7.4.1 Gitterspektrometer - Gittermonochromator

Gitterspektrometer: Bestimmung der Wellenlänge und des Spektrums $I(\lambda)$ von Licht durch Messung des Beugungswinkels bei bekannter Gitterkonstante.

Gittermonochromator: Erzeugung von monochromatischem Licht durch Ausblenden einer Beugungsrichtung. Eingestrahlt wird breitbandiges, z.B. weißes Licht.

In modernen Monochromatoren (und Spektrometern) werden fast nur noch Reflexionsgitter als dispersive Elemente eingesetzt. Die zwei wichtigsten Bauformen sind:

Ebert-Monochromator: Kollimator- und Kollektorspiegel sind in einem Bauteil vereint.

Czerny-Turner-Monochromator: Kollimator- und Kollektorspiegel sind getrennte Bauteile.

- Die Lichtquelle steht vor dem Eintrittsspalt. Durch den Eintrittsspalt fällt das Licht auf einen Hohlspiegel, der es kollimiert und auf das Gitter lenkt.
- Das am Gitter gebeugte Licht fällt wieder auf den Hohlspiegel und wird auf die Austrittsebene abgebildet, in der sich der Austrittsspalt befindet.
- Der (feste) Ablenkwinkel θ am Gitter ist eine Funktion von Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β am Gitter und der Wellenlänge λ. Durch Drehen des Gitters ändert sich Ein- und Ausfallswinkel und so die Transmissionswellenlänge des Monochromators.
- Die Breite des Austrittsspaltes legt die Bandbreite bei der Transmissionswellenlänge fest. (→ spektrale Spaltbreite $\Delta\lambda_{eff}$, → Lineardispersion).
  Zusätzlich beeinflusst die Beugung am Eintrittsspalt und an der Gitterbegrenzung die Auflösung $\Delta\lambda$.

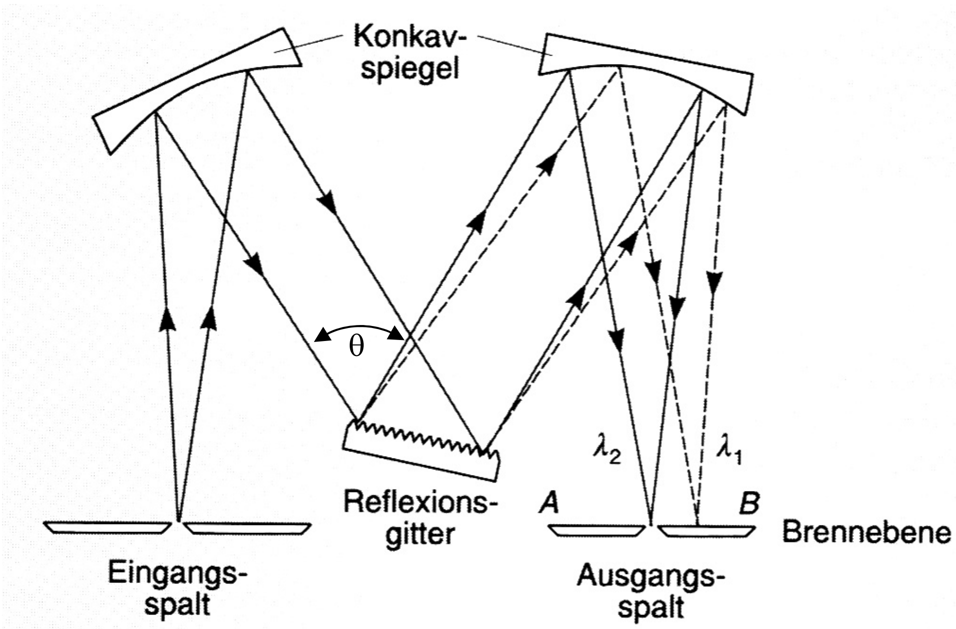


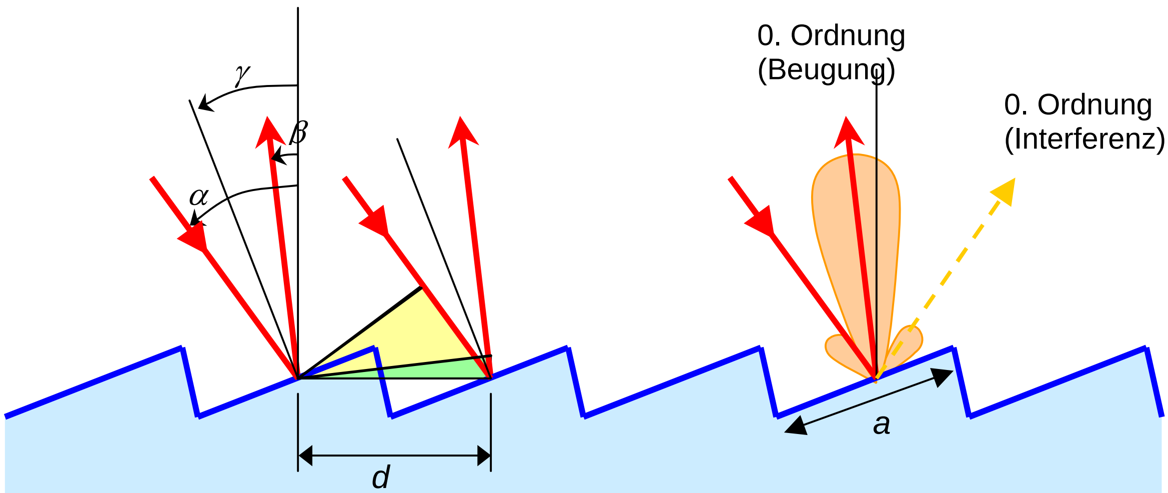
Abb.: Schema eines Czerny-Turner-Gittermonochromators ($\lambda_1 > \lambda_2$)

Echelette-Gitter (Reflexionsgitter)

Bei der Beugung am Transmissionsgitter (oder an einem ebenen Reflexionsgitter) hat die Strahlung der 0.ten Beugungsordnung stets die größte Intensität, da das Maximum der Interferenzfunktion mit dem Maximum der Spaltfunktion zusammenfällt.

Durch Kippen der reflektierten Strahlen um den Winkel γ (**γ = Blazewinkel**) verschiebt sich die Spaltfunktion gegenüber der Gitterinterferenz und fällt nicht mehr mit dem Hauptmaximum 0-ter Ordnung der Gitterinterferenz zusammen. Damit erreicht man eine hohe Effizienz des Gitters bei einer bestimmten Wellenlänge und Beugungsordnung.

Prinzip:
- An den eingeritzten Furchen des Gitters wird das Licht geometrisch reflektiert. Da die Furchenbreite vergleichbar mit der Wellenlänge ist, tritt Beugung ein. Jede Furche wirkt wie ein Einzelspalt, der die Spaltbeugung in die geometrische Reflexionsrichtung lenkt (Spaltfunktion).
- Die konstruktive Interferenz der homologen Strahlen der einzelnen Furchen (Gitterinterferenz) lenkt die Strahlung in die verschiedenen Richtungen bzw. Ordnungen der Hauptmaxima.
- Fällt nun das Hauptmaximum m-ter Ordnung mit der Richtung der Spaltbeugung zusammen, wird die Intensität in der m-ten Ordnung maximal. Daraus folgt die sog. Blazebedingung: Beugungswinkel m-te Ordn. = geometrische Reflexionsrichtung.



Gangunterschied: Bedingung für konstruktive Interferenz

$$\Delta_1 = d\sin\alpha$$
$$\Delta_2 = d\sin\beta$$
$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = d(\sin\alpha + \sin\beta) = m\lambda$$
$$\boxed{m\lambda = d(\sin\alpha + \sin\beta)}$$

Richtung der Spaltbeugung (= Richtung des reflektierten Strahles)

