Erinnerung: geometrisch Verteilung zum Parameter q : $g_q(k) := q^{k-1}(1-q)$

$\boxed{\text{z.B.}}$ $g_{\frac{18}{37}}(k)$ representierte die W-keit, dass das erste Rot in der k^{ten} Roulellerunde auftritt.

- Wie haben wir das berechnet?

In Laplaceraum $\boxed{\{0,1,\dots,36\}^k}$, $\dfrac{\text{"günstige"}}{\text{"alle"}} = \dfrac{19^{k-1}\cdot 18}{37^k} = \left(\dfrac{19}{37}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{18}{37}$

Noch einfacher: $g_{\frac{1}{2}}(k) = \frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^k}$ representierte die W-keit, dass der erste Kopf im k-ten Wurf auftritt (wenn wir eine faire Münze werfen)

Berechnung: W-keit von $(Z,Z,\dots,Z,K)$ im Laplaceraum auf $\boxed{\{K,Z\}^k}$ ist $\dfrac{\text{"günstige"}}{\text{"alle"}} = \dfrac{1}{2^k}$

INKONSISTENZ

Für verschiede k, $g_q(k)$ wurde in verschiedenen W-Räumen berechnet.

Lösung? $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} : \omega_i \in \{0,1\}\ \forall i\in\mathbb{N}\}$ "enthält" alle die Räume $\{0,1\}^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Probleme: (i) bisher haben wir nur höchstens abzählbare Ω erlaubt und $\boxed{\{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ ist überabzählbar}}$

(Beweis: wenn nicht, sei $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$ eine Liste von alle Elemente von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Aber die Sequenz α, $\alpha_i := 1-\omega_i^{(i)}$ $\forall i\in\mathbb{N}$, ist NICHT auf dieser Liste. $\lightning$ (weil $\forall i$, $\alpha \neq \omega^{(i)}$))

(ii) wir natürlich möchten, dass "KEINE Sequez $\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bervorzugt wird"

Aber Laplaceraum existiert NUR auf endliche Ω !!!

Also: Wegen (ii), $\forall$ sinnvolle $\mathbb{P}$, sollte $\mathbb{P}(\omega)$ gleich 0 $\forall \omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Aber trotzdem ihre disjunkte Vereinigung $\biguplus_{\omega \in \Omega} \{\omega\} = \Omega$ muß W-keit $\underline{\underline{1}}$ haben

(D.h.: Jedes spezifische Elementarereignis mit W-keit 0 auftritt, aber doch passiert etwas. Das ist KEIN Widerspruch, weil wir eine überabzählbare Vereinigung betrachten.)

Noch allgemeiner, sind wir offenbar an der W-keit vieler anderer Ereignisse interessiert, die auch überabzählbar sein könnten. z.B.: wir wollen das $\mathbb{P}(\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_i = 1\}) = \frac{1}{2}$, d.h. die W-keit, dass die i-te Koordinate 1 ist, ist $\frac{1}{2}$.

Also: W-Maß im diskreten Sinne (d.h., Definition der W-keit eines Ereignisses NUR durch die W-keiten der darin enthaltenen Elementarereignisse) macht in diesem überabzählbaren Fall nicht zu viel Sinn.

$\boxed{\text{Ziel}}$: W-Maß $\mathbb{P}$, das auf den Teilmengen von Ω definiert ist (nicht nur auf den Elementen) D.h. wir brauchen eine sinnvolle Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$.

Was für eine Eigenschaften soll $\mathbb{P}$ haben?

