Basiswissen Matrizen

Mathematatik GK 13.2

Definition 1 (Die Matrix) *Eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten heißt* ***m x n*** *Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{pmatrix}$$

Definition 2 (Die Addition von Matrizen) *Für Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl ist eine Addition definiert:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{41} & b_{42} & \dots & b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{24}+b_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41}+b_{41} & a_{42}+b_{42} & \dots & a_{44}+b_{44} \end{pmatrix}$$

Definition 3 (Die Skalarmultiplikation) *Für alle Matrizen ist eine Multiplikation mit einer rellen Zahl (Skalarmultiplikation) definiert:*

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{14} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{41} & \lambda \cdot a_{42} & \dots & \lambda \cdot a_{44} \end{pmatrix}$$

Definition 4 (Matrizenmultiplikation 1) *Eine Matrix mit n Spalten kann mit einem Spaltenvektor mit n Elementen multipliziert werden:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Definition 5 (Matrizenmultiplikation allgemein) *Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.*
Das Produkt einer $l \times m$*-Matrix* $A = (a_{ij})_{i=1\dots l,\, j=1\dots m}$ *und einer* $m \times n$*-Matrix* $B = (b_{ij})_{i=1\dots m,\, j=1\dots n}$ *ist eine* $l \times n$*-Matrix* $C = (c_{ij})_{i=1\dots l,\, j=1\dots n}$*, deren Einträge berechnet werden, indem die Produktsummenformel, ähnlich dem Skalarprodukt, auf Paare aus einem Zeilenvektor der ersten und einem Spaltenvektor der zweiten Matrix angewandt wird. An der Position ik der Ergebnismatrix (Zeile i, Spalte k) steht das Skalarprodukt des Zeilenvektors aus der i-ten Zeile der linken Matrix mit dem Spaltenvektor aus der k-ten Spalte der rechten Matrix.*

Beispiel 1 (Rechenbeispiel Addition)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+3 & 2+5 \\ 1+2 & 2+1 & 7+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2 (Rechenbeispiel Skalarmultiplikation)

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3 (Rechenbeispiel Matrizenmultiplikation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 39 & -12 \end{pmatrix}$$

Hinweis 1 (Sonderfälle) *Multipliziert man einen Zeilenvektor mit einem Spaltenvektor entsprechender Anzahl von Komponenten, entsteht das bekannte Skalarprodukt:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -1$$

Multipliziert man einen Spaltenvektor mit einem Zeilenvektor, entsteht eine entsprechende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis 2 (Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen) *Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. im Allgemeinen gilt*

$$B \cdot A \neq A \cdot B,$$

sofern überhaupt beide Seiten definiert sind, was bedeutet, dass $l = n$ gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, dann sind die Produkte auf beiden Seiten der Gleichung quadratische Matrizen; diese sind aber nur vergleichbar, wenn sie „gleich groß“sind, d.h., gleich viele Zeilen und Spalten haben, also auch $m = n$ gilt. Auch bei $l = m = n$ sind aber die beiden Produkte im Allgemeinen verschieden.

Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Die Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation genügen zudem den beiden Distributivgesetzen:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

für alle $l \times m$-Matrizen A,B und $m \times n$-Matrizen C sowie

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

für alle $l \times m$-Matrizen A und $m \times n$-Matrizen B,C.

Hinweis 3 (symbolische Potenzschreibweise bei Matrizen) *Quadratische Matrizen $A \in K^{n \times n}$ können mit sich selbst multipliziert werden, analog zur Potenz bei den reellen Zahlen führt man abkürzend die Matrixpotenz $A^2 = A \cdot A oder A^3 = A \cdot A \cdot A$ etc. ein.*

Definition 6 (Die transponierte Matrix) *Die Transponierte der Matrix $A = (a_{ij})$ vom Format $m \times n$ ist die Matrix $A^T = (a_{ji})$ vom Format $n \times m$, das heißt zu*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist die Transponierte

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man schreibt also die erste Zeile als erste Spalte und die zweite Zeile als zweite Spalte usw.