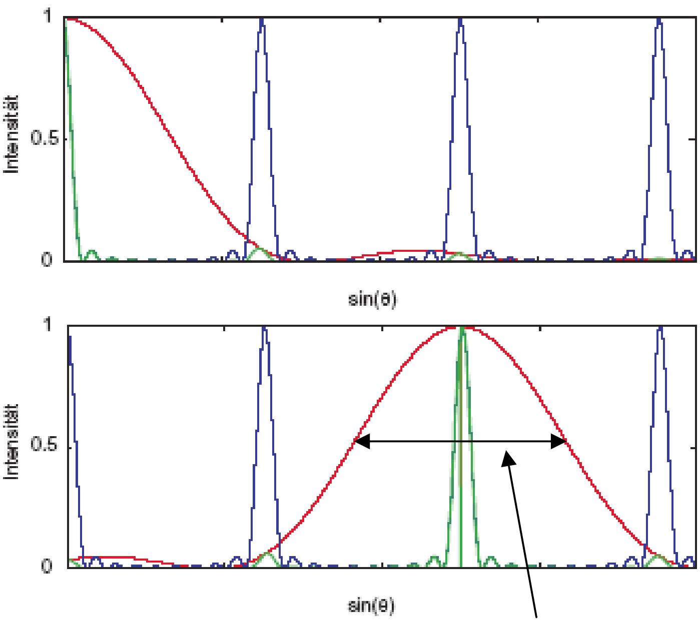
$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$ Blazebedingung (γ = Blazewinkel)

(bzw. $\alpha - \gamma = \gamma - \beta$)

Damit ist die Richtung der Spaltbeugung 0-ter Ordnung gegenüber der Interferenz 0-ter Ordnung um eine oder zwei Interferenzordnungen versetzt.

a) Das Maximum der Spaltfunktion und die 0-te Ordnung der Interferenzfunktion fallen bei einem “normalen Gitter“ zusammen.

b) Beim diesem Echelette-Gitter wird die Beugung in die 2. Interferenzordnung “reflektiert“.
Für den Fall $d = a$ kann fast das ganze Licht einer Wellenlänge in diese (Interferenz)-Beugungsordnung gelenkt werden.
$\Rightarrow$ **Lichtstärkevorteil**
Die Breite der Beugungsfunktion grenzt aber den nutzbaren Spektralbereich ein.



nutzbarer Spektralbereich

Berechnung des Blazewinkels

Die Wellenlänge bei der maximalen Gittereffizienz nennt man *Blazewellenlänge*, den zugehörigen Winkel γ der Gitterfurchen *Blazewinkel*.

Der Einfallswinkel α ergibt sich aus der (festen) Stellung des Gitters zum einfallenden Strahl.
Der Spaltbeugungswinkel β (= Reflexionswinkel) wird von γ bestimmt ($\beta = 2\gamma - \alpha$) .

Damit β mit der Interferenzrichtung m-ter Ordnung zusammenfällt, muss dann gelten:

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin\alpha\right)$$

Der Blazewinkel $\gamma(\lambda)$ bestimmt zusammen mit der äquivalenten „spektralen Breite“ der Spaltbeugung in der m-ten Interferenzordnung den **nutzbaren Spektralbereich.**

Beispiel: Berechne für $d = 5$ µm ; $\alpha = 20°$; $\lambda = 500$ nm ; $m = 2$ den Blazewinkel γ und den gesamten Ablenkwinkel θ.

$$d(\sin\alpha + \sin\beta) = m\lambda$$

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin\alpha\right)$$

$$\gamma = \frac{20°}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2\cdot 0{,}5\mu\text{m}}{5\mu\text{m}} - \sin 20°\right) = 5{,}9°$$

$$(\beta = 2\gamma - \alpha = 5{,}9°\cdot 2 - 20° = -8{,}2°)$$

$$\theta = \alpha - \beta = 20° - (-8{,}2°) = 28{,}2° \text{ (gesamter Ablenkwinkel)}$$