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ [sinnvoll: W-keit von sicherem Ereignis soll 1 sein.]
- $\forall E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$, die paarweise disjunkt sind ($E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$) gilt: $\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$ (sinnvoll; z.B. die W-keit das eine ganzzahlwertige ZV X mindestens 10 ist soll gleich $\sum_{i=10}^{\infty} \mathbb{P}(X=i)$ sein.)
- statt Laplace Eigenschaft (was unmöglich auf unendliche Ω) wir versuchen die "unabhängigkeit" der Koordinaten benutzen:

Es sei $\ddot{A}_i : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Abbildung, die ändert die i-te Koordinate: $\ddot{A}_i(\omega) := (\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, 1-\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots)$

Wegen "unabhängigkeit", $\forall E \subseteq \Omega$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(E)$ soll gleich $\mathbb{P}(\ddot{A}_i(E))$

Es geht NICHT!! $\boxed{\text{Es sei } \Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}.}$

Satz: (Vitali) Es gibt KEINE Abbildung $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ mit den Eigenschaften: (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \dots \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

(iii) $\forall\, E \subseteq \Omega$ und $\forall\, i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\ddot{A}_i(E)) = \mathbb{P}(E)$$

Beweis: Nehmen wir an, dass solche $\mathbb{P}$ existiert.

Konstruieren wir eine "verrückte Teilmenge" $M \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Schritt 1: Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Omega$

Es sei $\omega \sim \omega'$ wenn $|\{i \in \mathbb{N} : \omega_i \neq \omega_i'\}| < \infty$

(d.h. Anzahl der unterschiedlichen Koordinaten ist ENDLICH)

Schritt 2: Äquivalenzklassen: $[\omega]_\sim := \{\alpha \in \Omega : \alpha \sim \omega\} =$

$$= \{\alpha \in \Omega : |\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i \neq \omega_i\}| < \infty\}$$

Beispiele:

(*) $[(0,0,\dots,0,\dots)]_\sim = [(1,0,\dots,0,\dots)]_\sim$ = Menge der Sequenzen mit endlich vielen 1.

(*) $[(0,0,\dots,0,\dots)]_\sim \neq [(1,1,\dots,1,\dots)]_\sim$

(*) $[(0,0,\dots,0,\dots)]_\sim \neq [(0,1,0,1,\dots,0,1,\dots)]_\sim$

(*) $\forall \omega \in \Omega$ $\boxed{[\omega]_\sim \text{ ist abzählbar}}$, weil die Anzahl der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(Es ist die Vereinigung von abzählbar viele abzählbare Menge: $\bigcup_{k}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$)

Schritt 3, Wählen wir genau ein (beliebige) Element von JEDER Äquivalenzklasse und tun wir das in Menge M rein. (Auswahlaxiom!!!)

Also: $\forall \omega \in \Omega \quad |M \cap [\omega]_\sim| = 1$

Was soll $\mathbb{P}(M)$ sein?

$\forall$ endliche $\underset{\{s_1,\dots,s_\ell\}}{\underset{\|}{S}} \subseteq \mathbb{N}$, sei $\ddot{A}_S(M) := \ddot{A}_{s_1}(\ddot{A}_{s_2}(\dots \ddot{A}_{s_\ell}(M))\dots))$

(d.h.: die Menge der Elementen $\omega \in \Omega$, die sich von einem Element von M genau in den Koordinaten $s_1,\dots,s_\ell$ unterscheiden)

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\ddot{A}_S(M)) = \mathbb{P}(M)}$,

Dann gilt: $\boxed{\Omega = \biguplus_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S|<\infty}} \ddot{A}_S(M)}$ (Vereinigung von abzählbar viele paarweise disjunkte Menge)

$\boxed{\text{Warum?}}$ $\boxed{\subseteq}$ Sei $\omega \in \Omega$. Wir haben auch von $[\omega]_\sim$ ein Element in M reingetan: sagen wir $m \in [\omega]_\sim \cap M$.
Dann m und ω unterscheiden sich in eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ von Koordinaten.
$\Rightarrow \omega \in \ddot{A}_S(m) \subseteq \ddot{A}_S(M)$ ✓

$\boxed{\forall S, S' \subseteq \mathbb{N},\ |S|,|S'|<\infty,\ S \neq S' \quad \ddot{A}_S(M) \cap \ddot{A}_{S'}(M) = \emptyset}$: Sei $\omega \in \ddot{A}_S(M) \cap \ddot{A}_{S'}(M)$

