**Leibnizschule Hannover**

**- Seminararbeit -**

# Verfolgungsprobleme

Ph. Sch.

Schuljahr: 2010

Fach: Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

## 1.1 Grundsätzliches über Verfolgungsprobleme

Grundsätzlich sind Verfolgungsprobleme Fragestellungen, bei denen ein sich bewegender Punkt $A$ von einem anderen Punkt $B$ verfolgt wird. Dabei bewegt sich $A$ auf eine definierte Art und Weise, $B$ hält sich an eine bestimmte Verfolgungsstrategie. Die Kurve, auf der sich $B$ bewegt (Verfolgungskurve), soll bestimmt werden.
Da ein Hund, der seinem sich bewegenden Herrchen folgt, eine Verfolgungskurve beschreibt, werden Verfolgungskurven auch als Hundekurve bezeichnet. Deshalb werde ich manchmal den verfolgten Punkt $A$ als Herrchen und den verfolgenden Punkt $B$ als Hund bezeichnen.

In dieser Seminararbeit werde ich mich auf Verfolgungsprobleme beschränken, bei denen sich $A$ auf einer festgelegten Kurve und $B$ immer genau in Richtung von $A$ bewegt. Dabei sind die Geschwindigkeiten der beiden Punkte konstant. Die sich dabei ergebenden Verfolgungskurven nennt man Radiodromen[1].

## 1.2 Historischer Überblick

Die ältesten überlieferten Verfolgungsaufgaben stammen aus China[2]. Bei diesen bewegen sich die Punkte auf der gleichen, vordefinierten Kurve mit einer jeweils definierten Geschwindigkeit.
Später traten Verfolgungsprobleme auch in indischen, arabischen und byzantinischen Texten auf. Hierbei konnten die Kurven verschieden sein, waren aber immer noch vordefiniert; außerdem konnte sich die Geschwindigkeit verändern.
Seit dem 14. Jahrhundert kommen Verfolgungsaufgaben auch in europäischen Büchern vor. Bis ins 16. Jahrhundert waren die meisten Aufgaben Abwandlungen von zwei Grundmotiven, die schon in den altchinesischen Texten aufgetreten waren: Ein Hund jagt einem Hasen nach, oder ein Wanderer folgt einem anderen.

Im 17. Jahrhundert stellte der Pariser Arzt *Claude Perrault* vielen Mathematikern die Aufgabe, die Kurve zu berechnen, die eine an einer Kette befestigte Taschenuhr beschreibt, wenn das Kettenende auf einer Geraden bewegt wird. Dieses Problem wurde erst nach *Perraults* Tod gelöst.
Die von der Uhr beschriebene Kurve ist zwar noch keine Radiodrome (s. 1.1 „Grundsätzliches über Verfolgungsprobleme“), sondern eine Traktrix (Schleppkurve), aber man kann sich auch eine solche Verfolgung vorstellen, nämlich wenn der Verfolger immer den gleichen Abstand zum Verfolgten einhält.
*Perraults* Fragestellung war die erste Verfolgungsaufgabe, bei der es darum ging, die Kurve zu bestimmen, auf der sich der Verfolger bewegt.

1732 formulierte *Bouger* die erste moderne Verfolgungsaufgabe, bei der die Geschwindigkeiten des Verfolgers und des Verfolgten jeweils konstant sind (also eine Aufgabe, deren Lösung eine Radiodrome war): Ein Schiff, das sich auf einer Geraden bewegt, wird von einem Piratenschiff verfolgt. Die Kurve des Piratenschiffs sollte ermittelt werden. Diese Problemstellung wurde von *Bouger* selbst gelöst.

[1] Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Verfolgungskurve
[2] Quelle dieses Unterkapitels: http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node3.html

Bei seiner Lösung von *Bougers* Problem verallgemeinerte *Mapertuis* die Fragestellung auf beliebige Fluchtkurven des verfolgten Schiffs (allgemeine Radiodrome).

Den Trivialnamen Hundekurve erhielt die Radiodrome, als *Dubois-Aymé* im 19. Jahrhundert die Kurve eines Hundes, der sein Herrchen am Strand verfolgt, beschrieb.
1832 veröffentlichten *Saint Laurent* und *Ch. Sturm* die Lösung zu einer Verfolgungsaufgabe, bei der der Hund auf dem Weg zu seinem Herrchen durch einen Fluss schwimmen muss, der ihn mitreißt. Indem sie diese Aufgabe auf die Verfolgungskurve nach *Bouger* (also auf die Radiodrome) zurückführten, bewiesen sie, dass Radiodromen translationsinvariant sind.