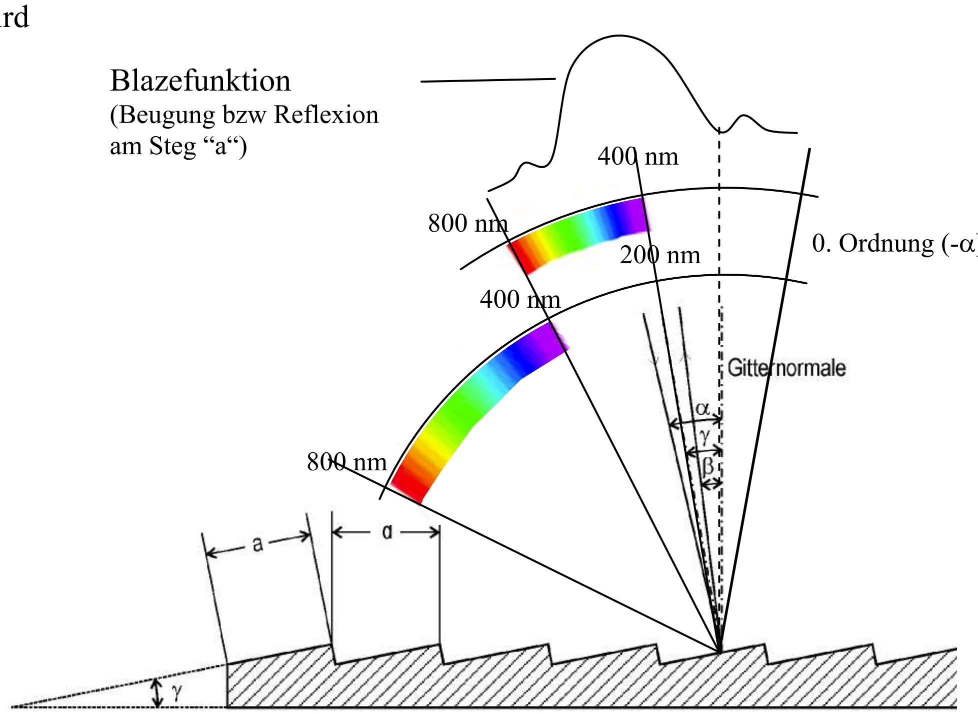
Littrow-Anordnung

Echelette-Gitter werden im allgemeinen in der „Littrow-Anordnung“ oder Autokollimationsanordnung betrieben, bei der Einfalls- und Ausfallswinkel etwa gleich groß sind.
Konstruktiv sind deshalb Eintritts- und Austrittsspalt übereinander angeordnet.

Der Ablenkwinkel $\theta = \alpha - \beta$ ist sehr klein $\Rightarrow \alpha \cong \beta = \gamma$.

In Littrow-Anordnung wird die Gittergleichung zu:

$$\boxed{2d \sin\gamma = m\lambda}$$



Dispersion und Auflösung

Theoretisches Auflösungsvermögen R_{th}

Zwei benachbarte Wellenlängen $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ kann man unterscheiden, wenn das Maximum von λ_1 auf das Minimum von λ_2 fällt oder umgekehrt (**Rayleigh-Kriterium**).

Winkellage m-tes Maximum λ_1:

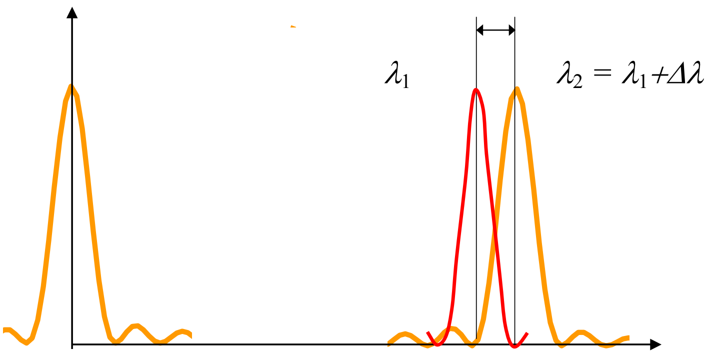
$$\sin\beta_1 = \frac{m\lambda_1}{d}$$

Winkellage 1. Nebenmaximum von λ_1:

$$\sin\beta_1 + \Delta(\sin\beta_1) = \frac{m\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd}$$

Winkellage m-tes Maximum von λ_2:

$$\sin\beta_2 = \frac{m\lambda_2}{d}$$



Da die Winkellage des 1. Nebenminimus von λ_1 mit dem m-ten Maximum von λ_2 zusammenfällt, gilt:

$$\frac{m\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} = \frac{m\lambda_2}{d} \qquad \text{oder wegen} \quad \lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{th} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm} \qquad \text{Theoretisches Auflösungsvermögen eines Gitters}$$

