_i^T H_i((b_i^*, b_{-i}^*)),$$

d.h. aber, dass b^* ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ_w ist. \square

Die erste Aussage dieses Satzes ermöglicht nun sofort den Existenznachweis mindestens eines Pareto-Gleichgewichtes in Verhaltensstrategien in einem extensiven n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen:

Satz 7.5.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen. Dann besitzt Γ mindestens ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien.

Beweis.

Wir wählen beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$). Dann garantiert Satz 4.3 die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes in Verhaltensstrategien $b^* \in B$ von Γ_w . Die erste Aussage von Satz 7.4 zeigt, dass b^* ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ ist. \square

Zur Berechnung von Pareto-Gleichgewichten in Verhaltensstrategien kann wie folgt vorgegangen werden:

Algorithmus 7.6.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

1. Wähle für alle i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$.
2. Bestimme alle Nash-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien von Γ_w .
3. Wähle andere Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und wiederhole Schritt 2. □

Prinzipiell könnten mit Hilfe des Algorithmus alle Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien ermittelt werden. Aus praktischer Sicht wird man sich jedoch oft mit einzelnen Gleichgewichten zufrieden geben müssen (vergleiche dazu die Bemerkung im Anschluss an Algorithmus 6.7).

7.3 Teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte

Bei extensiven n -Personenspielen mit reellwertigen Auszahlungen hatten wir gesehen, dass das Konzept der Teilspielperfektheit im Prinzip eine Gleichgewichtsauswahl ermöglicht. Ausserdem können damit unplausible Gleichgewichte ausgeschlossen werden. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem vektorwertigen Analogon.

Da die Definition 4.4 eines Teilspiels für allgemeine extensive Spiele ohne Unterscheidung in reellwertig- bzw. vektorwertig eingeführt wurde, können wir uns hier ohne Änderungen auf diese beziehen. Die Teilspielperfektheit wird nun wie folgt definiert:

Definition 7.7.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen. Ein Pareto-Gleichgewicht $b^* := (b_1^*, \dots, b_n^*) \in B$ in Verhaltensstrategien von Γ ist genau dann **teilspielperfekt**, wenn für jedes Teilspiel $\Gamma' := (I'; K'; (h'_i)_{i \in I'}; P'; w'; U')$ von Γ die Einschränkung von b^* auf U' ein Pareto-Gleichgewicht von Γ' ist. □

Mit der gleichen Argumentation wie in Anschluss an Definition 4.5 werden wir im folgenden nur noch Aussagen für Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien formulieren und beweisen.

Für die Bestimmung einzelner teilspielperfekter Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien kann die Aussage des folgenden Satzes verwendet werden:

Satz 7.8.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen. Ist für Vektoren $a_i \in \Delta_i$ ($i \in I$) $b^* \in B$ ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ_w , dann ist b^* ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ .

Beweis.

Wir wählen für jeden Spieler i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und betrachten das zu Γ gehörende skalarisierte Spiel Γ_w . Weiterhin sei Γ' ein Teilspiel von Γ und Γ'_w das dazu gehörende skalarisierte Spiel. Da b^* ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ_w ist, ist die Einschränkung $b^{*'} von b^* auf Γ'_w ein Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ'_w . Die erste Aussage von Satz 7.4 impliziert nun, dass $b^{*'}$ ein Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ' ist. Da Γ' beliebig gewählt war, ist b^* ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht von Γ . $\square$$

Aus diesem Satz erhalten wir die Existenz eines teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien:

Satz 7.9.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen. Dann besitzt Γ mindestens ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien.

Beweis.

Wir wählen für jeden Spieler i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und betrachten das zu Γ gehörende skalarisierte Spiel Γ_w . Dieses Spiel besitzt nach Satz 4.6 ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien $b^* \in B$. Dieses ist nach Satz 7.8 auch ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in Verhaltensstrategien von Γ . \square

Einige teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien können mit dem folgenden Algorithmus gewonnen werden:

Algorithmus 7.10.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen.

1. Wähle für alle i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$.
2. Bestimme alle teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien von Γ_w .
3. Wähle andere Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und wiederhole Schritt 2. \square

Zum Abschluss dieses Abschnittes betrachten wir das Ein-Personenspiel in Abbildung 7.2. Mit Hilfe von Abbildung 7.3 sehen wir, dass alle reine Strategien al, ar, bl, br Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien von Γ sind. Sie sind überdies alle teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte von Γ , was direkt an dem extensiven Spiel überprüft werden kann.

