Übungsblatt 12

Analysis III

R. Wallisser / Th. Nopper

Aufgabe 45: Es werde die Funktion $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{für} \quad \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.
2. Geben Sie einen qualitativen verlauf der trigonometrischen Polynome s_1, s_3, s_5 an.

Aufgabe 46: Wämeleitungsgleichung

Aufgabe 47: Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die $n-$te Teilsumme der Fourier-Reihe von f. Für $g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ definiert man

$$||g||_2 := \left(\int_0^{2\pi} g(x)^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

1. Beweisen Sie: Es gilt genau dann $\lim_{n\to\infty} ||f - s_n||_2 = 0$, falls die sogenannte Parsevalsche Gleichung gilt:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx.$$

2. Geben Sie, falls die Parsevalsche Gleichung gilt, den mittleren Fehler $Q_n := ||f - s_n||$ mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten an.

Aufgabe 48:

1. Es sei $0 < a \leq 1/2$. Kann die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-a} \sin(kx)$$

   die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ sein?

2. Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar, dann ist f auch stückweise stetig auf $[a, b]$.

Abgabetermin: Donnerstag, 24. Januar vor der Vorlesung. Bitte geben Sie stets die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.