Winkeldispersion, Lineardispersion und spektrale Spaltbreite

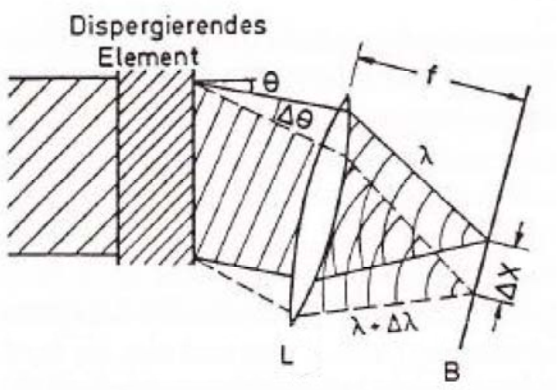
Wenn sich die Wellenlänge um $\Delta\lambda$ ändert, verschiebt sich das Beugungsmuster (d.h. Maxima) in der Beobachtungsebene um den Winkel $\Delta\beta$, bzw. um die Strecke Δx. Damit die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$ aufgelöst werden kann, muss die Verschiebung "ausreichend" groß sein → Auflösungsvermögen.

$$\sin\beta = m\frac{\lambda}{d}$$ Gitterformel (Winkellage der Maxima)

$$\cos\beta \cdot d\beta = \frac{m}{d}d\lambda$$

$$d\beta = \frac{m}{d\cos\beta}d\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\beta}}$$ heißt **Winkeldispersion**

$$dx = f\cdot d\beta = f\frac{m}{d\cos\beta}d\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{d\lambda} = L_D = f\frac{d\beta}{d\lambda}}$$ heißt **Lineardispersion**



$$\Delta\beta = \left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right)\Delta\lambda$$

$$\Delta x = f\cdot\Delta\beta = \left(f\cdot\frac{d\beta}{d\lambda}\right)\Delta\lambda$$

(f = Brennweite des Kollektors)

Die Winkeldispersion ist ein Maß für die wellenlängenabhängige Auffächerung des einfallenden polychromatischen Strahlenbündels. Die Winkeldispersion ist neben dem Auflösungsvermögen die wichtigste Eigenschaft eines dispersiv arbeitenden Monochromators.

Befindet sich in der Ebene der Abbildung ein Spalt der Breite Δx (Austrittsspalt) tritt ein bestimmter Wellenlängenbereich hindurch. Diese Bandbreite bezeichnet man als spektrale Spaltbreite oder effektive Bandbreite $\Delta\lambda_{\text{eff}}$.

$$\boxed{\Delta\lambda_{eff} = \frac{1}{L_D}\Delta x}$$ **spektrale Spaltbreite oder effektive Bandbreite**

Die spektr. Spaltbreite ist die kleinste Differenz unterscheidbarer Wellenlängen bei der Spaltbreite Δx.

Beispiel 1: Reflexionsgitter mit 1200 Gitterlinien/mm, d.h. d = 833,33 nm; Abmessung 110x110 mm^2.
Blaze-Wellenlänge 400 nm in Littrow-Anordnung, d.h.: $\alpha = \beta = \gamma$; m = 1 (1. Ordnung)
$2d\sin\gamma = m\lambda$ daraus folgt: γ = 13,88°

Die Winkeldispersion ist $\left|\frac{d\beta}{d\lambda}\right| = \frac{m}{d\cos\gamma} = 1{,}24 \cdot 10^{-3}\ \text{nm}^{-1} = 0{,}0708$ Grad/nm

Auflösungsvermögen: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = 1\cdot\frac{110}{0{,}000833} = 1{,}32 \cdot 10^5$

Beispiel 2: Berechnen Sie die effektive Bandbreite und das Auflösungsvermögen für:
s = 100 µm; λ = 500 nm; L_D = 1 mm/nm .
$\Rightarrow \Delta\lambda_{\text{eff}} = s\cdot L_D^{-1}$ = 0,1 nm; $R = \lambda / \Delta\lambda_{\text{eff}}$ = 5000

Diskussion: a) Unter dem gleichen Winkel ($\beta = \gamma = 13{,}88°$) erscheint auch 200 nm Strahlung in der 2. Ordnung.

b) 2. Ordnung für $\lambda = 400$ nm (Einstrahlung unter $\alpha = \gamma$)

