Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Klausur zur Linearen Algebra I

Im Multiple-Choice-Teil sollen Sie entscheiden, ob die angegebenen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie das $\boxed{\text{R}}$ an, wenn Sie sie für richtig halten, und das $\boxed{\text{F}}$, wenn Sie sie für falsch halten.

In jeder Multiple-Choice-Aufgabe erhalten Sie einen Punkt für jede korrekte Antwort.

Aufgabe 1. Seien X eine Menge, $f\colon X \to X$ eine Abbildung und $A, B \subset X$ Teilmengen.

1. Es gilt stets $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Sind $f|_A$ und $f|_B$ surjektiv, so ist auch f surjektiv. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Ist f injektiv, so gilt $f(X \backslash A) = f(X) \backslash f(A)$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Es gilt stets $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$

Aufgabe 2. Sei V ein Vektorraum der Dimension 3 und W ein Vektorraum der Dimension 4 und seien

$$\begin{aligned} v_1, v_2, v_3 \in V &\quad \text{linear unabhängige Vektoren} \\ w_1, w_2, w_3 \in W &\quad \text{linear unabhängige Vektoren} \\ z_1, z_2, z_3 \in W &\quad \text{linear abhängige Vektoren} \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Es gibt genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Es gibt genau eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ mit $g(w_i) = v_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Es gibt genau eine lineare Abbildung $h\colon V \to W$ mit $h(v_i) = z_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Es gibt wenigstens eine lineare Abbildung $e\colon W \to V$ mit $e(z_i) = v_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$

Aufgabe 3. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und $f^\top\colon W^\top \to V^\top$ die transponierte Abbildung zwischen den Dualräumen.

1. Ist f injektiv, so ist $f^\top$ stets injektiv. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Ist f injektiv, so ist $f^\top$ stets surjektiv. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Ist f surjektiv, so ist $f^\top$ stets surjektiv. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Ist f ein Isomorphismus, so ist $f^\top$ stets ein Isomorphismus. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$

Aufgabe 4. Sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V, so dass gilt $f^2 = 2\,\mathrm{id}_V$.

1. Der Endomorphismus f ist stets invertierbar. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Es gilt stets $\det f = -2$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Der Endomorphismus f ist stets diagonalisierbar. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Es gilt stets $\dim_k V = 2$. $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$

In jeder der folgenden Aufgabe gibt es 6 Punkte.

Aufgabe 5. Man berechne die Inverse der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4; \mathbb{R})$$

und bezeichne M auch die durch diese Matrix gegebene lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

(i) Man bestimme eine Basis von $\ker(M)$, und man ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.
(ii) Man bestimme eine Basis von $\mathrm{Im}(M)$.
(iii) Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. In $\mathbb{R}^3$ seien U, V die Untervektorräume

$$U = \mathrm{span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V = \mathrm{span}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Man finde einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\ker f = U, \mathrm{Im}(f) = V$ und $f^2 = f$, und man schreibe seine Matrix bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Ist dieser Endomorphismus eindeutig bestimmt?

Aufgabe 8. Man bestimme das Inverse der Nebenklasse von 16 im Körper $\mathbb{F}_{53}$.

Aufgabe 9. Sei $A \in \mathrm{Mat}(4; \mathbb{Q})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne das charakteristische Polynom von A.
(ii) Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.
(iii) Ist A triagonalisierbar? Falls so, finde man eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ von der durch A gegebenen linearen Abbildung f obere Dreiecksgestalt hat.

Aufgabe 10. Sei $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2; k)$, sei $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und sei $f\colon V \to V$ der Endomorphismus definiert durch die Vorschrift

$$f\colon X \longmapsto AX^\top,$$

wobei $X^\top$ die Transponierte von X ist. Für $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_2$ bestimme man, ob f diagonalisierbar und/oder trigonalisierbar ist.

Aufgabe 11. Man zeige: Ist die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ von drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, dann ist eine der drei Zahlen a, b oder c durch 7 teilbar.

Aufgabe 12. Sei V ein drei-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ mit q Elementen.

(i) Man zeige, dass V genau $q^2 + q + 1$ eindimensionale Untervektorräume hat.
(ii) Man zeige, dass V genau $2(2 + q + q^2)$ Untervektorräume hat.

Aufgabe 13. Man zeige, dass es für $n \geq 2$ in der n-ten symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ genau $\frac{n!}{2}$ Permutationen mit Signum $+1$ und genau $\frac{n!}{2}$ Permutationen mit Signum -1 gibt.