Angenommen es existiere ein Vektor $a_1 \in \Delta_1$ ($a_1 := (\alpha, 1 - \alpha)^T, \alpha \in (0, 1)$), so dass bl ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht von Γ_w ist. Damit muss im bei x'_0 beginnenden Teilspiel die Alternative l gewählt werden. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$2 \cdot \alpha + 8 \cdot (1 - \alpha) > 6$$

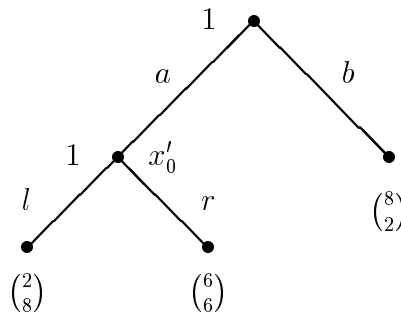


Abbildung 7.2: Ein extensives Ein-Personenspiel Γ mit vektorwertigen Auszahlungen.

oder äquivalent dazu $\alpha < 1/3$ ist. Es sei nun $\alpha < 1/3$. Die Alternative b wird an der Wurzel des Spieles genau dann gewählt, wenn

$$8 \cdot \alpha + 2 \cdot (1 - \alpha) > 2 \cdot \alpha + 8 \cdot (1 - \alpha),$$

was äquivalent zu $\alpha > 1/2$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zu $\alpha < 1/3$, d.h. es existiert *kein* $a_1 \in \Delta_1$, so dass bl ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht von Γ_w ist. Dieses Beispiel zeigt, dass im allgemeinen mit Algorithmus 7.10 *nicht* alle teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien gefunden werden können.

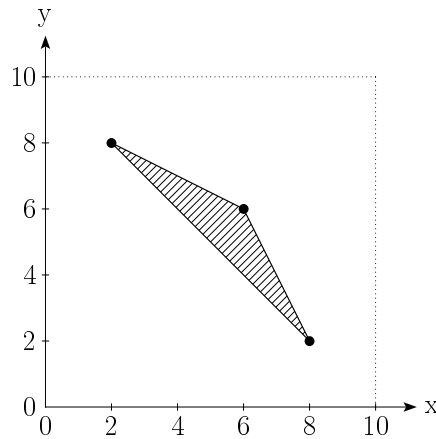


Abbildung 7.3: Menge der Auszahlungsvektoren zum Spiel aus Abbildung 7.2.

7.4 Extensive Spiele mit vollkommener Information

Nun wenden wir uns der speziellen Klasse der extensiven n -Personenspiele mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information zu. Das Ziel in diesem Abschnitt besteht im Nachweis der Existenz von Pareto-Gleichgewichten in reinen Strategien und der Angabe zweier Berechnungsverfahren.

Mit den Aussagen aus dem letzten Abschnitt beweisen wir direkt die Existenz eines teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichtes in *reinen* Strategien.

Satz 7.11.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information. Dann besitzt Γ mindestens ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweis.

Wir wählen für jeden Spieler i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und betrachten das zu Γ gehörende skalarisierte Spiel Γ_w . Dieses Spiel besitzt nach Satz 4.8 ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien $\phi^* \in \Phi \subset B$. Dieses ist nach Satz 7.8 auch ein teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht in reinen Strategien von Γ . \square

Algorithmus 7.12.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information.

1. Wähle für alle i ($i \in I$) beliebige Vektoren $a_i \in \Delta_i$.
2. Bestimme alle teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien von Γ_w .
3. Wähle andere Vektoren $a_i \in \Delta_i$ und wiederhole Schritt 2. \square

Wie wir im letzten Abschnitt bereits gesehen haben, liefert dieser Algorithmus im allgemeinen nicht alle Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien. Daher wollen wir nun eine zu der Rückwärtsinduktion aus Abschnitt 4.3 ähnliche Vorgehensweise zur Lösung von extensiven Spielen mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information herleiten. Zunächst zeigen wir aber an zwei Gegenbeispielen, dass das Vorgehen der Rückwärtsinduktion keinesfalls bei wörtlicher Übertragung zu richtigen Ergebnissen führen muss.