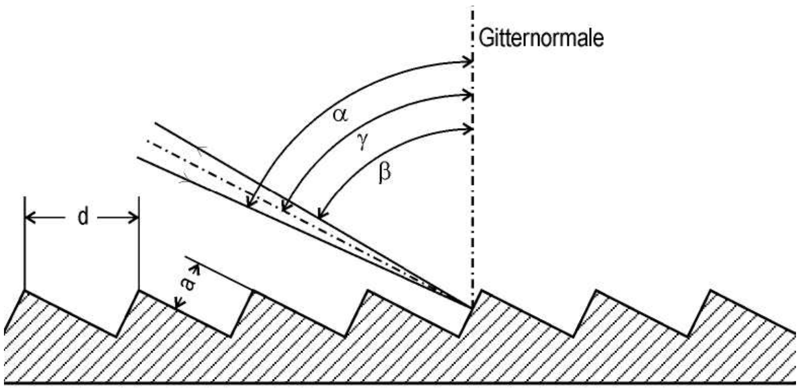
$$d(\sin\alpha + \sin\beta) = 2\lambda \quad => \sin\beta = \frac{2\lambda}{d} - \sin\alpha \;; \quad \beta = 46{,}0\,° \text{ für } \lambda = 400 \text{ nm}$$

Unter dem gleichen Winkel ($\beta = 46{,}0\,°$) erscheint auch 800 nm Strahlung in der 1. Ordnung. Da das Gitter aber nicht für den Winkel geblazed ist, spielt diese Überlappung keine Rolle.

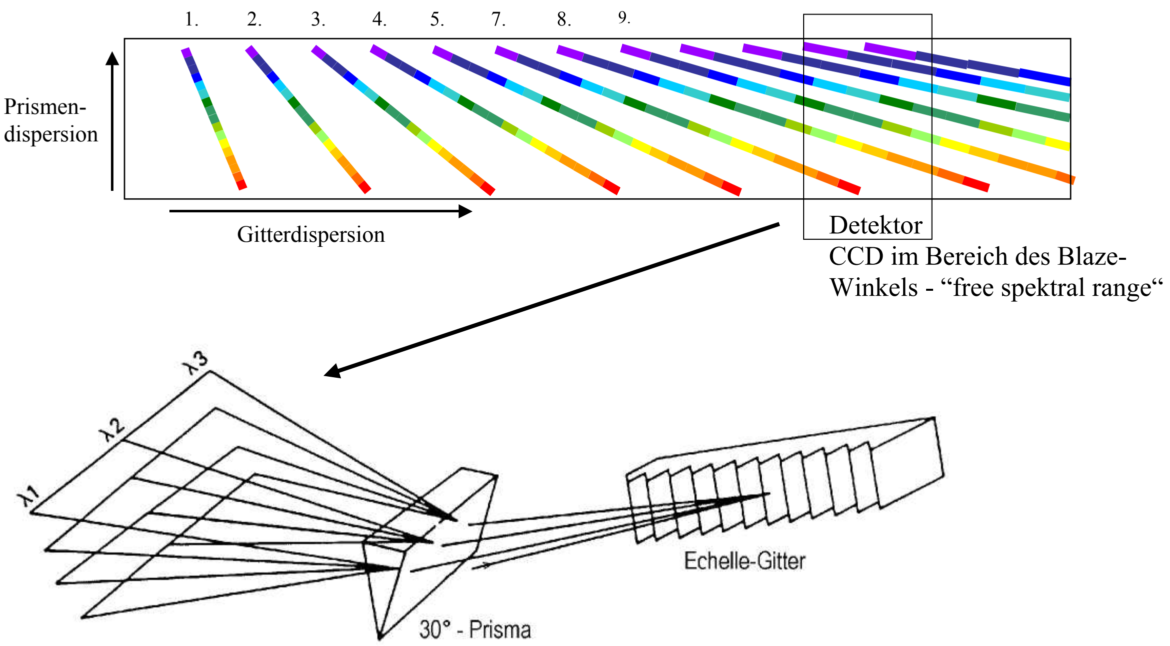
Echelle-Gitter*

Beim Echelle-Gitter nutzt man die Tatsache, dass die Winkeldispersion mit der Ordnung m des Spektrums ansteigt. In Echelle-Anordnung (umgekehrtes Echelette-Gitter) werden die Strahlen an den schmalen Flanken der Furchen reflektiert. Wegen des großen Blazewinkels γ ergeben sich große Gangunterschiede.