# 2 Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung von Verfolgungskurven

Da Verfolgungen zeitlich ablaufende Prozesse sind, sollte man für eine einfache Betrachtung die Bewegung jedes Punktes durch eine Kurve in Parameterform beschreiben, also durch zwei von der Zeit abhängige Funktionen: Eine Funktion für die $x$- und eine für die $y$-Koordinate des Punktes zum jeweiligen Zeitpunkt. So beschreiben beispielsweise die Funktionen $B_x(t)$ und $B_y(t)$ die Bewegung des Punktes $B$ (des Hundes) abhängig von der Zeit. Um den Startpunkt einer Kurve zu bezeichnen, wird der Kurvenname mit dem Index 0 verwendet: $B_0$ ist der Startpunkt des Hundes.
Um die Ableitung einer von der Zeit abhängigen Funktion darzustellen, verwende ich anstelle von $f'(t)$ die in der Physik übliche Schreibweise $\dot{f}(t)$. Also ist $\dot{B}_x(t)$ die zeitliche Ableitung von $B_x(t)$ (und somit die Geschwindigkeit des Hundes in $x$-Richtung).

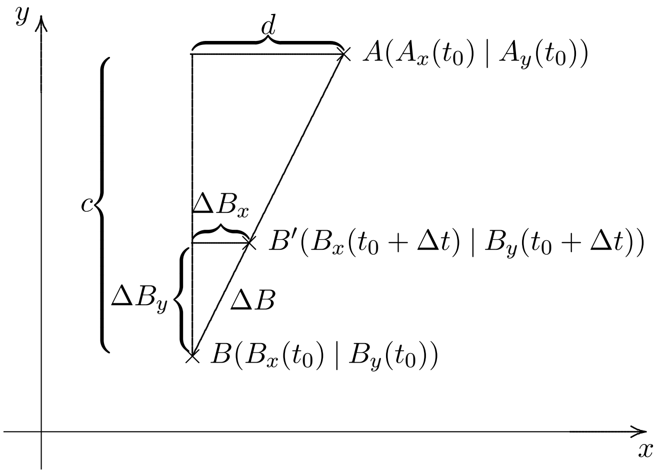
## 2.1 Herleitung

Es soll ein Verfahren entwickelt werden, um die Verfolgungskurve des Hundes zu berechnen, wenn die Kurve, auf der sich das Herrchen bewegt, der Startpunkt des Hundes und das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Hund und Herrchen ($\frac{v_B}{v_A}$) gegeben sind.
Zuerst wollte ich ein Verfahren entwickeln, um aus einer Funktion $f(x)$, auf deren Graph sich das Herrchen bewegt, die beiden zeitlichen Funktionen $A_x(t)$ und $A_y(t)$ zur Beschreibung der Bewegung des Herrchens so zu ermitteln, dass die Geschwindigkeit des Herrchens konstant bleibt (s. 1.1 „Grundsätzliches über Verfolgungsprobleme“). Dies erwies sich jedoch als zu kompliziert.
Es lässt sich aber auch mit einer variablen Geschwindigkeit des Herrchens arbeiten, da das Geschwindigkeitsverhältnis von Hund und Herrchen ($\frac{v_B}{v_A}$) definiert ist, mit dem zu jedem Zeitpunkt aus der jeweiligen Geschwindigkeit des Herrchens die des Hundes berechnet werden kann.
Ich werde ein iteratives Näherungsverfahren zur Berechnung von Verfolgungskurven entwickeln, da eine exakte Lösung zu kompliziert ist (es gibt jedoch sogar eine Möglichkeit, die Kurve statt in Parameterform mithilfe einer zeitfreien Funktionsgleichung zu beschreiben, s. 5 „Ausblick“).

Gegeben sind:

- Die Kurve des Herrchens als $A_x(t)$, $A_y(t)$
- Das Geschwindigkeitsverhältnis $\dfrac{v_B}{v_A}$ (der Einfachheit halber als $k$ bezeichnet)

Es muss eine Methode gefunden werden, um bei gegebenen $B_x(t_0)$ und $B_y(t_0)$ (Koordinaten von $B$) die Werte für $B_x(t_0 + \Delta t)$ und $B_y(t_0 + \Delta t)$ (Koordinaten von $B'$) zu berechnen. Dazu muss zuerst die Geschwindigkeit des Herrchens ($v_A$) berechnet werden. Da sich diese aus zwei Anteilen zusammen setzt, die senkrecht aufeinander stehen (nämlich aus der Geschwindigkeit in $x$-Richtung $\dot{A}_x(t_0)$ und der in $y$-Richtung $\dot{A}_y(t_0)$)[1], gilt nach dem Satz des Pythagoras:




$$v_A = \sqrt{\dot{A}_x(t_0)^2 + \dot{A}_y(t_0)^2}$$

Mithilfe des Geschwindigkeitsverhältnisses $k$ kann die Geschwindigkeit des Hundes berechnet werden:

$$v_B = k \cdot v_A$$

Damit kann der Streckenabschnitt $\Delta B$ berechnet werden, um den sich der Hund im Zeitabschnitt $\Delta t$ bewegt (Abstand von $B$ und $B'$):

$$\Delta B = v_B \cdot \Delta t$$

Die in der Zeichnung gekennzeichneten Strecken $c$ und $d$ berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} c &= A_y(t_0) - B_y(t_0) \\ d &= A_x(t_0) - B_x(t_0) \end{aligned}$$

Nun lässt sich der Abstand der Punkte $A$ und $B$, er soll mit $e$ bezeichnet werden, berechnen (Pythagoras):

$$e = \sqrt{c^2 + d^2}$$

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass folgender Zusammenhang gilt (Strahlensatz):

$$\frac{\Delta B}{e} = \frac{\Delta B_y}{c} = \frac{\Delta B_x}{d}$$

Da alle anderen Werte bekannt sind, lassen sich nun $\Delta B_x$ und $\Delta B_y$ berechnen:

$$\Delta B_x = \frac{\Delta B}{e} \cdot d$$

$$\Delta B_y = \frac{\Delta B}{e} \cdot c$$

Dies sind die Summanden, die benötigt werden, um aus den Koordinaten von $B$ die Koordinaten von $B'$ zu berechnen. Somit steht eine verhältnismäßig einfache Methode zur Verfügung, um Verfolgungskurven iterativ zu berechnen.

Wenn zu einem Zeitpunkt $t_0$ die Strecke $\Delta B$, um die sich der Hund in der Zeit $\Delta t$ bewegt, größer oder gleich dem Abstand zwischen Hund und Herrchen ($e$) ist, erreicht (bzw. überholt) der Hund das Herrchen bis zum Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$. In diesem Fall endet die Verfolgung; der entsprechende Punkt, an dem der Hund das Herrchen eingeholt hat, wird in den Grafiken durch den Punkt $S$ (für Schnittpunkt) gekennzeichnet.

[1] Dieser Zusammenhang war mir zuerst nicht klar, erst nach Lesen der Quelle: Kopie vom Fachlehrer (http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Verfolgungskurven.pdf)

## 2.2 Funktionsgraphen als Kurve des Herrchens

Da beim oben erarbeiteten Verfahren die Geschwindigkeit des Herrchens keine Rolle spielt, können Funktionsgraphen auf sehr einfache Art und Weise als Kurve benutzt werden, auf der sich das Herrchen bewegt:
$f(x)$ sei die Funktion, auf dessen Graphen sich das Herrchen bewegen soll. Dann muss man die folgenden Funktionen zur Beschreibung der Bewegung des Herrchens verwenden:

$$\begin{aligned} A_x(t) &= t \\ A_y(t) &= f(t) \end{aligned}$$

So startet das Herrchen auf dem Funktionsgraphen bei $x = 0$. Soll das Herrchen an einem anderen Punkt starten, muss die Funktion entsprechend verschoben werden.

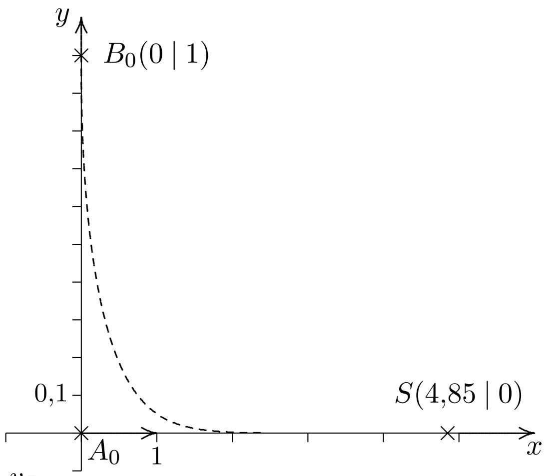
# 3 Verschiedene Beispiele für Verfolgungskurven

## 3.1 Bewegung des Herrchens auf einer Geraden

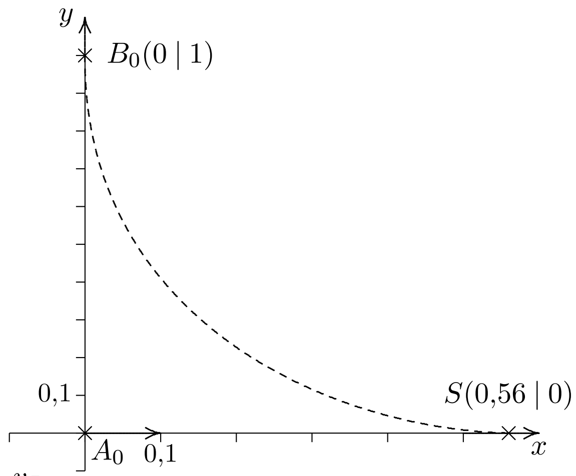
### 3.1.1 Steigung $m = 0$

Kurve des Herrchens:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &\Downarrow \\ A_x(t) &= t \\ A_y(t) &= 0 \end{aligned}$$

