# Einheitswurzeln

Besonderes Interesse verdient die Gleichung: $z^n = 1$

Mit $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ heißt das

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)]^n = 1$$

und mit der *Formel von Moivre* (Winkel werden addiert, Beträge multipliziert):

$$z^n = r^n\,[\cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi)] = 1$$

Für die 1 lauten die Polarformen:

$$1 = 1 \cdot [\cos(k \cdot 360^\circ) + i\,\sin(k \cdot 360^\circ)]\,, \qquad k = 0,\ 1, ...$$

Durch Vergleich erhalten wir: $r = 1$

$$n\,\varphi = k \cdot 360^\circ, \quad k = 0,\ 1, ...$$

Damit ergeben sich die $n$ Lösungen (mit der Interpretation der Multiplikation offensichtlich):

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i\,\sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right), \qquad k = 0,\ 1, ...\,,\ n-1$$

Beispiel: $z^6 = 1$

$z_0 = \cos 0^\circ + i\,\sin 0^\circ = 1$

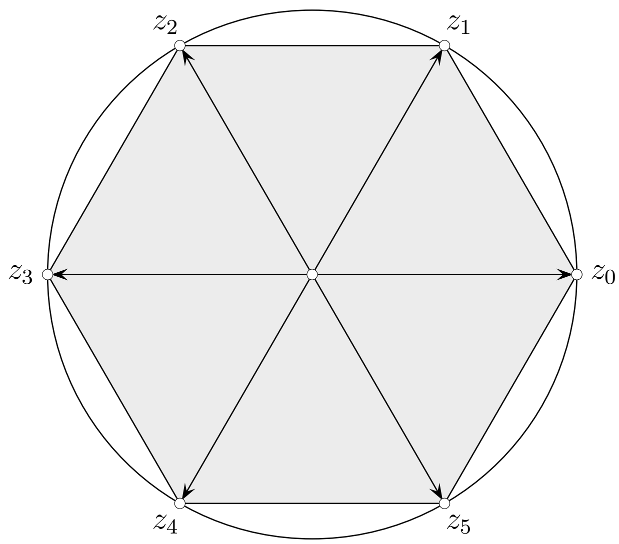
$z_1 = \cos 60^\circ + i\,\sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_2 = \cos 120^\circ + i\,\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_3 = \cos 180^\circ + i\,\sin 180^\circ = -1$

$z_4 = \cos 240^\circ + i\,\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_5 = \cos 300^\circ + i\,\sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$




*Satz von Gauß (1796)*
*Ein regelmäßiges $n$-Eck kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn die Primfaktorzerlegung von $n$ die Form hat:* $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_s$

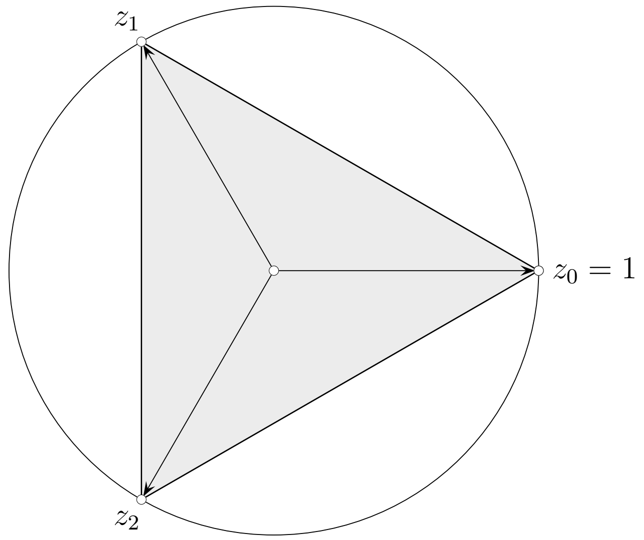
*Die Zweierpotenz darf beliebig sein; die Primzahlen müssen sämtlich voneinander verschieden sein und außerdem von der Art sein, daß $p-1$ eine Zweierpotenz ist.*
*Die Zahlen $n$ unterhalb 50, für welche die Konstruktion durchführbar ist, lauten: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48.*

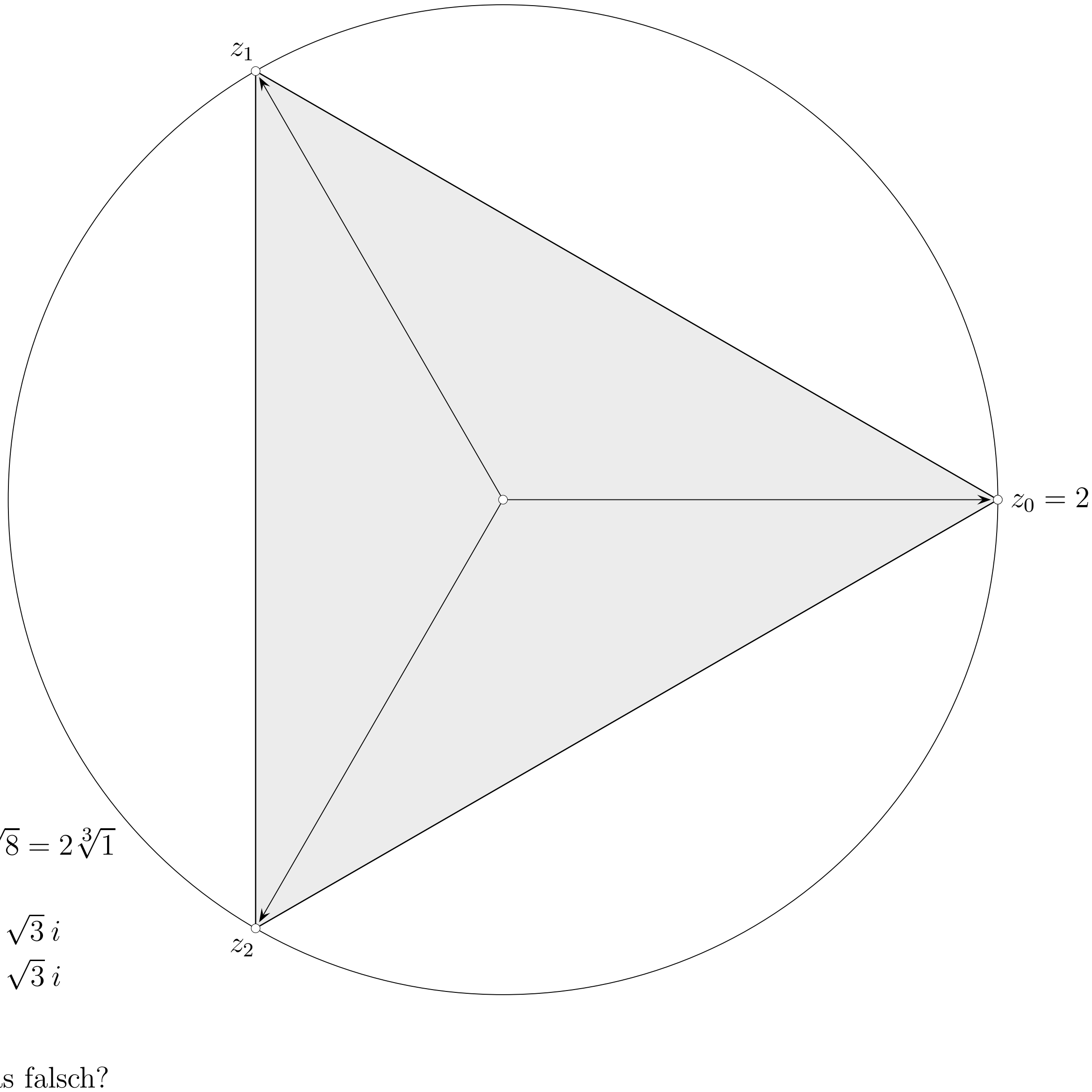
$z^3 = 1, \quad \sqrt[3]{1}$

$z_0 = \cos 0° + i\ \sin 0° = 1$

$z_1 = \cos 120° + i\ \sin 120° = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i$

$z_2 = \cos 240° + i\ \sin 240° = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i$




$z^3 = 8, \quad \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{1}$
$z_0 = 2$
$z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$
$z_2 = -1 - \sqrt{3}\, i$
d

Ist hier was falsch?

a) $1 = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{i^2 \cdot i^2} = \sqrt{i^4} = i^2 = -1$

b) $-1 + \sqrt{3}i = \sqrt[3]{(-1+\sqrt{3}i)^3} = \ldots = \sqrt[3]{8} = 2$

Komplexe Ebene

Komplexe Zahlen

Startseite