Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Stochastik 1 (lehramtsbezogen)

Winter Semester 2017/18
14. Januar 2018

Dozent: Shagnik Das
Tutoren: Tim Dittmann, Felix Henneke, Gusnadi Wiyoga

# *Übungsblatt 10*

Alle Lösungen müssen vollständig und verständlich begründet werden.

Abzugeben bis zum 10:00 am Montag, 22. Januar, im Fach von Felix.

**Aufgabe 1** [10 Punkte]

(a) Sei $\Omega$ eine beliebige Menge, und sei $\mathcal{E}_3$ die Menge aller Teilmenge $E \subseteq \Omega$, sodass $E$ oder $\Omega \setminus E$ höchstens abzählbar sind (oder beide). Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}_3$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$ ist.

(b) Sei $\Omega$ eine überabzählbare Menge, und sei $\mathcal{E}_4$ die Menge aller Teilmenge $E \subseteq \Omega$, sodass $E$ oder $\Omega \setminus E$ überabzählbar sind (oder beide). Ist $\mathcal{E}_4$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$?

**Aufgabe 2** [10 Punkte]

Set $\Omega$ eine beliebige Menge, and sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Menge von Teilmengen von $\Omega$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller $\sigma$-Algebren auf $\Omega$, die Obermengen von $\mathcal{M}$ sind. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}} \mathcal{A}$$

die folgenden drei Eigenschaften hat:

(a) $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$.

(b) $\sigma(\mathcal{M})$ ist eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$.

(c) Sei $\mathcal{E}$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$, sodass $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$. Dann gilt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{E}$.

**Aufgabe 3** [10 Punkte]

Sei $\mathcal{M} = \{(a, b] : a \leq b, \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}\}$, und sei $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{M})$ die Borel'sche $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Borel-Mengen sind.

(a) Die Menge $\{x\}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$ und $(a, b)$, wobei $a$ und $b$ reelle Zahlen sind, sodass $a < b$.

(c) Die Menge $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

(d) Alle offenen[1] Teilmengen von $\mathbb{R}$.

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt10.html.]

**Aufgabe 4** [10 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(b) Für alle $E, F \in \mathcal{E}$, wobei $E \subseteq F$, gilt $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.[2]

(c) Für alle $E, F \in \mathcal{E}$ gilt $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$.

(d) Für alle $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{E}$, wobei $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$, gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n).$$ [3]

(e) Für alle $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{E}$, wobei $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$, gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n).$$ [4]

[Hinweis: http://discretemath.imp.fu-berlin.de/StochastikI-2017-18/Hinweise/Blatt10.html.]

---

[1] Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}$ wird *offen* genannt, wenn für jedes $x \in E$ es ein positives $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq E$.

[2] Diese Eigenschaft heißt *Monotonität.*

[3] Diese Eigenschaft heißt *Stetigkeit von unten.*

[4] Diese Eigenschaft heißt *Stetigkeit von oben.*