3. Übungsblatt zur Vorlesung „Elementargeometrie "
Dr. Oliver Fabert
Dipl. math. Alex Koenen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.
Abgabe: Freitag, den 31.05.2013 in der Vorlesung.

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass im Poincareschen Kreisscheibenmodell die Abstandsfunktion $d(\cdot,\cdot)$ folgende Bedingungen erfüllt:

  (i) $d(p,q) = d(q,p)$

  (ii) $d(p,q) \geq 0$ mit $d(p,q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$.

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass Parallelität von Geraden in der hyperbolischen Geometrie keine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 2:
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Euklidische Bewegungsgruppe $E(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Gruppe bezüglich Komposition von Abbildungen ist.

Aufgabe 3:

(a) Gegeben sei ein Kreis k in der Euklidischen Geometrie mit Mittelpunkt $w \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r > 0$. Dann liegt ein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ innerhalb des Kreises, wenn $|p - w| < r$ und p liegt außerhalb des Kreises, wenn $|p - w| > r$. Zeigen Sie: Besitzt ein Kreis bzw. eine Gerade l im $\mathbb{R}^2$ einen Punkt außerhalb des Kreises k und einen Punkt innerhalb des Kreises k, dann schneiden sich k und l.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a) Axiom (A5) für das Poincaresche Kreisscheibenmodell.

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} O(3) \times S^2 &\to S^2 \\ (A, v) &\mapsto Av \end{aligned}$$

ist eine transitive Gruppenwirkung. (*transitiv*: für alle $v, w \in S^2$ gibt es ein $A \in O(3)$ mit $Av = w$.) Bestimmen Sie die folgende Stabilisatoruntergruppe:

$$H = \{A \in O(3) \mid Ae_1 = e_1\}$$