Die Matrix wird sozusagen an ihrer Hauptdiagonale $a_{11}, a_{22}, \dots$ gespiegelt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \tag{1}$$

$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T \tag{2}$$

$$\left(A^T\right)^T = A \tag{3}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \tag{4}$$

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}. \tag{5}$$

Definition 7 (Die Einheitsmatrix) *Die Einheitsmatrix oder Identitätsmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonale nur aus Einsen besteht. Alle anderen Elemente sind 0.*

Beispiel:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element unter der Matrizenmultiplikation, d. h. die Multiplikation einer Matrix A mit einer Einheitsmatrix ergibt wieder die Matrix A. Da Matrizen nur miteinander multipliziert werden können, wenn ihre Größen zueinander kompatibel sind, gibt es für jede Größe eine Einheitsmatrix. So ist die Einheitsmatrix der Größe n definiert als Diagonalmatrix mit 1 für alle Elemente der Hauptdiagonale.

Es ist definiert:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots,\ E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 8 (Die inverse Matrix) *Die reguläre, invertierbare oder nichtsinguläre Matrix ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet der linearen Algebra. Eine* ***quadratische*** *Matrix A ist invertierbar, wenn eine weitere Matrix B existiert, sodass*

$$A \cdot B = E$$

gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet. In diesem Fall gilt auch

$$B \cdot A = E.$$

Die Matrix B ist hierbei eindeutig bestimmt und heißt inverse Matrix zu A oder einfach kurz Inverse. Man schreibt üblicherweise A^{-1} für die inverse Matrix zu A.
Nicht zu jeder quadratischen Matrix existiert eine Inverse.

Hinweis 4 (Die Berechnung der inversen Matrix) *Für die Berechnung einer inversen Matrix zu einer gegebenen Matrix gibt es prinzipiell drei Verfahren:*

1. *Bestimmung über ein lineares Gleichungssystem,*
2. *Bestimmung über den Gauß-Jordan-Algorithmus, einem Spezialfall des bekannten Eliminationsverfahrens von Gauß,*
3. *Bestimmung in bestimmten Fällen mit einer Formel.*

Bestimmung über ein lineares Gleichungssystem *Mit der Gleichung $A \cdot A^{-1} = E$ kann die inverse Matrix A^{-1} bestimmt werden.*
Das folgende Beispiel zeigt das Prinzip:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schreibt man A^{-1} als

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} \\ 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizengleichung kann in zwei lineare Gleichungssysteme mit je zwei Variablen umgeschrieben werden:

$$\left| \begin{array}{c} 3a_{11} = 1 \\ 2a_{11}+a_{21} = 0 \end{array} \right| \quad \textit{und} \quad \left| \begin{array}{c} 3a_{12} = 0 \\ 2a_{12}+a_{22} = 1 \end{array} \right|$$

So erhält man:

$$a_{11} = \frac{1}{3} \quad a_{21} = -\frac{2}{3} \quad a_{12} = 0 \quad a_{22} = 1$$

Bestimmung über den Gauß-Jordan-Algorithmus *Die Inverse einer Matrix kann aus der Formel $A \cdot A^{-1} = E$ berechnet werden. Dazu bildet man die Matrix (Blockmatrix) $(A|E)$ und wendet auf diese den Gauß-Jordan-Algorithmus an. Nach Durchführung des Algorithmus hat man eine Blockmatrix $(E|A-1)$, aus der man A^{-1} direkt ablesen kann.*
In dieser Blockmatrix steht auf der linken Seite die gegebene Matrix, zu der man die inverse Matrix berechnen möchte, auf der rechten Seite die Einheitsmatrix. Der oben genannte Algorithmus läuft so:
Man darf Zeilen der Blockmatrix mit beliebigen reellen Zahlen multiplizieren und eine komplette Zeile durch die Summe oder Differenz zweier Zeilen ersetzen. Diese Umformungen führt man durch durch, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Auf der rechten Seite steht nun die inverse Matrix.

Beispiel:

Gesucht ist die Inverse zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Blockmatrix $(A|E)$ lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Die Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus führt zur Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Daraus lässt sich die inverse Matrix direkt ablesen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung in bestimmten Fällen mit einer Formel. *Formel für 2×2- Matrizen:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Formel für 3×3- Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Hinweis 5 (Fixvektor) *Manchmal stellt sich die Frage, ob es zu einer gegebenen Matrix A einen Vektor f gibt, so dass bei der Multiplikation von Matrix und Vektor dieser Vektor wieder als Ergebnis herauskommt.*

$$A \cdot f = f$$

In diesem Fall nennt man f einen Fixvektor. Dieses problem löst mann, indem man als Koordinaten von f Variable verwendet und die Gleichung ausführlich aufschreibt.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x + y = x \\ y = y \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar, wenn $y = 0$ gilt. Alle Vektoren mit der y-Komponente 0 sind also Fixvektoren.