Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 07 11. 06. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Seien $\mathbf{b}_1 = (-1, 1, 1, 1)^\top$, $\mathbf{b}_2 = (1, -3, -2, -2)^\top \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormierungsverfahren eine Orthonormalbasis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ von $\mathrm{Lin}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

   (b) Ergänzen Sie $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, und benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ zu einer Orthonormalbasis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$ zu ergänzen.

   (c) Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{v} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ und $\mathbf{w} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$ gilt: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

   (d) Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ existieren eindeutige Vektoren $\mathbf{v} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ und $\mathbf{w} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$, so dass $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{x}$.

2. Bestimmen Sie die Hauptachsen der Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Prüfen Sie, ob folgende Matrizen positiv definit sind?
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Zeigen Sie:

   (a) Ein Punkt, der sich auf dem Rand eines Rades vom Radius r, das auf der x-Achse mit Geschwindigkeit 1 rollt, befindet und zum Zeitpunkt 0 im Ursprung liegt, beschreibt eine Kurve der Form
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t - r\sin(\frac{t}{r}) \\ r - r\cos(\frac{t}{r}) \end{pmatrix}.$$

   (b) Berechnen Sie das vektorielle Bogenelement von $\mathbf{x}$, das Bogenelement von $\mathbf{x}$ und den Tangenteneinheitsvektor von $\mathbf{x}$.

   (c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{x}$ für einen Umlauf des Rades, d.h. auf $[0, 2\pi r]$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Formel $2 - 2\cos(\varphi) = \big(2\sin\big(\frac{\varphi}{2}\big)\big)^2$.

   (d) *1 Zusatzpunkt:* Folgern Sie aus Satz 2.3.2 die Formel:
$$2 - 2\cos(\varphi) = \left(2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2.$$

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 18.06.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt