Aufgabe G.1: Definitionen, Begriffsbildungen

a) Der Begriff Dreieck sei definiert. Definieren Sie den Begriff *Innenwinkel* eines Dreiecks. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

b) Definieren Sie den Begriff *Inneres eines Winkels* $\angle ASB$. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

c) Bruce Li definiert: Jedes Viereck, das in der Schnittmenge der Parallelogramme mit den gleichschenkligen Trapezen liegt, heißt Wasabiviereck.
Wie heißen die Wasabivierecke üblicherweise? `(1 Punkt)`

`(erreichte Punkte: )`

d) Definieren Sie den Begriff *gleichschenkliges Dreieck* über Winkeleigenschaften in Form einer Konventionaldefinition. `(3 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

e) Jedes Dreieck ist ein Tangentendreieck. Definieren Sie den Begriff *Tangentenviereck*. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

Aufgabe G.2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

a) Handelsübliche Dreiecke zum Zeichnen gibt es in zwei Varianten: gleichschenklig, rechtwinklig und rechtwinklig mit den weiteren Innenwinkeln in den Größen 30° und 60°.
Aussage I: Ein Drachen ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn er ein Quadrat ist.
Ist Aussage I wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

---

b) Es seien g und h zwei verschiedene Geraden, die den Punkt S gemeinsam haben. Beweisen Sie: Es gibt keinen von S verschiedenen Punkt Q, den die beiden Geraden g und h gemeinsam haben. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

---

c) Es sei $\overline{PL}$ das Lot vom Punkt P auf die Gerade g. Beweisen Sie: $\neg\exists Q \in g : PQ \perp g$. `(3 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

Aufgabe G.3: Vierecke

G.3.1 $\Rightarrow$

Wir gehen von der folgenden Definition aus:
Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten.
Satz P1: Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann halbieren sich seine Diagonalen gegenseitig.

a) Fertigen Sie eine Skizze zu Satz P1 an. `(1 Punkt)`

`(erreichte Punkte: )`

b) Formulieren Sie die Voraussetzung(en) und die Behauptung von Satz P1 unter Verwendung der Bezeichnungen in Ihrer Skizze. `(3 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

c) Beweisen Sie Satz P1 auf der Rückseite dieses Blattes. `(6 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

G.3.2 $\Leftarrow$

a) Die Umkehrung von Satz P1 sei als Satz P2 bezeichnet. Formulieren Sie Satz P2. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

b) Fertigen Sie eine Skizze zu Satz P2 an. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

c) Formulieren Sie die Voraussetzung(en) und die Behauptung von Satz P2 unter Verwendung der Bezeichnungen in Ihrer Skizze. (3 Punkte)

(erreichte Punkte:)

d) Beweisen Sie Satz P2 auf der Rückseite dieses Blattes. (6 Punkte)

(erreichte Punkte:)

e) Fassen Sie P1 und P2 zu einem Satz zusammen. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

Aufgabe G.4: Beweisen wie die Schüler

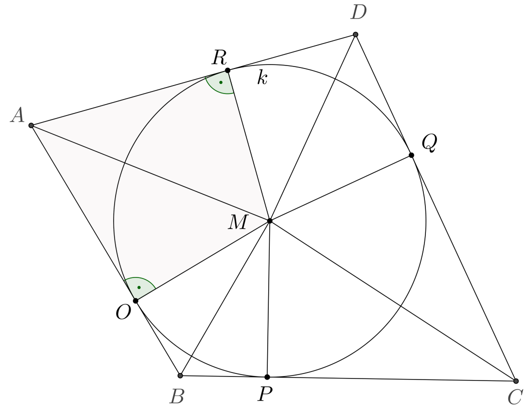

Abbildung 1

Es seien $\overline{ABCD}$ ein Viereck und k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Die Punkte O, P, Q, R seien die Berührungspunkte der Tangenten AB, BC, CD, DA an k (s. Abbildung 1). Mark behauptet $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ und hinterlässt das folgende Beweisfragment. Ergänzen Sie den Beweis von Mark.