7.4.1 Erster Effekt

Als ein Kennzeichen der Rückwärtsinduktion hatten wir im vierten Kapitel bemerkt:

„Im Falle $P(x_0) \geq 1$ betrachtet der in x_0 entscheidende Spieler $P(x_0)$ nur seine Erwartungsauszahlungen für die Teilspiele Γ_j ($j \in J$) bzw. Teilbäume K_j ($j \in \bar{J}$) und wählt eine Alternative aus, bei der das Spiel in den (oder einen) Knoten x_j mit der höchsten Auszahlung für Spieler $P(x_0)$ in dem zugehörigen Teilspiel bzw. Teilbaum übergeht. ... Insbesondere ist jede Kombination von teilspielperfekten Gleichgewichten aus den Teilspielen Γ_j ein teilspielperfektes Gleichgewicht von Γ .“

Versuchen wir dieses Vorgehen auf das Spiel in Abbildung 7.4 zu übertragen: Da Spieler 1 zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ indifferent ist, entschliesst er sich zunächst für die Betrachtung der Alternative r am Knoten x'_0 . An der Wurzel x_0 muss er deshalb die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ miteinander vergleichen. Da er wiederum zwischen beiden indifferent ist, entscheidet er sich zunächst für die Alternative b am Knoten x_0 . Zieht nun Spieler 1 *nur* diese beiden Auszahlungsvektoren, die er ja in den entsprechenden Teilspielen erhalten würde, in Betracht, so erhält er die Strategiekombination (b, r) als teilspielperfektes Pareto-Gleichgewicht. Diese Strategiekombination ist aber nicht einmal ein Pareto-Gleichgewicht, denn Spieler 1 kann sich bei der Wahl von (a, l) den Auszahlungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ sichern.

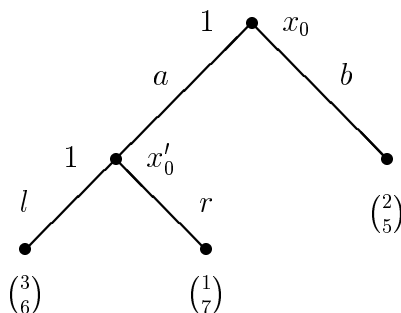


Abbildung 7.4: Ein extensives Ein-Personenspiel Γ mit vektorwertigen Auszahlungen.

Für diesen ersten Effekt ist das Fehlen der Transitivität der Indifferenzrelation \sim verantwortlich. Im allgemeinen gilt nämlich *nicht*

$$A \sim B \quad \text{und} \quad B \sim C \quad \implies \quad A \sim C .$$

Für das Spiel in Abbildung 7.4 ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Die Rückwärtsinduktion in extensiven Spielen mit reellwertigen Auszahlungen benutzt die Transitivität bezüglich der Relation $=$ von reellen Zahlen: $[(a = b \text{ und } b = c) \implies a = c]$ für alle reellen Zahlen a, b, c .

7.4.2 Zweiter Effekt

Im vierten Kapitel hatten wir weiterhin zum Verfahren der Rückwärtsinduktion bemerkt:

„... teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte aus den Teilspielen Γ_j ($j \in J$) können insbesondere wenn $P(x_0) = 0$ gilt, zu einem Nash-Gleichgewicht für Γ zusammengefasst werden. Jede Kombination von teilspielperfekten Gleichgewichten aus Γ_j ergibt ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Γ .“

Angenommen Spieler 1 wählt im linken Teilspiel von Abbildung 7.5 die Alternative r und im rechten Teilspiel die Alternative a , so erhält er, wenn er diese teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte zu (r, a) für das gesamte Spiel zusammenfasst, die Auszahlung $H_1((r, a)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$. Diese Kombination ist sicher kein Pareto-Gleichgewicht für das gesamte Spiel, denn es gilt z.B. $H_1((l, b)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, also

$$H_1((l, b)) \succ H_1((r, a)).$$

Offenbar können also hier die teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte der einzelnen Teilspiele *nicht* mehr zu einem Pareto-Gleichgewicht des gesamten Spiels zusammengefasst werden. Dieser zweite Effekt kommt dadurch zustande, dass im allgemeinen

$$A \sim B \quad \text{und} \quad C \sim D \quad \implies \quad \alpha A + (1 - \alpha) C \sim \alpha B + (1 - \alpha) D$$

($\alpha \in [0, 1]$) *nicht* gilt.

