Rechenregeln mit antikommutierenden Koordinaten

Es seien Koordinaten $x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ gegeben sowie die zugehörigen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}$. Es gelten folgende Rechenregeln:

- Koordinaten (anti)kommutieren:

$$[x^m, x^n] = [x^m, \theta^\alpha] = \left[x^m, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right] = \left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\} = \left\{\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right\} = \left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = 0$$

- Differentialoperatoren (anti)kommutieren:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^n}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\right] = \left\{\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \theta^\beta}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\beta}}}\right\} = 0$$

- Differentialoperatoren wirken nur auf die zugehörige Koordinate:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^m}, x^n\right] = \delta_m^n, \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \theta^\beta\right\} = \delta_\alpha^\beta, \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^m}, \theta^\alpha\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, x^m\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^m}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, x^m\right] = \left\{\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \theta^\alpha\right\} = 0$$

Grundsätzlich gilt: x^m, $\frac{\partial}{\partial x^m}$ sind bosonische Operatoren, $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}$ sind fernionische Operatoren. Jedes Produkt mit einer ungeraden Anzahl fermionischer Operatoren ist fermionisch, mit einer geraden Anzahl bosonisch. Bosonische Operatoren untereinander und bosonische mit fermionischen Operatoren gemischt erfüllen Vertauschungsrelationen, fermionische Operatoren untereinander erfüllen Antivertauschungsrelationen.