Der Gangunterschied $\Delta = 2d\sin\gamma$ kann bis zu 100 Wellenlängen betragen.
Damit ergeben sich sehr viele Beugungsordnungen, die sich überlappen und ein nutzbarer Spektralbereich, der wegen der relativ kleinen “Spaltbreite“ a groß ist.



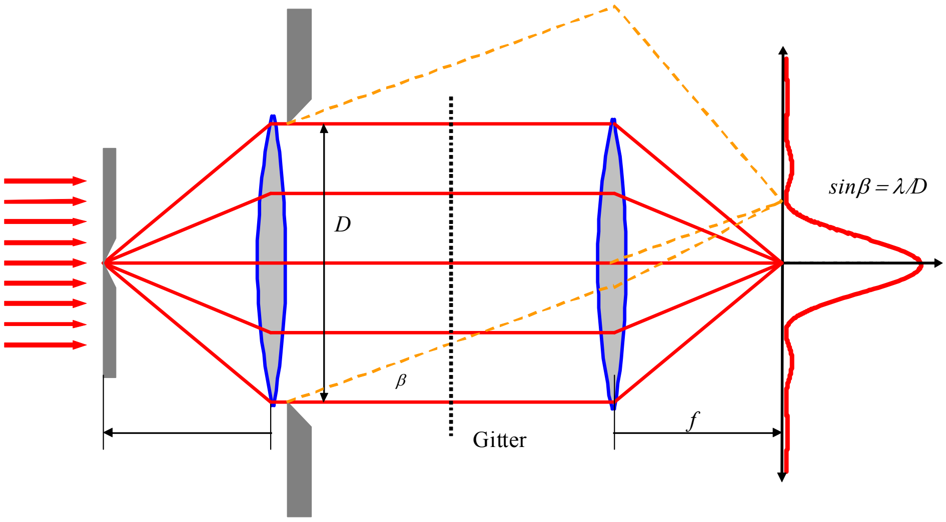
Mit Hilfe eines zusätzlichen dispersiven Elements senkrecht zur Beugungsrichtung des Gitters können die Spektren verschiedener Ordnungen getrennt werden. Es entsteht eine zweidimensionale spektrale Trennung, bei der die einzelnen Ordnungen und damit das komplette Spektrum wie Zeilen eines Buches gelesen werden können.



Einfluss der Spaltbreite und Beugung auf das Auflösungsvermögen*

Das Auflösungsvermögen $R = \lambda / \Delta\lambda = Nm$ des Gitters stellt den theoretischen Maximalwert dar, der meist nur erreicht werden kann, wenn die Spaltbreite b gegen "Null" geht.

Wegen der endlichen Breite b des Eintrittsspalts und durch Beugung an der Kollimatorlinse mit der Breite D wird dieser Wert i.A. nicht erreicht.



Die Spaltbreite „Null" erzeugt eine einzige Elementarwelle, die vom Kollimator (Linse oder Spiegel) in ein Parallellichtbündel überführt wird. An der Begrenzung der Linse erfolgt jedoch Beugung, sodass die Kollektorlinse am Ort des Austrittsspalts kein punktförmiges Bild, sondern die Spaltfunktion abbildet. Bei der Brennweite f ist die Breite des Spaltbildes

$$\Delta x \approx f \frac{\lambda}{D}$$

Andererseits ergibt sich bei einem sehr breiten Eintrittsspaltspalt nur das geometrische Bild in der Ebene des Austrittsspalts (siehe Diskussion spektrale Spaltbreite).

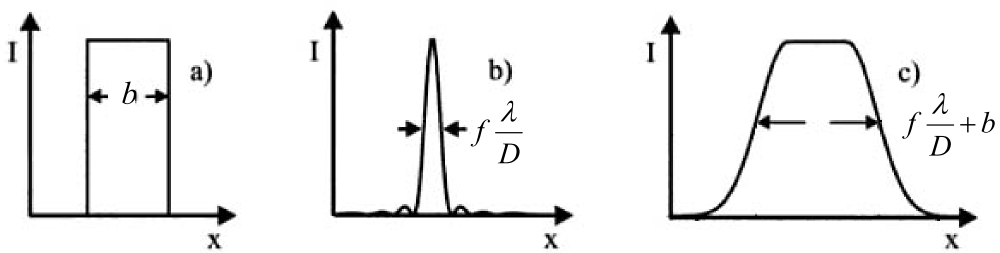


Abb.: Intensitätsprofil (Spaltbild) in der Ebene des Austrittsspalts
a) bei endlicher Breite des Eintrittsspalts und Vernachlässigung der Beugung
b) bei unendlich schmalem Eintrittsspalt
c) bei Einbeziehung von Beugung und Spaltbild

