7. a) $F = (p \land q \land r \land s) \lor ((p \land s) \to (\neg r \lor \neg q)))$ ist eine Tautologie und damit erfüllbar.

Beweis. (Methode von Quine)

$$
\begin{array}{lrl}
(1) & F_{p \mapsto \mathsf{T}} & = (\mathsf{T} \land q \land r \land s) \lor ((\mathsf{T} \land s) \to (\neg r \lor \neg q) \\
 & & \equiv (q \land r \land s) \lor (s \to (\neg r \lor \neg q)) \\
(1.1) & F_{p,s \mapsto \mathsf{T}} & = (q \land r \land \mathsf{T}) \lor (\mathsf{T} \to (\neg r \lor \neg q)) \\
 & & \equiv (q \land r) \lor (\neg r \lor \neg q) \equiv (q \land r) \lor \neg(q \land r) \equiv \mathsf{T} \\
(1.2) & F_{p,s \mapsto \mathsf{F}} & = (q \land r \land \mathsf{F}) \lor (\mathsf{F} \to (\neg r \lor \neg q)) \equiv \mathsf{F} \lor \mathsf{T} \equiv \mathsf{T} \\
(2) & F_{p \mapsto \mathsf{F}} & = (\mathsf{F} \land q \land r \land s) \lor ((\mathsf{F} \land s) \to (\neg r \lor \neg q) \\
 & & \equiv \mathsf{F} \lor (\mathsf{F} \to (\neg r \lor \neg q)) \equiv \mathsf{F} \lor \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}
\end{array}
$$

F ist eine Tautologie weil (1) $F\{p \mapsto \mathsf{T}\}$ und (2) $F\{p \mapsto \mathsf{F}\}$ Tautologien sind. (1) ist eine Tautologie weil (1.1) und (1.2) Tautologien sind. □

b) *Lösung.* Sei A eine aussagenlogische Formel, die weder Negationen noch `False` enthält. Da wir nur Erfüllbarkeit von A beweisen müssen, reicht es zu zeigen, dass es eine Belegung gibt, mit der A wahr ist. Wir zeigen nun mittels struktureller Induktion, dass wenn alle Atome in A mit wahr belegt werden, auch A wahr ist:

Basis: Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- A ist eine atomare Formel: dann kann A mit dem Wahrheitswert `T` belegt werden und somit ist die ganze Formel A wahr.
- A ist ein Wahrheitswertsymbol: dann kann A laut Vorraussetzung nur `True` sein und damit ist A wahr.

Schritt: Wir beweisen die Aussage für die zusammengesetzten Formeln $(A \land B), (A \lor B), (A \to B)$ unter der Annahme, dass A und B wahr sind, wenn alle Atome mit wahr belegt werden (*Induktionsannahme*). Für $\neg A$ müssen wir nichts zeigen, da es die Vorraussetzung nicht erfüllt.

Wenn A und B beide wahr sind, folgt aus der Definition der Junktoren sofort, dass auch $(A \land B)$, $(A \lor B)$ und $(A \to B)$ wahr sind.

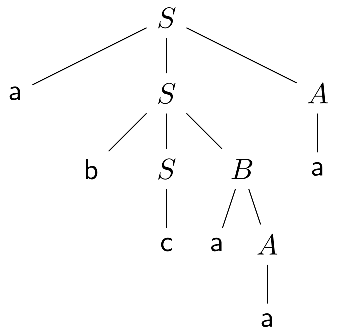
□

8. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{b} = x \in E}{E \vdash \mathsf{b} = x}\,(\text{a})}{E \vdash x = \mathsf{b}}\,(\text{s}) \qquad \dfrac{}{\mathsf{a} = \mathsf{a}}\,(\text{r})}{E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{a})}\,(\text{k}) \qquad \dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, x) \in E}{E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, x)}\,(\text{a})}{E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b})}\,(\text{i},\{x \to \mathsf{b}\})}{E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b})}\,(\text{t})$$

□

9. *Lösung.* a)



b) G_1 ist eindeutig, da es für jedes Wort $x \in \mathsf{L}(G_1)$ nur genau eine Linksableitung gibt. Mit den Regeln für S erhält man jeweils nur Wörter mit unterschiedlichen Präfixen, alleine mit diesen Regeln könnte also keine Mehrdeutig entstehen. Der hintere Teil der Wörter (der aus den As und Bs abgeleitet wird) kann auch nicht mit unterschiedlichen Linksableitungen erzeugt werden.

c) $G_2 = (\{S\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$S \to \mathsf{aa}S\mathsf{b} \mid \mathsf{c}$$

□

10. *Lösung.*

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x_1 - 1 + x_2 + 1 = a\}\ x_2 := x_2 + 1\ \{x_1 - 1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0\}\ x_1 := x_2 + 1\ \{x_1 + x_2 = a + 1\}}\,[\mathrm{a}]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{x_1 - 1 + x_2 = a\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1 + x_2 = a + 1\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{a}]^{\equiv}}{\{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0\}\ x_1 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{s}]}{\{x_1 + x_2 = a\}\ \textsf{while}\ x_1 \neq 0\ \textsf{do}\ x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \textsf{end}\ \{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 = 0\}}\,[\mathrm{w}]}{\{x_1 = a \wedge x_2 = 0\}\ \textsf{while}\ x_1 \neq 0\ \textsf{do}\ x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \textsf{end}\ \{x_2 = a\}}\,[\mathrm{a}]^1
$$

[1] mit $(x_1 = a \wedge x_2 = 0) \models (x_1 + x_2 = a)$ und
$(x_1 + x_2 = a \wedge x_1 = 0) \models (x_2 = a)$

[2] mit $(x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0) \models (x_1 - 1 + x_2 + 1 = a)$

$\square$