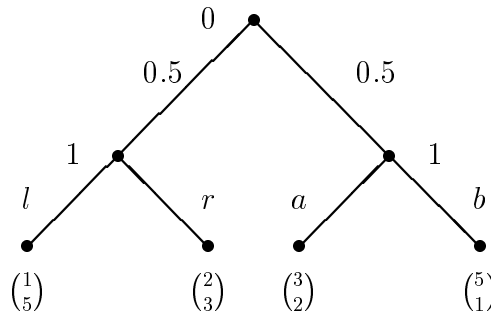


Abbildung 7.5: Ein extensives Ein-Personenspiel Γ mit vektorwertigen Auszahlungen und Zufallszug.

7.4.3 Eine vektorwertige Rückwärtsinduktion

In diesem Abschnitt stellen wir eine vektorwertige Rückwärtsinduktion vor, die es im Prinzip ermöglicht, *alle* teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien zu bestimmen. Die beiden in Abschnitt 7.4.1 und 7.4.2 dargestellten Effekte geben dabei einen Rahmen vor, wie eine vektorwertige Rückwärtsinduktion nur funktionieren kann bzw. welche Effekte man in diesem Verfahren zu beachten hat. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis zu Satz 4.8.

Algorithmus 7.13. (vektorwertige Rückwärtsinduktion)

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information. Es sei $M(\Gamma) = N$.

1. Betrachte alle Teilspiele Γ' von Γ mit $M(\Gamma') = 1$

- Ist $P(x_0^i) = 0$, so bestimme die zu erwartende Auszahlung für jeden Spieler i ($i \in I$).

- Ist $i := P(x'_0) \geq 1$, so bezeichne B'_i die Menge der Verhaltensstrategien von Γ' . Spieler i bestimmt alle Auswahlen l^* ($l^* \in \{1, \dots, a(x'_0)\}$) mit

$$H_i(l^*) \in \mathcal{M}(\{H_i(b_i) : b_i \in B'_i\}).$$

$\phi_i^* := l^*$ ist damit nach Definition ein Pareto-Gleichgewicht.

2. Von $k = 1$ bis $N - 1$ durchlaufe die Schritte:

- Betrachte jedes Teilspiel Γ' von Γ mit der Länge $M(\Gamma') = k + 1$.
- Jedes dieser Teilspiele Γ' besitzt wiederum Teilspiele Γ_j ($j \in J$) mit $M(\Gamma_j) \leq k$.

Es sei $P(x'_0) = 0$. Für jedes Teilspiel Γ_j ($j \in J$) wurde im letzten Schritt die Menge aller teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte von Γ_j ermittelt. Nun betrachte die Menge **aller** reinen Strategienkombinationen von Γ' , die eingeschränkt auf jedes Teilspiel Γ_j ($j \in J$) ein Pareto-Gleichgewicht bilden. Wähle aus dieser Menge alle ϕ^* aus, für die die Definition 7.1 für das Spiel Γ' , also für jeden Spieler in Γ' erfüllt ist.

Es sei $P(x'_0) \geq 1$. Bilde wieder die Menge **aller** reinen Strategienkombinationen für das Spiel Γ' deren Einschränkung auf alle Teilspiele Pareto-Gleichgewichte sind, lasse aber für Spieler $P(x'_0)$ die Entscheidung am Knoten x'_0 noch offen, d.h. zunächst sind alle l ($l \in \{1, \dots, a(x'_0)\}$) erlaubt. Spieler $P(x'_0)$ wähle nun diejenigen Strategienkombinationen, für die die Pareto-Gleichgewichtsbedingung aus Definition 7.1 in Γ' für $P(x'_0)$ erfüllt ist. \square

Wegen der Endlichkeit des Spielbaumes und damit der Menge der reinen Strategien, endet der Algorithmus stets nach endlich vielen Schritten mit einem teilspielperfekten Pareto-Gleichgewicht.

Beispiel

Diesen Algorithmus führen wir an einem Beispiel vor. Dazu betrachten wir das extensive Zwei-Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen Γ in Abbildung 7.6. Es ist $M(\Gamma) = 4$.