In der Praxis hat der Eintrittsspalt eine endliche Breite.
Die Breite des Spaltbildes ist dann bei gleicher Brennweite der beiden Linsen/Spiegel:

$$\Delta x \approx f\frac{\lambda}{D} + b$$

Mit Hilfe der Definition der Lineardispersion $\Delta x = f \cdot \frac{d\beta}{d\lambda} d\lambda$ erhält man für das Auflösungsvermögen

$$\lambda \Delta x = \lambda f \cdot \frac{d\beta}{d\lambda} d\lambda$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{\lambda}{(f\frac{\lambda}{D} + b)} f \cdot \frac{d\beta}{d\lambda}} \quad (1)$$

maximales Auflösungsvermögen für endliche Spaltbreite unter Berücksichtigung der Beugung

Sonderfälle

a) Spaltbreite $b = 0$

$$\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = D \cdot \frac{d\beta}{d\lambda}}$$

maximales Auflösungsvermögen bei Spaltbreite „Null“($b = 0$).
(Die Obergrenze ist jedoch durch $\lambda/\Delta\lambda = Nm$ gegeben und kann nicht überschritten werden.)

b) Vernachlässigung der Beugung

$$\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{\lambda}{b} f \cdot \frac{d\beta}{d\lambda}}$$

maximales Auflösungsvermögen bei Vernachlässigung der Beugung (dλ entspricht dann der sog. spektralen Spaltbreite $\Delta\lambda_{\text{eff}}$
$\Delta\lambda_{\text{eff}} = b(\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}x.)$

Die Breite des Eintrittsspaltes b sollte jedoch eine untere Grenze nicht unterschreiten.
Diese Grenze ist dadurch gegeben, dass die Winkelbreite des Beugungsmaximums nullter Ordnung vom Eintrittsspalt die Öffnung des Kollimators D/f nicht überschreiten soll.

$$\beta = \frac{\lambda}{b} \quad \Rightarrow \quad 2\beta = \frac{D}{f} = \frac{2\lambda}{b_{\min}} \quad \text{oder:}$$

$$\boxed{b_{\min} = f\frac{2\lambda}{D}}$$

Bei weiterer Verkleinerung des Spalts beginnt die Intensität der Strahlung in das Spektrometer noch stärker abzunehmen, da der Kollimatorspiegel überstrahlt wird.

Aufgaben

Aufgabe: Das Spektrum eines Gittermonochromators in Littrow-Anordnung wird in 1. Ordnung unter einem Winkel $\beta = \gamma = 60°$ beobachtet. Di Lineardispersion des Gittermonochromators beträgt $L_D = dx/d\lambda = 1$ mm/nm und die Brennweite des Kollektors ist $f' = 0{,}50$ m.

a) Berechnen Sie die Winkeldispersion $d\beta/d\lambda$.

b) Wie groß ist die Gitterkonstante d ?

c) Wie groß ist die effektive Bandbreite $\Delta\lambda_{eff}$ (spektrale Spaltbreite), wenn die Breite des Austrittsspaltes $b = 500$ µm beträgt.

Aufgabe: Ein Monochromator hat ein Gitter mit 1000 Linien/mm und die Abmessungen 100 x 100 mm^2. Es soll in 2. Ordnung bei der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm in Littrow-Anordnung betrieben werden.
Die Brennweite von Kollektor- und Kollimatorspiegel beträgt $f' = 50$ cm und ihr Durchmesser $D = 100$ mm.

a) Wie groß ist das theoretische Auflösungsvermögen ?

b) Welches Auflösungsvermögen wäre für eine Spaltbreite $b \to 0$ erreichbar ?

c) Welches Auflösungsvermögen erreicht man bei der Spaltbreite b_{min} ohne Berücksichtigung der Beugung ?

d) Zeigen durch Einsetzen, dass bei Berücksichtigung der Beugung für $b = b_{min}$ gilt:
$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{3} D \frac{d\beta}{d\lambda} .$$