$\Rightarrow \exists\, m \neq m' \in M$ s.d. $\ddot{A}_S(m) = \omega = \ddot{A}_{S'}(m')$

$\Rightarrow \ddot{A}_{(S\setminus S') \cup (S' \setminus S)}(m) = m' \Rightarrow m \sim m'$ weil $(S\setminus S') \cup (S'\setminus S)$ endlich ist

$\Rightarrow \lightning$ weil M hat nur ein Element in jeder Äquivalenzklasse

$$\Rightarrow \underline{\underline{1}} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\biguplus_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S|<\infty}} \ddot{A}_S(M)\Big) = \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S|<\infty}} \mathbb{P}(\ddot{A}_S(M)) = \sum_{\substack{S \subseteq \mathbb{N} \\ |S|<\infty}} \mathbb{P}(M) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathbb{P}(M)=0 \\ +\infty & \text{wenn } \mathbb{P}(M)>0 \end{cases} \underline{\underline{\lightning}}$$

Also: Es ist NICHT möglich, dass wir die W-keit JEDER Teilmenge von $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vernünftig und konsistent messen können.

Seien wir realistisch: Wollen wir wirklich die W-keit für JEDE Teilmenge von Ω messen? Auch z.B. für die obige verrückte Menge M?

NEIN! Einige Teilmengen, wie die Teilmenge M, sind einfach zu künstlich, um in der Praxis angetroffen zu werden.

Auf der anderen Seite gibt es wichtige Teilmengen, z.B. die "rechteckige Zylindermengen" $\{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \omega_i = 1\}$ in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, für die wir unbedingt eine Wahrscheilichkeit definieren wollen.

Welche Teilmengen halten wir für wichtig?

Dies hängt von den jeweiligen Ω. Die Wahl, was in das Mengensystem $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von "wichtigen" Teilmengen gesetzt wird, ist in der Regel ganz klar.

z.B. für $\boxed{\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ nehmen wir $\boxed{\mathcal{W} = \left\{\{\omega \in \Omega : \omega_i = \alpha\} : \begin{matrix} i \in \mathbb{N} \\ \alpha \in \{0,1\} \end{matrix}\right\}}$

für $\boxed{\Omega = \mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$ ist ein anderes natürliches überabzählbares Elementarereignismenge; z.B. unsere Telefonwartezeit beispiel oder jede ähnliche Situation, wir etwas warten und die Zeit kontinuierlich gemessen wird.)

Wir würden unbedingt die W-keit von abgeschlossenen Intervallen messen.

In diesem Fall wählen wir $\boxed{\mathcal{W} = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}}$

Wir können versuchen, andere Teilmengen zu identifizieren die für uns wichtig sind (sagen wir, die Teilmengen von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Sequenzen mit zwei, drei, oder zehn spezifischen festen Koordinaten enthalten (statt nur eine feste Koordinate)), oder die offene Intervalle oder halb-offene Intervalle von $\mathbb{R}$) aber die Liste der "natürlichen" Optionen scheint endlos.
Es wäre mehr befriedigend, eine "begriffliche" Auflösung zu finden, um die scheinbar endlose Zugabe neuer und neuerer "wichtiger" Teilmengen zu beenden.

Die Forderung, dass unsere "messbare" Ereignisse unter den einfachsten logischen Operationen ("und", "oder", Negation) geschlossen werden sollten, ist ein sehr natürlicher Wunsch. Denken Sie darüber nach: Wenn wir zulassen, die W-keit der Ereignisse E und $F \subseteq \Omega$ zu messen, wie "unnatürlich" wäre es, wenn es nicht erlaubt ist, über die W-keit den Ereignissen

- "E und F auftreten" $\rightsquigarrow$ Ereignis $E \cap F$
- "E oder F auftritt" $\rightsquigarrow$ Ereignis $E \cup F$
- "E tritt nicht auf" $\rightsquigarrow$ Ereignis $\Omega \setminus E =: \bar{E}$

zu sprechen. Also: zulassen wir $E \cap F$, $E \cup F$, und $\bar{E}$.