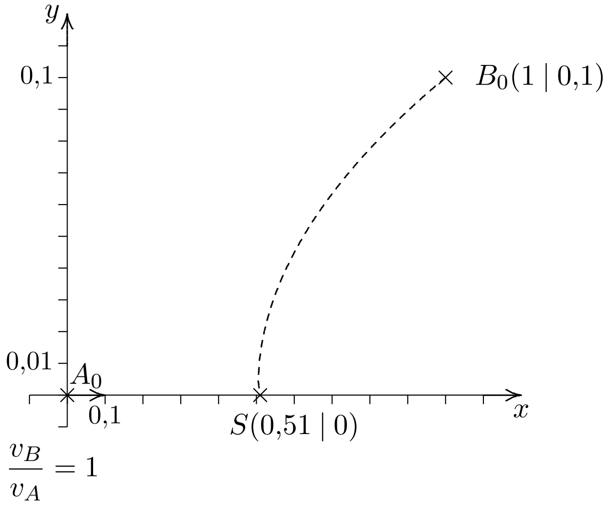



$\frac{v_B}{v_A} = 1{,}1$




$\frac{v_B}{v_A} = 2{,}2$

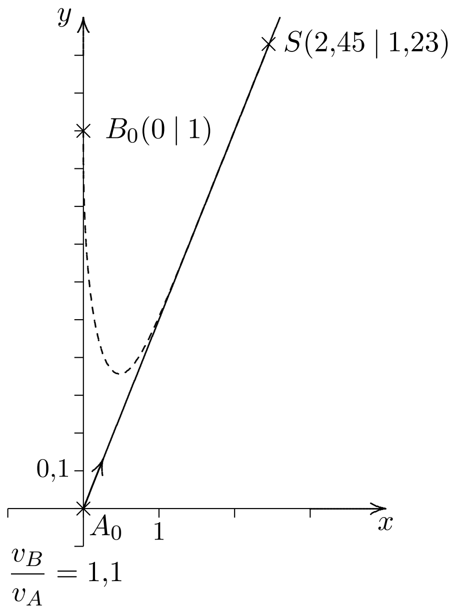
Man erkennt deutlich, wie stark die Strecke, die der Hund bis zum Einholen des Herrchens laufen muss, vom Geschwindigkeitsverhältnis abhängt: Obwohl der Hund bei der zweiten Verfolgung nur doppelt so schnell ist wie bei der ersten, erreicht er das Herrchen nach dem Zurücklegen einer viel kürzeren Strecke. Ist der Hund genau so schnell wie das Herrchen ($\frac{v_B}{v_A} = 1$), erreicht er das Herrchen nie (ohne Abbildung).
Verändert man jedoch die Startposition des Hundes, holt er das Herrchen auch bei gleicher Geschwindigkeit ein:

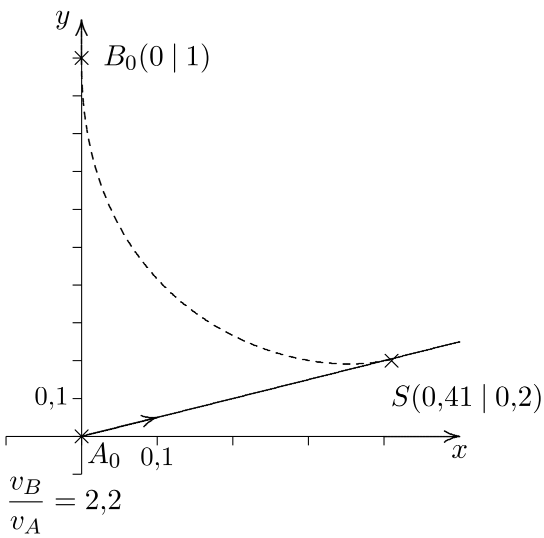



### 3.1.2 Steigung $m = \frac{1}{2}$

Kurve des Herrchens:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\,x \\ &\Downarrow \\ A_x(t) &= t \\ A_y(t) &= \frac{1}{2}\,t \end{aligned}$$

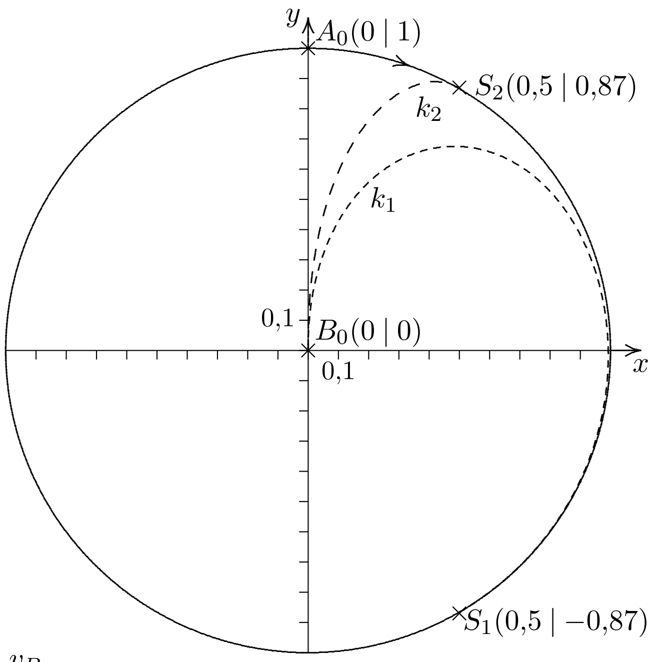



## 3.2 Bewegung des Herrchens auf einem Kreis

Kurve des Herrchens (Einheitskreis):

$$\begin{aligned} A_x(t) &= \sin(t) \\ A_y(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$



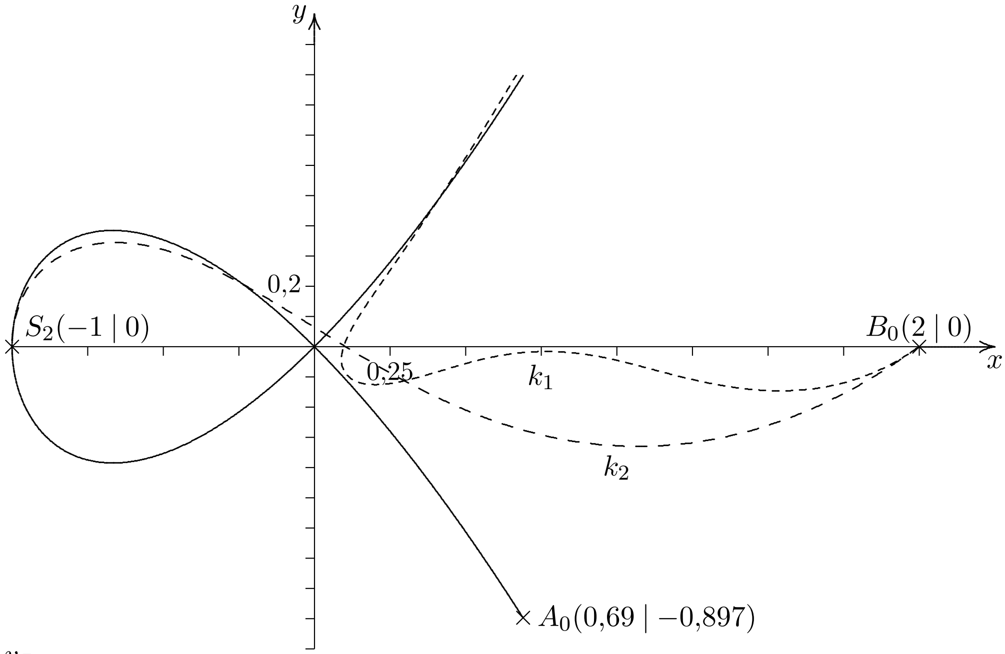

| | |
|---|---|
| $k_1$ | 1,1 |
| $k_2$ | 2,2 |

$$\frac{v_B}{v_A} = k_n$$

## 3.3 Bewegung des Herrchens auf einer Konchoide

Kurve des Herrchens[1]:

$$\begin{aligned} A_x(t) &= (t-1{,}3)^2 - 1 \\ A_y(t) &= (t-1{,}3)^3 - (t-1{,}3) \end{aligned}$$




| | |
|---|---|
| $k_1$ | 0,5 |
| $k_2$ | 1,35 |

$$\frac{v_B}{v_A} = k_n$$

Ist der Hund halb so schnell wie das Herrchen ($k_1$), erreicht er es nie.

[1] Idee zu diesem Unterkapitel: Kopie vom Fachlehrer (http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Verfolgungskurven.pdf)

# 4 Verfolgungsaufgaben mit einem Fluss

## 4.1 Überlegungen

Nun sollen Problemstellungen berücksichtigt werden, bei denen der Hund auf dem Weg zu seinem Herrchen einen Fluss durchschwimmen muss, dessen Strömung ihn in $x$-Richtung mitreißt. Dazu wird eine Funktion definiert, die jedem $y$-Wert in einem bestimmten Bereich ($y$-Koordinaten der Flussufer – in den Beispielen 0,25 bis 0,75) eine Strömungsgeschwingigkeit zuordnet:

$$v_F(y)$$

Bei der Berechnung eines neuen Punktes auf der Verfolgungskurve wird nun die Strömungsgeschwindigkeit an der $y$-Koordinate des alten Punktes berechnet:

$$v_F(B_y(t_0))$$

Mithilfe der zeitlichen Auflösung $\Delta t$ kann die Strecke berechnet werden, um die der Fluss den Hund mitreißt:

$$\Delta t \cdot v_F(B_y(t_0))$$

Diese Strecke muss man nun als zusätzlichen Summanden bei der Berchnung der $x$-Koordinate berücksichtigen. Somit gilt für die neue $x$-Koordinate (vorausgesetzt, $\Delta B_x$ wurde berechnet, s. 2 „Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung von Verfolgungskurven“):