Dieses Spiel besitzt genau zwei Teilspiele der Länge 1. Sie beginnen bei x_1 bzw. x_4 . Für das in x_4 beginnende Teilspiel erhalten wir für die Menge aller Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien $\{L_2, R_2\}$ und für das in x_1 beginnende Teilspiel die Menge aller Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien $\{l_1, r_1\}$.

Das einzige Teilspiel der Länge 2 beginnt im Knoten x_2 . Als Kandidaten für teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien kommen für dieses Teilspiel Paare der Menge

$$\{(l_1, l_2), (l_1, r_2), (r_1, l_2), (r_1, r_2)\}$$

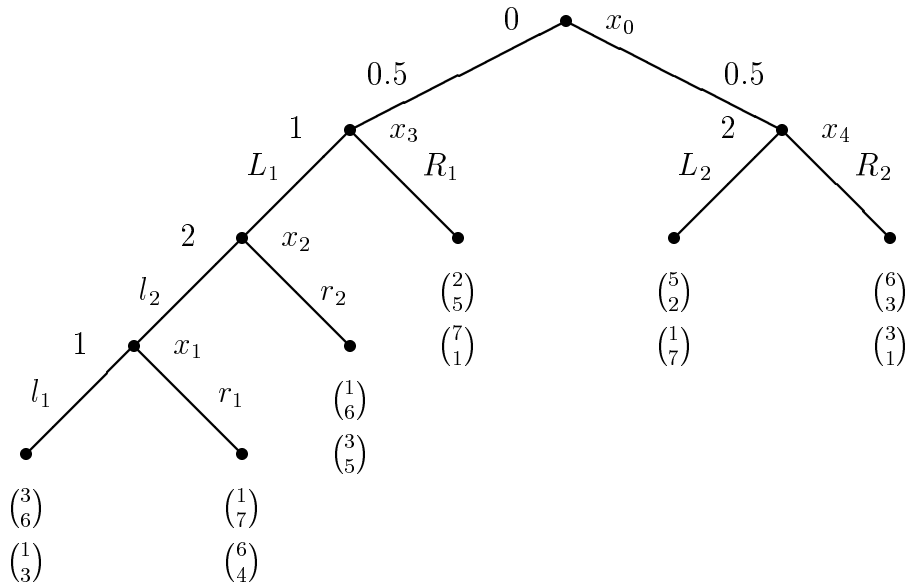


Abbildung 7.6: Ein extensives Zwei-Personenspiel Γ mit vektorwertigen Auszahlungen und Zufallszug.

in Frage, da deren Einschränkung auf das Teilspiel beginnend in x_1 jeweils ein Pareto-Gleichgewicht ist. Da $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhalten wir für die Menge der teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien

$$\{(l_1, r_2), (r_1, l_2), (r_1, r_2)\}.$$

Das einzige Teilspiel der Länge 3 beginnt im Knoten x_3 . Als Kandidaten für teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien kommen für dieses Teilspiel nur noch

$$\{((L_1, l_1), r_2), ((R_1, l_1), r_2), ((L_1, r_1), l_2), ((R_1, r_1), l_2), ((L_1, r_1), r_2), ((R_1, r_1), r_2)\}.$$

in Frage. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, sind alle Strategienkombinationen der obigen Menge in denen Spieler 2 die Alternative r_2 wählt Pareto-Gleichgewichte des Teilspiels beginnend in x_3 . $((L_1, r_1), l_2)$ ist ebenfalls ein Pareto-Gleichgewicht, da alle Auszahlungsvektoren bei Abweichung des Spielers 1 indifferent zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind. Die Strategienkombination $((R_1, r_1), l_2)$ ist dagegen *kein* Pareto-Gleichgewicht, da die Abweichung von Spieler 1 auf die reine Strategie (L_1, l_1) eine Verbesserung für diesen Spieler bedeutet. *Hätte* Spieler 1 nur zwischen den Auszahlungsvektoren der zugehörigen Teilspiele, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ verglichen, so *wäre*, da diese Vektoren indifferent sind, $((R_1, r_1), l_2)$ ein Pareto-Gleichgewicht. An dieser Stelle tritt der erste Effekt aus Abschnitt 7.4.1 auf, der zeigt, dass es im Gegensatz zu extensiven Spielen mit reellwertigen Auszahlungen *nicht* genügt, nur die Aktionen an den Entscheidungsknoten x_3 in Betracht zu ziehen.

