Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Stefan Liebscher
http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Donnerstag, 18.12.2014, 10:00

Aufgabe 33: Die echte Zylinderprojektion der Einheitssphäre ist eine Zentralprojektion der Sphäre aus ihrem Mittelpunkt auf einen Zylinder, dessen Symmetrieachse durch Nord- und Südpol verläuft. (Der Radius des Zylinders kann sich vom Radius der Sphäre unterscheiden.) Ihre Umkehrung stellt eine Karte der Sphäre ohne Nord- und Südpol dar.

(i) Bestimme den metrischen Tensor dieser Karte (in Abhängigkeit vom Radius des Zylinders). Zeige, dass die echte Zylinderprojektion nicht winkeltreu ist.

(ii) Vergleiche mit der Mercator-Karte aus Aufgabe 31: wie groß ist die Abweichung der Zylinderprojektion (mit optimal gewähltem Radius) von einer Mercator-Karte der Karibik, also für geographische Breiten von ca. 10 bis 30 Grad?

Aufgabe 34: Zeichne folgende Kurven bzw. Kurvenstücke in $\mathbb{R}^2$ und bestimme ihre Längen:

(i) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ mit $a, b > 0$ (Ellipse).

(ii) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\}$ mit $a > 0$ (Lemniskate).

(iii) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \log x,\ a < x < b\}$ mit $0 < a < b < \infty$.

Hinweis: Schlage ggf. unter dem Stichwort „elliptische Integrale“ in einer Formelsammlung nach. Eine geeignete Parametrisierung der Lemniskate gewinnt man z.B. in Polarkoordinatendarstellung durch Wahl des Parameters $t = \cos(2\varphi)$.

Aufgabe 35: Sei $\gamma(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine nach ihrer Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$, mit $\ddot{\gamma}(0) \neq 0$. Zeige, dass von allen Kreisen der Krümmungskreis,

$$\text{Mittelpunkt: } \gamma(0) + \frac{\ddot{\gamma}(0)}{|\ddot{\gamma}(0)|^2}, \qquad \text{Radius: } \frac{1}{|\ddot{\gamma}(0)|},$$

derjenige ist, der die Kurve am besten lokal (nahe $\gamma(0)$) approximiert.

Freiwilliger Zusatz: Was passiert im Fall $\ddot{\gamma}(0) = 0$?

Aufgabe 36: Beschreibe die Bahn eines Punktes auf dem Rand eines Einheitskreises, der ohne Schlupf auf der x-Achse der (x, y)-Ebene abrollt. Kurven dieser Form heißen Zykloiden.

Zeige, dass die Evolute, d.h. die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte

$$\eta(s) \;=\; \gamma(s) + \frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|^2}$$

der nach ihrer Bogenlänge s parametrisierten Zykloide γ, wieder eine Zykloide ist.