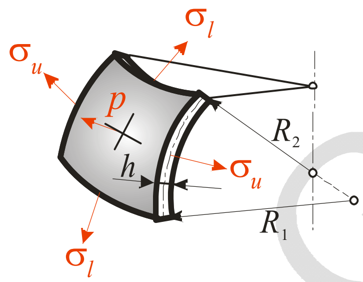
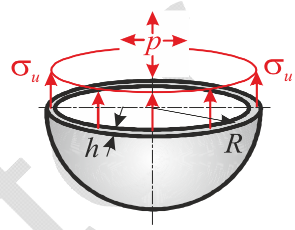
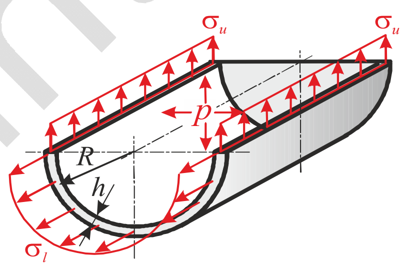
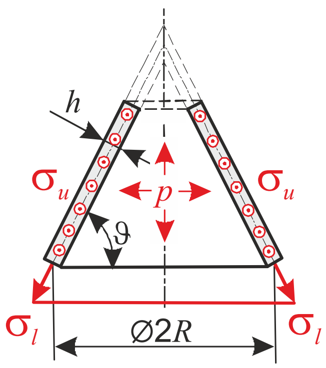
Flächentragwerke

Voraussetzung:

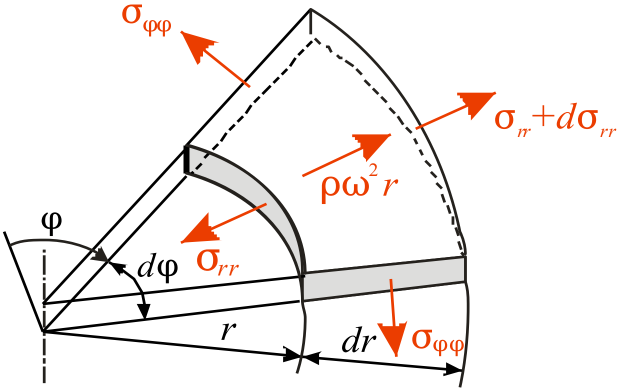
Belastung, Geometrie, Materialverhalten sind rotationssymmetrisch:
→ Spannungs- und Verzerrungszustand ist rotationssymmetrisch

Rotationsschalen (Behälter - Membrantheorie)

<table>
<tr><th colspan="2">Behälter</th><th>Längs-spannung</th><th>Umfangs-spannung</th></tr>
<tr><td>allgemein</td><td>
</td><td colspan="2">$\frac{\sigma_l}{R_1} + \frac{\sigma_u}{R_2} = \frac{p}{h}$

↑: (Rotationsachse)</td></tr>
<tr><td>Kugelschale</td><td>
</td><td colspan="2">$\frac{R}{2\,h}\,p$</td></tr>
<tr><td>Zylinder-schale</td><td>
</td><td>$\frac{R}{2\,h}\,p$</td><td>$\frac{R}{h}\,p$</td></tr>
<tr><td>Kegelschale</td><td>
</td><td>$\frac{R}{2\,h\sin\vartheta}\,p$</td><td>$\frac{R}{h\sin\vartheta}\,p$</td></tr>
</table>

Kreis- und Kreisringscheiben



Differenzialgleichung

$$u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \left[\frac{1}{r}\left(r\,u_r\right)'\right]' = -\frac{1-\nu^2}{E}\,\rho\,\omega^2\,r + (1+\nu)\,\alpha\,(\Delta T)'$$

mit: $u_r(r)$ - Verschiebung in radialer Richtung
ρ - Massendichte
$\omega = 2\,\pi\,n$ Winkelgeschwindigkeit (n – Drehzahl)
$(\;)' = \dfrac{\partial(\;)}{\partial r}$

Allgemeine Lösung

$$u_r = C_1\,r + C_2\,\frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^3 + (1+\nu)\,\frac{\alpha}{r}\int_a^r \bar{r}\,\Delta T(\bar{r})\,d\bar{r}$$

mit: $a = \begin{cases} 0 & \text{(Vollscheibe)} \\ \text{Innenradius} & \text{(Ringscheibe)} \end{cases}$

C_1, C_2 – Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 1 pro Rand) für u_r bzw. σ_{rr}

Spannungen

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\,\frac{u_r}{r} + u_r' - (1+\nu)\,\alpha\,\Delta T\right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u_r}{r} + \nu\,u_r' - (1+\nu)\,\alpha\,\Delta T\right]$$

Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese S. 19

Dehnungen

$$\varepsilon_{rr} = u_r{}' \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right) + \alpha\,\Delta T$$