Für das gesamte Spiel Γ erhalten wir nun als Kandidaten für teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte:

- $((L_1, l_1), (L_2, r_2)), ((L_1, l_1), (R_2, r_2)),$
- $((R_1, l_1), (L_2, r_2)), ((R_1, l_1), (R_2, r_2)),$
- $((L_1, r_1), (L_2, l_2)), ((L_1, r_1), (R_2, l_2)),$
- $((L_1, r_1), (L_2, r_2)), ((L_1, r_1), (R_2, r_2)),$
- $((R_1, r_1), (L_2, r_2)), ((R_1, r_1), (R_2, r_2)).$

Um nun zu prüfen, welche dieser Kandidaten Pareto-Gleichgewichte von Γ sind, betrachten wir das zu Γ gehörende Normalformspiel $\mathcal{N}(\Gamma)$, siehe Abbildung 7.7. Dabei geben die Sterne diejenigen reinen Strategiekombinationen an, die Pareto-Gleichgewichte von $\mathcal{N}(\Gamma)$ und damit von Γ sind.

Wir erhalten das Ergebnis, dass alle obigen Paare bis auf $((L_1, r_1), (R_2, r_2))$ Pareto-Gleichgewichte von Γ und damit nach Konstruktion auch teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte von Γ sind. Bei der Betrachtung der Strategiekombination $((L_1, r_1), (R_2, r_2))$ tritt der zweite Effekt aus Abschnitt 7.4.2 auf, der zeigt, dass im Gegensatz zu extensiven Spielen mit reellwertigen Auszahlungen *nicht* beliebige teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte aus den Teilspielen zu einem Pareto-Gleichgewicht des gesamten Spiels zusammengefasst werden können. \diamond

1 \ 2	(L_2, l_2)	(L_2, r_2)	(R_2, l_2)	(R_2, r_2)
(L_1, l_1)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$
(L_1, r_1)	$\begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$
(R_1, l_1)	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
(R_1, r_1)	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ * $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Abbildung 7.7: Die Normalformdarstellung des Spieles Γ aus Abbildung 7.6.

Zur Anwendung von Algorithmus 7.13 auf das Spiel in Abbildung 7.6 erhalten wir folgendes Ergebnis: In diesem Spiel sind alle Pareto-Gleichgewichte auch teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte, so dass sich in diesem Beispiel keine Gleichgewichtsauswahl mittels des

Konzeptes der Teilspielperfektheit ergibt. Da die Bestimmung der teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte mit Hilfe von Algorithmus 7.13 schon in diesem kleinen Spiel aufwendig ist, sollte bei anderen Beispielen überlegt werden, ob nicht gleich in der zu Γ gehörenden Normalformdarstellung alle Pareto-Gleichgewichte in reinen Strategien ermittelt werden sollten, für die im Anschluss mit Hilfe von Γ geprüft wird, ob sie auch teilspielperfekt sind. Zumindest bei Zwei-Personenspielen, die sich in Bimatrixform darstellen lassen, könnte diese Vorgehensweise den Aufwand verringern.

Die perfekten Vektor-Gleichgewichte in einem extensiven n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen Γ können in Analogie zu den perfekten Gleichgewichten in extensiven Spielen mit reellwertigen Auszahlungen, also mit Hilfe der Agentennormalform, definiert werden. Betrachtet man ein Spiel Γ , bei dem jeder Spieler nur *einen* Informationsbezirk besitzt, so stimmt die Agentennormalform von Γ mit der Normalformdarstellung $\mathcal{N}(\Gamma)$ überein. Somit ist dann jedes perfekte Vektor-Gleichgewicht von Γ per Definition ein perfektes Vektor-Gleichgewicht von $\mathcal{N}(\Gamma)$. In Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, dass es perfekte Vektor-Gleichgewichte von $\mathcal{N}(\Gamma)$ geben kann, die *keine* Pareto-Gleichgewichte sind. Dieser Fall trifft hier natürlich auch zu. Deshalb betrachten wir keine perfekten Vektor-Gleichgewichte in extensiven n -Personenspielen mit vektorwertigen Auszahlungen.