$$B_x(t_0 + \Delta t) = B_x(t_0) + \Delta B_x + \Delta t \cdot v_F(B_y(t_0))$$

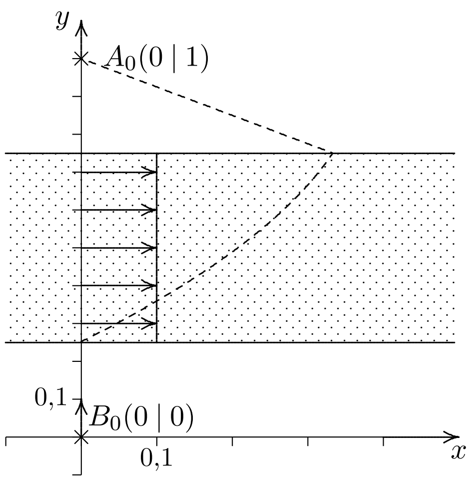
Die verwendete Funktion $v_F(y)$ wird zusätzlich zum Text in den Grafiken dargestellt (im Maßstab 1:10).

In den Beispielen steht das Herrchen jeweils unbewegt auf dem Punkt $A_0(0 \mid 1)$, der Hund hat die Geschwindigkeit 1.

## 4.2 Konstante Strömung

Die Strömung des Flusses beträgt konstant 1:

$$v_F(y) = 1$$



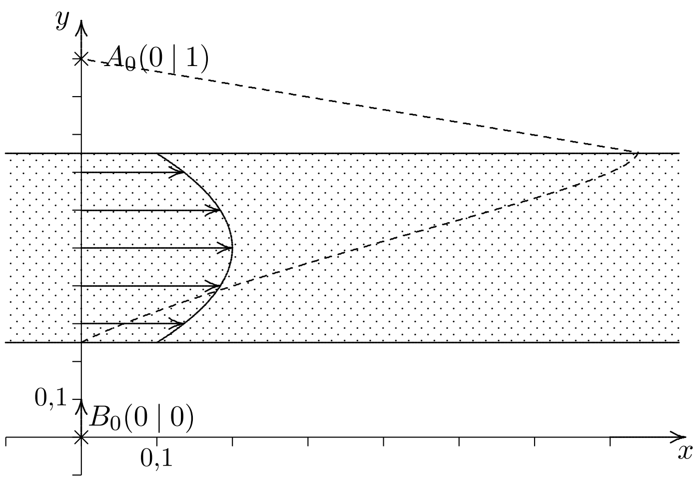
## 4.3 Parabelförmige Strömung

An den Flussufern soll die Strömung jeweils 1 betragen, in der Flussmitte 2. Die Strömungsfunktion soll eine Parabel sein. Für die allgemeine Funktionsgleichung $v_F(y) = ay^2 + by + c$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= 0{,}25^2 \cdot a + 0{,}25 \cdot b + c \\ 1 &= 0{,}75^2 \cdot a + 0{,}75 \cdot b + c \\ 2 &= 0{,}5^2 \cdot a + 0{,}5 \cdot b + c \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, ergibt sich die folgende Strömungsfunktion:

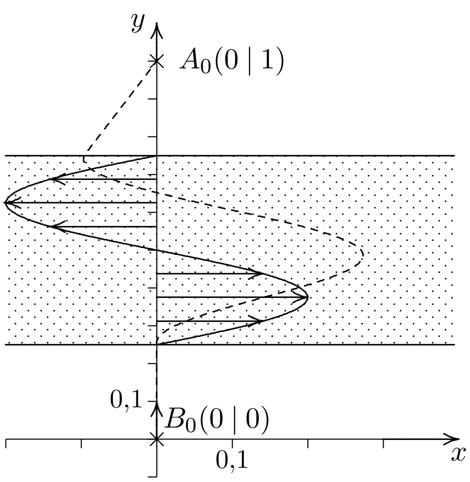
$$v_F(y) = -16y^2 + 16y - 2$$




## 4.4 Sinusförmige Strömung

Als Strömungsfunktion soll eine Sinusfunktion verwendet werden. Innerhalb des Bereiches von 0,25 bis 0,75 soll genau eine Periode sein. Die maximale Strömung soll 2, die minimale -2 betragen. Damit ergibt sich die folgende Funktion:

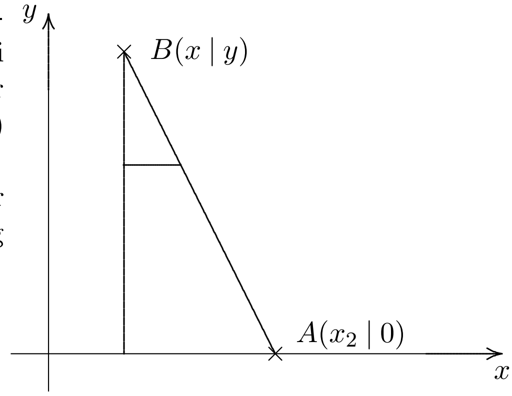
$$v_F(y) = 2 \cdot \sin(4\pi y + \pi)$$




Interessanterweise scheint ein Teil der Kurve des Hundes ebenfalls sinusförmig zu sein. Jedoch lässt sich diese Annahme wegen des iterativen Rechenverfahrens nicht nachprüfen.