Alternative Lösung *(günstig bei Spannungs-Randbedingungen)*

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} K_1\, r + \frac{1+\nu}{E} K_2 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8\,E} \rho\,\omega^2\, r^3 + (1+\nu)\frac{\alpha}{r}\int_a^r \bar{r}\,\Delta T(\bar{r})\,d\bar{r}$$

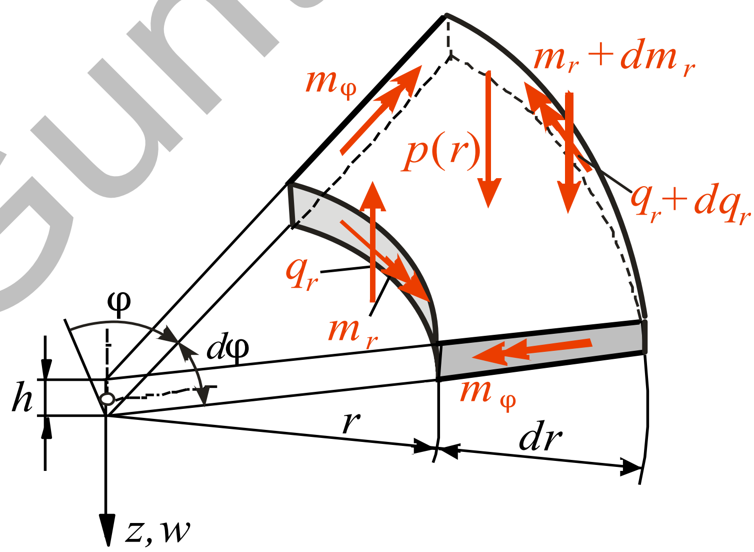
$$\sigma_{rr} = K_1 - \frac{1}{r^2} K_2 - \frac{3+\nu}{8} \rho\,\omega^2\, r^2 - \frac{E\,\alpha}{r^2}\int_a^r \bar{r}\,\Delta T(\bar{r})\,d\bar{r}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = K_1 + \frac{1}{r^2} K_2 - \frac{1+3\,\nu}{8} \rho\,\omega^2\, r^2 - E\,\alpha\left(\Delta T - \frac{1}{r^2}\int_a^r \bar{r}\,\Delta T(\bar{r})\,d\bar{r}\right)$$

mit: K_1, K_2 – Integrationskonstanten

Dehnungen wie oben

Kreis- und Kreisringplatten



Differenzialgleichung

$$\Delta\Delta w = w'''' + 2\,\frac{w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} = \frac{1}{r}\left\{ r \left[\frac{1}{r} \left(r\,w' \right)' \right]' \right\}' = \frac{p(r)}{K}$$

mit: $w(r)$ – Verschiebung der Plattenmittelfläche in z-Richtung

$K = \dfrac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ Plattensteifigkeit

$(\ )' = \dfrac{d(\ )}{dr}$

Allgemeine Lösung für $p(r) = p_0 = konst.$

$$w = C_1 + C_2 \ln\frac{r}{r_0} + C_3\, r^2 + C_4\, r^2 \ln\frac{r}{r_0} + \frac{p_0\, r^4}{64\, K}$$

mit: r_0 - beliebiger Bezugsradius
$C_1, \ldots, C_4$ - Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 2 pro Rand) für w oder q_r bzw. w' oder m_r

Schnittgrößen

$$m_r = -K\left(w'' + \nu\,\frac{w'}{r} \right) \qquad m_\varphi = -K\left(\nu\, w'' + \frac{w'}{r} \right)$$

$$q_r = -K\left(w''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right)$$

Spannungen

$$\sigma_{rr} = \frac{12\, m_r}{h^3}\, z \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{12\, m_\varphi}{h^3}\, z$$

mit: $-\dfrac{h}{2} \le z \le \dfrac{h}{2}$

Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese S. 19

Dehnungen

$$\varepsilon_{rr} = -z\, w'' \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -z\,\frac{w'}{r} \qquad \varepsilon_{zz} = 0$$

Mögliche Randbedingungen bei (rotationssymmetrisch belasteten) Kreis- und Kreisringscheiben

- Kreis**ring**scheibe

Innenrand	$\sigma_r = \sigma_i\,(=0)$	$\sigma_r = \sigma_i\,(=0)$	$u_r = u_i\,(=0)$	$u_r = u_i\,(=0)$
Außenrand	$\sigma_r = \sigma_a\,(=0)$	$u_r = u_a\,(=0)$	$\sigma_r = \sigma_a\,(=0)$	$u_r = u_a\,(=0)$

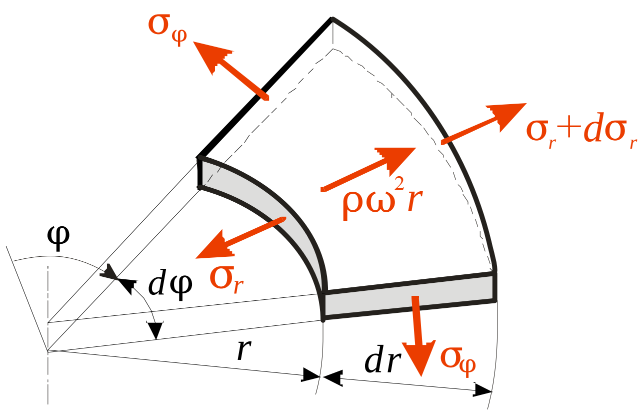
- Kreisscheibe

Scheibenmitte	σ_r und σ_φ endlich, $u_r = 0$: $C_2 = 0$ bzw. $K_2 = 0$	
Außenrand	$\sigma_r = \sigma_a\,(=0)$	$u_r = u_a\,(=0)$

$\sigma_i, \sigma_a, u_i, u_a$ sind die (konstanten Radialspannungen bzw. Radialverschiebungen, die im Sonderfall auch Null sein können.

Sind „andere“ Randbedingungen (Drücke, Dehnungen …) gegeben, so lassen diese sich stets auf die oben angegebenen zurückführen.

Kreis- und Kreisringscheiben



ρ - Massendichte
$\omega = 2\,\pi\,n$ Winkelgeschwindigkeit (n – Drehzahl)
$\Delta T(r)$ - Temperaturdifferenz

$$u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \left[\frac{1}{r}\left(r\,u_r\right)'\right]' = -\frac{1-\nu^2}{E}\,\rho\,\omega^2\,r + (1+\nu)\,\alpha\,(\Delta T)'$$

mit: $u_r(r)$ - Verschiebung in radialer Richtung

$$(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial r}$$

$$u_r = C_1\,r + C_2\,\frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^3 + (1+\nu)\,\frac{\alpha}{r}\int_a^r \bar{r}\,\Delta T(\bar{r})\,d\bar{r}$$

mit: $a = \begin{cases} 0 & \text{(Vollscheibe)} \\ \text{Innenradius} & \text{(Ringscheibe)} \end{cases}$

C_1, C_2 – Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 1 pro Rand) für u_r bzw. σ_r

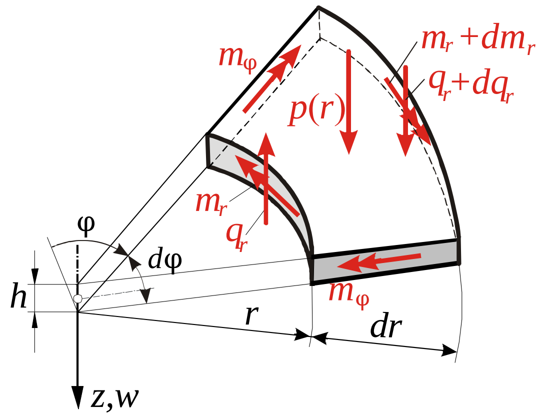
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\,\frac{u_r}{r} + u_r' - (1+\nu)\,\alpha\,\Delta T\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{u_r}{r} + \nu\,u_r' - (1+\nu)\,\alpha\,\Delta T\right]$$

Gestaltänderungsenergiehypothese: $\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\,\sigma_\varphi}$

$$\varepsilon_r = u_r' \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right) + \alpha\,\Delta T$$

Kreis- und Kreisringplatten



$p(r)$ – Druck auf Plattenmittelfläche

$K = \dfrac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ Plattensteifigkeit

$$\Delta\Delta w = w'''' + 2\,\frac{w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} = \frac{1}{r}\left\{r\left[\frac{1}{r}\left(r\,w'\right)'\right]'\right\}' = \frac{p(r)}{K}$$

mit: $w(r)$ - Verschiebung der Plattenmittelfläche in z-Richtung

$(\ )' = \dfrac{\partial(\ )}{\partial r}$

$$w = C_1 + C_2\,\ln\frac{r}{r_0} + C_3\,r^2 + C_4\,r^2\,\ln\frac{r}{r_0} + \frac{p_0\,r^4}{64\,K}$$

für: $p(r) = p_0 = konst.$

mit: r_0 - beliebiger Bezugsradius

$C_1, \ldots, C_4$ - Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 2 pro Rand) für w oder q_r bzw. w' oder m_r

$$m_r = -K\left(w'' + \nu\,\frac{w'}{r}\right) \qquad m_\varphi = -K\left(\nu\,w'' + \frac{w'}{r}\right) \qquad q_r = -K\left(w''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2}\right)$$

$$\sigma_r = \frac{12\,m_r}{h^3}\,z \qquad \sigma_\varphi = \frac{12\,m_\varphi}{h^3}\,z$$

mit: $-\dfrac{h}{2} \le z \le \dfrac{h}{2}$

Gestaltänderungsenergiehypothese: $\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\,\sigma_\varphi}$

$$\varepsilon_r = -z\,w'' \qquad \varepsilon_\varphi = -z\,\frac{w'}{r} \qquad \varepsilon_z = 0$$