In Analogie zu Satz 4.10 kann nun folgende Aussage formuliert werden:

Satz 7.14.

Es sei $\Gamma := (I; K; (h_i)_{i \in I}; P; w; U)$ ein extensives n -Personenspiel mit vektorwertigen Auszahlungen und vollkommener Information, d.h. $|A| = 1$ für alle $A \in U$. Dann kann jedes teilspielperfekte Pareto-Gleichgewicht in reinen Strategien durch die verallgemeinerte Rückwärtsinduktion erhalten werden.

Dieser Beweis kann unmittelbar mit Hilfe des Algorithmus 7.13 geführt werden. \square

Wir fassen zusammen: Für die Klasse der extensiven n -Personenspiele mit vektorwertigen Auszahlungen haben wir einen Existenzsatz für Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien und einen weiteren Existenzsatz für teilspielperfekte Pareto-Gleichgewichte in Verhaltensstrategien bewiesen. Für Spiele mit vollkommener Information konnten wir darüber hinaus den Satz von Kuhn übertragen, der die Existenz eines teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichtes in reinen Strategien sichert, und zwei Algorithmen zur Bestimmung von teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichten in reinen Strategien angeben. Algorithmus 7.13 verallgemeinert dabei die Rückwärtsinduktion aus Abschnitt 4.3.

Ob einer dieser Algorithmen oder aber der Weg über die Normalform im konkreten Fall zu bevorzugen ist, lässt sich im allgemeinen nicht entscheiden; vielmehr wird dies von der speziellen Form des zu behandelnden Spiels abhängen. Für den Konflikt zwischen den United States und dem Iraq, der ausführlich in AVENHAUS UND KRIEGER [AK03] behandelt wird, konnten die teilspielperfekten Pareto-Gleichgewichte einfach mit Hilfe der vektorwertigen Rückwärtsinduktion bestimmt werden. Im Falle der Rambouillet-Verhandlungen, die in derselben Arbeit behandelt werden, konnte das dazugehörige extensive Spiel nur über die Transformation in die Normalform gelöst werden.

Literaturverzeichnis

- [AC95] R. Avenhaus and M. J. Canty. The Linear Complementarity Problem and its Applications to the Solution of Bimatrix Inspection Games. *Berichte des Forschungszentrums Jülich, Nr. 3055*, 1995.
- [AK03] R. Avenhaus and Th. Krieger. Formal Methods for Forecasting Outcomes of Negotiations on Interstate Conflicts. *IASFOR-Bericht*, 2003.
- [Ave99] R. Avenhaus. *Vorlesungen zur Nicht-kooperativen Spieltheorie*. Universität der Bundeswehr München, 1999.
- [Ave01] R. Avenhaus. Game Theory and the Elements of Negotiation Processes. *PIN Points Network Newsletter*, Vol. 16:4–5, 2001.
- [BEG02] S. K. Berninghaus, K.-M. Ehrhart, and W. Güth. *Strategische Spiele: Eine Einführung in die Spieltheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 2002.
- [BTvdA88] P. Borm, S. Tijs, and J. van den Aarssen. Pareto equilibria in multiobjective games. *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 60:302–312, 1988.
- [Bub79] V. Bubelis. On equilibria in finite games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 8:65–79, 1979.
- [BvMT99] P. Borm, F. van Megen, and S. Tijs. A Perfectness Concept for Multicriteria Games. *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 49:401–412, 1999.
- [Can99] M. J. Canty. *Zweipersonenspiele*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1999.
- [Cor85] H. N. Corley. Games with vector payoffs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 47:491–498, 1985.
- [Din69] W. Dinkelbach. *Sensitivitätsanalysen und parametrische Optimierung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1969.
- [Ehr00] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 2000.
- [Eic93] J. Eichberger. *Game Theory for Economists*. Academic Press Inc., San Diego u.a., 1993.