Beweis

Nr.	Schritt	Begründung	Pkt.	
(1)	$\overline{OM} \cong \overline{PM} \cong \overline{QM} \cong \overline{RM}$		1	
(2)	$\lvert\angle AOM\rvert = \lvert\angle ARM\rvert = 90°$		1	
(3)	$\overline{AM} \cong \overline{AM}$		1	
(4)	$\lvert RM\rvert = \lvert OM\rvert < \lvert AM\rvert$		3	
(5)	$\overline{AMO} \cong \overline{AMR}$		5	
(6)	$\overline{AO} \cong \overline{AR}$		2	
(7)	$\overline{BO} \cong \overline{BP} \wedge \overline{CP} \cong \overline{CQ} \wedge \overline{DQ} \cong \overline{DR}$		1	
(8)	$\lvert AB\rvert + \lvert CD\rvert = \lvert BC\rvert + \lvert AD\rvert$		2	

Formulieren Sie die Aussage, die Mark bewiesen hat, als allgemeinen Satz. `(2 Punkte)`

`(erreichte Punkte: )`

Platz für weitere Ausführungen

Die Axiome der Euklidischen Geometrie

Inzidenzaxiome

Axiom I.0
Geraden und Ebenen sind Punktmengen.
Axiom I.1 (Axiom von der Geraden)
Zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die die beiden Punkte enthält.
Axiom I.2
Zu jeder Geraden gibt es (wenigstens) zwei verschiedene Punkte, die dieser Geraden angehören.
Axiom I.3
Es gibt wenigstens 3 paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind.
Axiom I.4
Zu je drei nichtkollinearen Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält. Jede Ebene enthält (wenigstens) einen Punkt.
Axiom I.5
Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene E liegen, so gehört g zu E.
Axiom I.6
Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam. **Axiom I.7**
Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte, die nicht komplanar sind.

Abstandsaxiome

Axiom II.1 (Abstandsaxiom)
Zu je zwei Punkten A und B gibt es eine eindeutig bestimmte nicht negative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$.
Axiom II.2
Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$.
Axiom II/3 (Dreiecksungleichung)
Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt $|AB| + |BC| \geq |AC|$.
Falls koll (ABC), dann ist eine der folgenden Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned}|AB| + |BC| &= |AC|\\ |AC| + |CB| &= |AB|\\ |BA| + |AC| &= |BC|\end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so sind A, B und C kollinear.

Axiome der Anordnung

Axiom III.1 (Axiom vom Lineal)
Zu jeder nicht negativen reelen Zahl d gibt es auf jedem Strahl p genau einen Punkt, der zum Anfangspunkt von p den Abstand d hat.
Axiom III.2 (Das Axiom von Pasch)

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$. Ferner sei g eine Gerade, die durch keinen der drei Eckpunkte A, B, C geht. Wenn g eine der drei Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ schneidet, dann schneidet g genau eine weitere Seite des Dreiecks $\overline{ABC}$.

Axiome der Winkelmessung

Axiom IV.1 (Winkelmaßaxiom)
Zu jedem Winkel α gibt es genau eine reelle Zahl ω zwischen 0 und 180.
Axiom IV.2 (Winkelkonstruktionsaxiom)
Es sei $g \equiv SA$ eine Gerade in der Ebene E. Zu jeder reellen Zahl ω mit $0 < \omega < 180$ gibt es in jeder der beiden durch g bestimmten Halbebenen der Ebene E genau einen Strahl SB^+ mit $|\omega| = |\angle ASB|$
Axiom IV.3 (Winkeladditionsaxiom)
Wenn der Punkt P zum Inneren des Winkels $\angle ASB$ gehört , dann gilt $|\angle ASP|+|\angle PSB| = |\angle ASB|$.
Axiom IV.4 (Supplementaxiom)
Nebenwinkel sind supplementär.

Das Kongruenzaxiom

Axiom V (Kongruenzaxiom SWS)
Wenn für zwei Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ die folgenden 3 Kongruenzen

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF} \\ \angle CAB &\cong \angle FDE \end{aligned}$$

gelten,
dann sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Euklidisches Parallelenaxiom

Axiom EP
Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es höchstens eine Gerade h, die durch P geht und zu g parallel ist.