Auch: wenn $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ eine disjunkte Folge von Ereignissen ist und die W-keit von $\forall E_i$ ist möglich zu messen (d.h. E_i ist zulässig für $\forall i = 1, 2, \ldots$) dann wollen wir auch die W-keit der disjunkten Vereinigung zu messen (d.h. $\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i$ zulassen)
(Dies ist auch sinnvoll, da wir uns bereits überzeugt haben, daß wir wollen $\mathbb{P}(\dot{\bigcup} E_i) = \sum^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$.)

Also:
Für unsere allgemeinere Definition von W-Raum, die auch auf eine überabzählbare Ω funktioniert, brauchen wir
- eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von "messbare" Teilmengen von Ω

  mit Eigenschaften (D1) $\Omega \in \mathcal{E}$

  (D2) $\forall E \in \mathcal{E}$ gilt: $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

  (D3) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

  (S) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $E \cap F \in \mathcal{E}$

(Bemerkung: • Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit Eigenschaften (D1), (D2), D(3) heißt Dynkin-system

• Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit Eigenschaft (S) heißt schnitt-stabil.)

Und brauchen wir
- eine Abbildung $\mathbb{P}: \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$

  mit Eigenschaften (P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

  (P2) $\forall$ disjunkte Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Bemerkung: Eigenschaft (P2) heißt die σ-additivität von $\mathbb{P}$.

- $\mathbb{P}$ mit Eigenschaften (P1) und (P2) heißt ein $\boxed{\text{Wahrscheinlichkeitsmaß}}$ auf $\mathcal{E}$.

Es ist möglich, die vier Eigenschaften unseres Wunschmengensystem ((Ω1),(Ω2),(Ω3),(S)) mit nur drei auszudrücken (die aber equivalent sind).
Dies ist, was wir als unsere Definition wählen.

Def: Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine **σ-Algebra** auf Ω wenn folgende drei Eigenschaften hat:

(S1) $\Omega \in \mathcal{E}$

(S2) $\forall E \in \mathcal{E}$ gilt: $\Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

(S3) $\forall$ Folge $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

Lemma: Es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem auf Menge Ω.
Dann, $\mathcal{E}$ ist ein schnitt-stabil ~~Meyn~~ Dynkin-system $\iff$ $\mathcal{E}$ ist eine σ-Algebra

Beweis: Hausaufgabe

Def: Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ heißt ein **W-Raum** wenn