- [FT91] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game Theory*. MIT Press, Cambridge MA, London, 1991.
- [GN90] A. Göpfert and R. Nehse. *Vektoroptimierung: Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1990.
- [GS53] D. Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Contribution to the Theory of Games II*, pages 245–266. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [Güt99] W. Güth. *Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1999.
- [Han74] T. Hansen. On the approximation of Nash equilibrium points in an n -person noncooperative game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 26:622–637, 1974.
- [HLRR90] M. Hellwig, W. Leininger, P. J. Reny, and A. J. Robinson. Subgame perfect equilibrium in continuous games of perfect information: An elementary approach to existence and approximation by discrete games. *Journal of Economic Theory*, Vol. 52:406–422, 1990.
- [IE] S. Iyanaga and Y. Kawada (Eds.). *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. The MIT Press, Cambridge, Mass., last edition.
- [Knu68] D. E. Knuth. *Fundamental Algorithms. The Art of Computer Programming Vol. I*. Addison-Wesley, Reading Mass., 1968.
- [Kre02] V. A. Kremenyuk. *International Negotiation: Analysis, Approaches, Issues*. Jossey-Bass Inc. Publishers, San Fransisco, second edition, 2002.
- [Kuh53] H. W. Kuhn. Extensive Games and the Problem of Information. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Contribution to the Theory of Games I*, pages 193–216. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [LH64] C. E. Lemke and J. T. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 12:413–423, 1964.
- [Meh97] A. Mehlmann. *Wer gewinnt das Spiel?* Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1997.
- [Mye91] R. B. Myerson. *Game Theory : Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, 1991.
- [Nas51] J. F. Nash. Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, Vol. 54:286–295, 1951.

- [Nie83] J. W. Nieuwenhuis. Some minimax theorems in vector-valued functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 40:463–475, 1983.
- [NS01] I. Nishizaki and M. Sakawa. *Fuzzy and multiobjective games for conflict resolution*. Physica-Verlag, Heidelberg New York, 2001.
- [PV92] H. Peters and K. Vrieze. *A Course in Game Theory*. Verlag der Augustinus-Buchhandlung, Aachen, 1992.
- [Rie93] Ch. Rieck. *Spieltheorie: Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*. Gabler Verlag, Wiesbaden, 1993.
- [Ros81] J. Rosenmüller. *The Theory of Games and Markets*. North-Holland, Amsterdam New York u.a., 1981.
- [RS94] F. Reinhardt and H. Soeder. *dtv-Atlas zur Mathematik, Band I*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1994.
- [RSZ79] B. Rauhut, N. Schmitz, and E.-W. Zachow. *Spieltheorie*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1979.
- [Sca67] H. Scarf. The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 15:1328–1343, 1967.
- [Sel75] R. Selten. Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 4:25–55, 1975.
- [Sel82] R. Selten. Einführung in die Theorie der Spiele mit unvollständiger Information. *Schriften des Vereins für Socialpolitik, Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften*, Neue Folge Band 126: Information in der Wirtschaft:81–147, 1982.
- [Sha59] L. S. Shapley. Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 1:57–61, 1959.
- [Ste86] R. E. Steuer. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. John Wiley and Sons, New York, Chichester u.a., 1986.
- [Tij85] S. Tijs. *Non-cooperative Game Theory*. Lecture Notes, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, 1985.
- [vD87] E. van Damme. *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1987.
- [vS02] B. von Stengel. Computing equilibria for two-person games. In R. J. Aumann and S. Hart, editors, *Handbook of Game Theory*, volume 3, pages 1723–1759. Elsevier, Amsterdam, 2002.

- [VVB99] M. Voornefeld, D. Vermeulen, and P. Borm. Axiomatizations of Pareto Equilibria in Multicriteria Games. *Games and Economic Behavior*, Vol. 28:146–154, 1999.
- [Wie90] A. P. Wierzbicki. Multiple criteria solutions in noncooperative games, part i, ii, and iii. *Discussion Paper No. 283, 285, 288, Kyoto Institute of Economic Research*, 1989/1990.
- [Wie92a] A. P. Wierzbicki. Multiple Criteria Games: Theory and Applications. *Working Paper, IIASA*, 1992.
- [Wie92b] H. Wiese. *Entscheidungs- und Spieltheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1992.
- [Zel76] M. Zeleny. Games with multiple payoffs. *International Journal of Game Theory*, Vol. 4:179–191, 1976.
- [ZG91] H.-J. Zimmermann and L. Gutsche. *Multi-Criteria Analyse: Einführung in die Theorie der Entscheidungen bei Mehrfachzielsetzungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg u.a., 1991.