Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 05 21. 05. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei $\mathbf{A}$ eine $23 \times 14-$Matrix deren Zeilenraum 8-dimensional ist.

   (a) Welche Dimension hat der Lösungsraum des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $Ax = 0$?

   (b) Welche Dimension hat der Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^{23}$ für dessen Elemente $b \in U$ die Gleichung $Ax = b$ lösbar ist?

2. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrix durch sukzessive Entwicklung nach geeignet gewählten Zeilen oder Spalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrix durch Anwendung des Gaußverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   und finden Sie zugehörige Eigenvektoren. Geben Sie eine Matrix $\mathbf{B}$ an, s dass $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ Diagonalgestalt hat.

5. Betrachten Sie folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + \quad 7\,x_2 &= 44 \\ 11\,x_1 + \ 23\,x_2 &= 156 \end{aligned} \qquad (I)$$

   Die eindeutige Lösung von (I) ist gegeben durch $(10; 2)$.

   (a) Berechnen Sie eine Näherungslösung mit Hilfe des Gaußverfahrens (ohne Zeilenvertauschungen), wobei Sie in jedem Zwischenschritt auf eine Stelle nach dem Komma runden.

(b) Vertauschen Sie die beiden Zeilen von (I). Berechnen Sie dann eine Näherungslösung für dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußverfahrens, wobei Sie wieder in jedem Zwischenschritt auf eine Stelle nach dem Komma runden.

(c) In Aufgabenteil b) wurden die Zeilen zunächst so angeordnet, dass der betragsmäßig größte Koeffizient der ersten Spalte oben steht. Erläutern Sie anhand dieses Beispiels, wieso das zweite Verfahren eine bessere Näherung liefert.

6. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie alle Funktionen $f_0, \ldots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_0 \neq 0$, die das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_0' \\ f_1' \\ \vdots \\ f_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

lösen.

Ansatz: Bestimmen Sie zuerst f_0. Setzen Sie $f_i = g_i \cdot f_0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, und bestimmen Sie dann rekursiv die Funktionen g_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

(b) Welche Lösungen gibt es unter der Annahme, dass $f_0 = 0$ gilt?

(c) Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Differentialgleichungssystems?

7. Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(k)} + a_1 \cdot y^{(k-1)} + \ldots a_{k-1} \cdot y' + a_k \cdot y = 0 \qquad (\star)$$

(a) Zeigen Sie: Wenn man $(\star)$ als System in den Funktionen $u_0 = y$, $u_1 = y', \ldots, u_{k-1} = y^{(k-1)}$ schreibt, erhält man

$$\begin{pmatrix} u_0' \\ \vdots \\ u_{k-1}' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie: Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k.$$

Hinweis: Entwickeln Sie nach der letzten Zeile und nutzen Sie die Blockgestalt der verbleibenden Matrizen aus.

8. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u'' + u' + u = 0. \qquad (\star\star)$$

(a) Schreiben Sie $(\star\star)$ als System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{$\star\star\star$}$$

mit $v = u'$ wie in Aufgabe 7a und zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ die Eigenwerte $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ besitzt.

(b) Finden Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{B}$ aus Eigenvektoren, so dass $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ Diagonalgestalt besitzt.

(c) Finden Sie eine komplexe Lösung $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \neq 0$ von $(\star\star\star)$ und überprüfen Sie, dass $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reelle Lösungen von $(\star\star)$ sind. Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 04.06.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt