Algebra Übungen 1 WS04/05

1. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. In dem Monoid $(M_n(R), \cdot)$ der $n \times n$ Matrizen mit Eintragungen in R (bzgl. Matrizenmultiplikation) ist ein Element M genau dann invertierbar, wenn $\det(M)$ ein invertierbares Element von R ist.

2. Finden Sie möglichst viele Unterhalbgruppen des Monoids $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Wieviele endliche Unterhalbgruppen gibt es? Haben alle Unterhalbgruppen, die Monoide sind, dasselbe neutrale Element wie $(\mathbb{Z}, \cdot)$?

3. Seien X, Y nichtleere Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Eine Linksinverse von f ist eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$; eine Rechtsinverse von f ist eine Funktion $h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

(a) $\exists\, g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (d.h. f hat eine Linksinverse) $\iff$ f ist injektiv.

(b) $\exists\, h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ (d.h. f hat eine Rechtsinverse) $\iff$ f ist surjektiv.

(c) Im Monoid $(X^X, \circ)$ der Funktionen auf X sind die invertierbaren Elemente genau die bijektiven Funktionen.

4. Für nicht-leere Teilmengen A, B eines Monoids $(H, \cdot)$ ist das Komplexprodukt von A und B defniert als

$$AB = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

(Statt 1-elementiger Teilmengen schreibt man nur das entsprechende Element an, also aB statt $\{a\}B$.) Zeigen Sie, daß die nicht-leeren Teilmengen von H mit dieser Multiplikation ein Monoid bilden, und bestimmen Sie die invertierbaren Elemente in diesem Monoid.

5. Sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe. In der Menge der Worte über dem Alphabet $H \cup \{(,), \cdot\}$ sind die „Produkte" induktiv definiert wie folgt:

(i) Jedes $a \in H$ ist ein Produkt.

(ii) Wenn P und Q Produkte sind, dann ist auch $(P \cdot Q)$ ein Produkt.

Ein Produkt P heißt Produkt der Elemente $a_1, \dots a_n \in H$ (in dieser Reihenfolge), wenn genau das Wort $a_1 \dots a_n$ überbleibt, wenn man alle Klammern und Multiplikationszeichen in P wegläßt.

Jedes Produkt bezeichnet (durch Ausmultiplizieren) ein Element von H. Zeigen Sie, daß alle Produkte von $a_1, \dots a_n$ (in dieser Reihenfolge) in H dasselbe Element bezeichnen. Tip: zeigen Sie, daß jedes Produkt von $a_1, \dots a_n$ dasselbe Element ergibt wie das rechtsbündig geklammerte Produkt $(a_1 \cdot (a_2 \cdot (\dots\dots (a_{n-2} \cdot (a_{n-1} \cdot a_n))\dots)))$.

6. Sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe [ein Monoid], a, $b \in H$, m, $n \in \mathbb{N}$, $[m, n \in \mathbb{N}_0]$, dann gilt

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(b) $(a^m)^n = a^{mn}$

(b) $a \cdot b = b \cdot a \Longrightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Formulieren Sie auch die analogen Regeln für additiv geschriebene Halbgruppen.

7. Sei R ein Ring; a heiße Links-Nullteiler, wenn $\exists b \in R$ mit $b \neq 0$ und $a \cdot b = 0$. Dann ist für $a \in R$ äquivalent:

(1) a ist links kürzbar (d.h. $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$)

(2) a ist kein Links-Nullteiler

(3) $L_a \colon R \to R$, $L_a(x) = a \cdot x$ ist injektiv.

(Analoges gilt für rechts.) Folgerung: ein Ring ist genau dann nullteilerfrei, wenn jedes Element (rechts und links) kürzbar ist.

8. Sei R ein kommutativer Ring.

(i) Wenn $a \in R$ ein Nullteiler und $b \in R$ beliebig, dann ist ab ein Nullteiler.

(ii) Die Menge der Nicht-Nullteiler von R ist multiplikativ abgeschlossen, d.h., wenn a kein Nullteiler und b kein Nullteiler, dann ist auch ab kein Nullteiler.

9. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und a, b, $c \in R$. Zeigen Sie

(i) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$

(ii) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(iii) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ und $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

10. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, a, $b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$ und n, $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie

(i) $(-a)^k = (-1)^k a^k$

(ii) $(na) \cdot (mb) = (n \cdot m)(a \cdot b)$ (Hier ist $n \cdot m$ das Produkt in $\mathbb{Z}$.)

(iii) Wenn R ein Einselement 1_R hat, dann ist $na = (n1_R) \cdot a = a \cdot (n1_R)$.

11. Sei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe mit einem Element $e \in G$, sodaß

(1) $\forall a \in G \quad e \cdot a = a$ (e ist linksneutrales Element) und

(2) $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G \quad a^{-1} \cdot a = e$ (jedes a hat ein Linksinverses),

dann ist G eine Gruppe.

(Mit rechtsneutralem Element und Rechtsinversen geht's natürlich auch.)

12. Sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe, sodaß für alle $a \in H$ sowohl $L_a \colon H \to H$ ($L_a(x) = a \cdot x$) als auch $R_a \colon H \to H$ ($R_a(x) = x \cdot a$) surjektiv sind, dann ist $(H, \cdot)$ eine Gruppe.

13. Sei $R \neq \{0\}$ ein endlicher nullteilerfreier Ring. Dann ist R ein Schiefkörper. (Bemerkung: Tatsächlich ist — nach dem Satz von Wedderburn — R dann sogar ein Körper.)