# 5 Ausblick: Zeitfreie Funktionsgleichung bei Bewegung des Herrchens auf einer Geraden

Für den Fall, dass sich das Herrchen auf einer Geraden bewegt, kann man mithilfe einer Differentialgleichung eine (leider recht komplizierte) Funktionsgleichung für die Kurve des Hundes herleiten[1].




Man geht davon aus, dass sich das Herrchen mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_A$ auf der $x$-Achse bewegt, wobei der Startpunkt $A_0(0 \mid 0)$ ist. Der Hund bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_B$ vom Startpunkt $B_0(0 \mid a)$ aus.
Für die Tangente der Verfolgungskurve im Punkt $B$, also für die Ableitung der Kurve ($y'$), gilt, da der Hund in Richtung des Herrchens läuft (s. Abbildung):

$$y' = \frac{-y}{x_2 - x}$$

Da sich das Herrchen mit der Geschwindigkeit $v_A$ auf der $x$-Achse bewegt und in $A_0(0 \mid 0)$ startet, gilt $x_2 = v_A \cdot t$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-y}{v_A \cdot t - x} && \Big| \cdot (v_A \cdot t - x) \quad \Big| : (-y') \\ \frac{y}{y'} &= x - v_A \cdot t \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nach $x$ abgeleitet. Dabei ist zu beachten, dass auch $t$ von $x$ abhängig ist, da $x$ eine der Koordinaten des sich bewegenden Hundes ist.

$$\frac{y'^2 - y \cdot y''}{y'^2} = 1 - v_A \cdot \frac{dt}{dx}$$

Da die Zeit eliminiert werden soll, muss eine Gleichung für den Differentialquotienten $\frac{dt}{dx}$ gefunden werden.
Weil sich die Geschwindigkeit des Hundes $v_B$ aus einem Anteil in $x$- und einem in $y$-Richtung zusammensetzt, gilt (Pythagoras):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= v_B{}^2 \\ \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} &= v_B{}^2 && \Big| \cdot dt^2 \\ dx^2 + dy^2 &= v_B{}^2 \cdot dt^2 && \Big| : dx^2 \\ 1 + \frac{dy^2}{dx^2} &= v_B{}^2 \cdot \frac{dt^2}{dx^2} \\ 1 + y'^2 &= v_B{}^2 \cdot \frac{dt^2}{dx^2} && \Big| : v_B{}^2 \quad \Big| \sqrt{\phantom{x}} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_B} \end{aligned}$$

[1] Quelle dieses Kapitels: http://www.matheraetsel.de/archiv/DGLS/Verfolgungsjagt/verfolgungsjagt2.pdf (die Schreibweise der Internetadresse ist so korrekt!)

Die so erhaltene Gleichung für den Differentialquotienten $\frac{dt}{dx}$ wird nun in die obige Gleichung eingesetzt, in der $t$ eliminiert werden sollte.

$$\begin{aligned}
\frac{y'^2 - y \cdot y''}{y'^2} &= 1 - v_A \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_B} && \Big| \cdot y'^2 \\
y'^2 - y \cdot y'' &= y'^2 - v_A \cdot y'^2 \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_B} && \Big| - y'^2 \\
-y \cdot y'' &= -v_A \cdot y'^2 \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_B} && \Big| : (-y) \\
y'' &= \frac{v_A \cdot y'^2 \cdot \sqrt{1+y'^2}}{v_B \cdot y}
\end{aligned}$$

Da diese Differentialgleichung nicht lösbar ist, geht man von $y(x)$ zur Umkehrfunktion $x(y)$ über und erhält die folgende Gleichung[2]:

$$x'' = \frac{v_A \cdot x'^2 \cdot \sqrt{1+x'^2}}{v_B \cdot y}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist[3]:

$$x(y) = C_2 + \frac{v_B \cdot y \cdot \left(v_A \cdot \cosh\left(C_1 - \frac{v_A \cdot \log(y)}{v_B}\right) + v_B \cdot \sinh\left(C_1 - \frac{v_A \cdot \log(y)}{v_B}\right)\right)}{{v_B}^2 - {v_A}^2}$$

Die in dieser Funktion auftretenden Funktionen sinh und cosh sind der sogenannte Sinus bzw. Kosinus Hyperbolicus, die folgendermaßen definiert werden:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Die Umkehrfunktionen sind der Areasinus Hyperbolicus arsinh bzw. der Areakosinus Hyperbolicus arcosh.