(W1) $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Menge

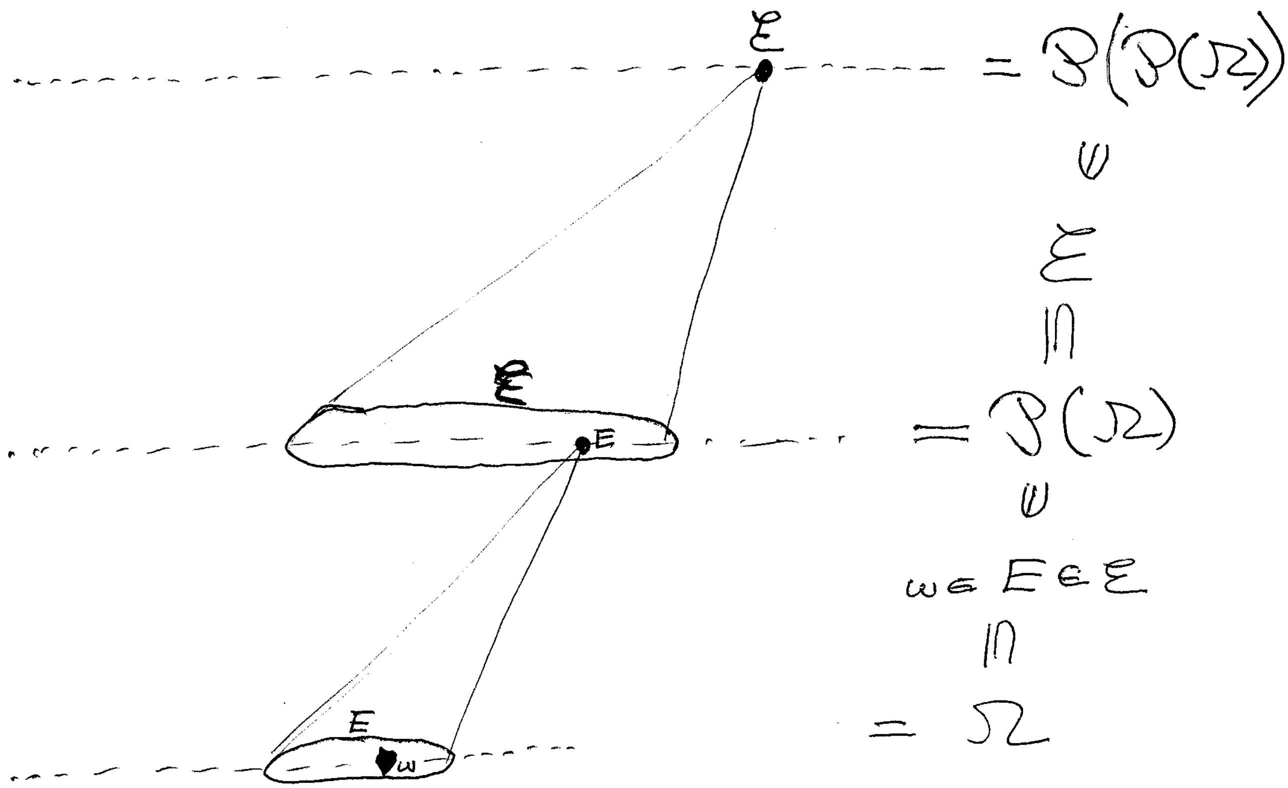
(W2) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra auf Ω

(W3) $\mathbb{P}: \mathcal{E} \to [0,1]$ ist ein W-Maß auf $\mathcal{E}$

- Elemente von Ω heißen Elementarereignisse
- Elemente von $\mathcal{E}$ heißen Ereignissen
- Diese sind die Axioman von Kolmogoroff

Bild über σ-Algebren

Drei "Ebene" von Mengen



Beispiele: für σ-Algebren auf Ω

1. $\{\emptyset, \Omega\}$ (die "kleinste" σ-Algebra auf Ω)
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ (die 'größte" σ-Algebra auf Ω)
3. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$
4. $\mathcal{E} = \{ A \subseteq \Omega :$ $|A|$ oder $\Omega \setminus A$ ist höchstens abzählbar
5. $\Omega = \bigcup_{i \in I} D_i$ wobei $\forall i,j \in I$ $i \neq j$ $D_i \cap D_j = \emptyset$ (und $\forall i \in I$ $D_i \neq \emptyset$)

   (d.h. $(D_i)_{i \in I}$ ist eine Partition von Ω)

   Wenn $\mathcal{J}$ eine σ-Algebra auf I, dann $\{\bigcup_{i \in J} D_i : J \in \mathcal{J}\}$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

Einfache Eigenschaften von σ-Algebren

Satz: Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω.

Dann gilt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(b) $\forall E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E}$

(c) $\forall E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ gilt: $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E} \quad \forall n$

und $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$

(d) $\forall E, F \in \mathcal{E}$ gilt: $E \setminus F \in \mathcal{E}$

Beweis: $\boxed{\text{HA}}$

Lemma: (Equivalenz von σ-Algebren und schnitt-stabile Dynkin-system)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Mengensystem auf Ω.

Dann gilt: $\mathcal{E}$ hat Eigenschaften (D1) (D2) (D3) (S) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}$ hat Eigenschaften (S1) (S2) (S3)

Beweis: $\boxed{\text{HA}}$