Um eine Funktionsgleichung zur Beschreibung der Verfolgungskurve zu erhalten, müssen die Integrationskonstanten $C_1$ und $C_2$ bestimmt werden.
Um $C_1$ zu bestimmen, wird $x(y)$ einmal abgeleitet[4]:

$$x'(y) = \sinh\left(C_1 - \frac{v_A \cdot \log(y)}{v_B}\right)$$

Befindet sich der Hund im Startpunkt $B_0(0 \mid a)$, beträgt die Ableitung der Funktion 0, da sich das Herrchen genau unter dem Hund befindet und $x$ nach $y$ abgeleitet werden muss. Somit muss $x'(a) = 0$ sein. Eingesetzt in die oben gebildete Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \sinh\left(C_1 - \frac{v_A \cdot \log(a)}{v_B}\right) && \Big| \operatorname{arsinh}() \\
0 &= C_1 - \frac{v_A \cdot \log(a)}{v_B} \\
C_1 &= \frac{v_A \cdot \log(a)}{v_B}
\end{aligned}$$

[2]Diesen Schritt kann ich nicht nachvollziehen, ich habe ihn deshalb ohne Erklärung aus der Quelle (siehe Fußnote 1) übernommen

[3]siehe Fußnote 2

[4]siehe Fußnote 2

Wird $C_1$ in die Funktion eingesetzt, ergibt sich:

$$x(y) = C_2 + \frac{v_B \cdot y \cdot \left(v_A \cdot \cosh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(y))}{v_B}\right) + v_B \cdot \sinh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(y))}{v_B}\right)\right)}{{v_B}^2 - {v_A}^2}$$

Der Startpunkt des Hundes $B_0(0 \mid a)$ muss auf der Kurve liegen, weshalb $x(a) = 0$ sein muss. Mit dieser Bedingung lässt sich $C_2$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
0 &= C_2 + \frac{v_B \cdot a \cdot \left(v_A \cdot \cosh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(a))}{v_B}\right) + v_B \cdot \sinh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(a))}{v_B}\right)\right)}{{v_B}^2 - {v_A}^2} \\
0 &= C_2 + \frac{v_B \cdot a \cdot \left(v_A \cdot \cosh\left(\frac{v_A \cdot 0}{v_B}\right) + v_B \cdot \sinh\left(\frac{v_A \cdot 0}{v_B}\right)\right)}{{v_B}^2 - {v_A}^2} \\
0 &= C_2 + \frac{v_B \cdot a \cdot (v_A \cdot \cosh(0) + v_B \cdot \sinh(0))}{{v_B}^2 - {v_A}^2} \\
0 &= C_2 + \frac{v_B \cdot a \cdot (v_A \cdot 1 + v_B \cdot 0)}{{v_B}^2 - {v_A}^2} \\
0 &= C_2 + \frac{a \cdot v_A \cdot v_B}{{v_B}^2 - {v_A}^2} \\
C_2 &= -\frac{a \cdot v_A \cdot v_B}{{v_B}^2 - {v_A}^2}
\end{aligned}$$

Als endgültige Funktionsgleichung erhält man nun:

$$x(y) = \frac{v_B \cdot y \cdot \left(v_A \cdot \cosh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(y))}{v_B}\right) + v_B \cdot \sinh\left(\frac{v_A \cdot (\log(a) - \log(y))}{v_B}\right)\right) - a \cdot v_A \cdot v_B}{{v_B}^2 - {v_A}^2}$$

Eine so lange Funktionsgleichung ist für eine einfache Betrachtung der Thematik ungeeignet. Außerdem lassen sich Verfolgungskurven, die sich ergeben, wenn sich das Herrchen nicht auf einer Geraden bewegt, vermutlich gar nicht durch eine Funktionsgleichung beschreiben, sondern nur iterativ berechnen. Also ist ein iteratives Verfahren, wie das von mir hergeleitete, eine sinnvolle Näherung.

# 6 Zusammenfassung

In meiner Seminararbeit habe ich mich mit Verfolgungsproblemen beschäftigt.
Zuerst habe ich erklärt, was Verfolgungsprobleme sind, und anschließend einen historischen Überblick gegeben.
Danach habe ich ein Verfahren entwickelt, um Verfolgungskurven iterativ zu berechnen. Mithilfe dieses Verfahrens stellte ich verschiedene Beispiele für Verfolgungskurven dar.
Später erweiterte ich die Berechnungsmethode noch, um die Strömung eines Flusses mit einzubeziehen. Auch dazu gab ich einige Beispiele. Als letztes stellte ich dar, wie sich eine Funktionsgleichung für eine Verfolgungskurve herleiten lässt. Dabei stellte sich heraus, dass das iterative Näherungsverfahren viel einfacher anzuwenden ist, um die Kurven zu berechnen.

...

# 7 Anhang

## 7.1 Literaturverzeichnis


(1) Kopien vom Fachlehrer
(besonders http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Verschiedenespdf/Verfolgungskurven.pdf)

(2) http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node3.html

(3) http://www.matheraetsel.de/archiv/DGLS/Verfolgungsjagt/verfolgungsjagt2.pdf

(4) http://hodgson.pi.tu-berlin.de/Vorlesungen/EDV2/latex/latex.html