Analysis I

Guofang Wang

Universität Freiburg

16.11.2016

Jetzt wollen wir uns einer neuen Frage zuwenden:

Wie kann man die unendlichen Mengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der Größe nach vergleichen?

Gibt es wirklich mehr rationale Zahlen als natürliche?
Mehr reelle als rationale?

Die Antwort lautet witzigerweise, dass

es gleich viele natürliche, ganze und rationale Zahlen gibt,
aber mehr reelle Zahlen.
Alle genannten Mengen enthalten unendlich viele Elemente.

Die Präzisierung der Begriffe *gleichviele* und *mehr* geht auf Georg Cantor (1872) zurück.

Definition 3.1

Eine Menge A heißt gleichmächtig zur Menge B (Notation: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung (Bijektion) $\varphi : A \to B$ gibt.

Lemma 3.1

Die Relation $A \sim B$ (A ist gleichmächtig zu B) ist eine Äquivalenzrelation, das heißt für alle Mengen A, B, C gilt:

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B \quad \Rightarrow B \sim A$

(iii) $A \sim B \text{ und } B \sim C \quad \Rightarrow A \sim C.$

Beweis:

(i) Wähle als Bijektion die Identität $id_A : A \to A,\ a \longmapsto a$.

(ii) Sei $\varphi : A \to B$ Bijektion. Wähle dann $\varphi^{-1} : B \to A$.

(iii) Seien $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ bijektiv. Wähle dann $\psi \circ \varphi : A \to C$.

□

Definition 3.2

Eine Menge A heißt

- endlich, wenn sie gleichmächtig zu einer Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist;
- abzählbar unendlich, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist;
- abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist;
- überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht endlich, denn andernfalls gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$ im Widerspruch zum Schubfachprinzip (Satz 2.3)

Lemma 3.2

Falls eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ existiert, so ist A abzählbar.

Beweis: Sei $a_n = \varphi(n)$. Die naheliegende Idee ist, bei der Abzählung induktiv diejenigen a_n auszulassen, die bereits vorher auftraten, und die restlichen entsprechend neu zu nummerieren. Dazu setzen wir $n_1 = 1$ und konstruieren induktiv eine Teilfolge a_{n_k} durch die Vorschrift

$$n_{k+1} = \min\{n > n_k : a_n \neq a_{n_j} \text{ für } j = 1, \ldots, k\}.$$

Falls die Rekursion nach einem n_k abbricht, ist die Abbildung $f : \{1, \ldots, k\} \to A$, $k \mapsto a_{n_k}$ bijektiv und damit ist A endlich.

Andernfalls ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$, $k \mapsto a_{n_k}$ bijektiv und A ist abzählbar undendlich. $\square$

Satz 3.1

Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Beweis: Für $\mathbb{Z}$ wähle die surjektive (sogar bijektive!) Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ \varphi(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & n \text{ ungerade} \\ -n/2 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Das Argument zeigt, dass wir uns beim Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ auf die Menge $\mathbb{Q}^+ = \{p/q : p, q \in \mathbb{N}\}$ beschränken können. Die Idee ist dann, diagonal nach folgendem Schema abzuzählen:

$$
\begin{array}{llcccccc}
 & p = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
q = & & & & & & & \\
1 & & 1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & 6/1 \\
 & & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
2 & & 1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & \cdot & \\
 & & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \cdot & \\
3 & & 1/3 & 2/3 & 3/3 & \cdot & & \\
 & & & \swarrow & \swarrow & \cdot & & \\
4 & & 1/4 & 2/4 & \cdot & & & \\
 & & & \swarrow & \cdot & & & \\
5 & & 1/5 & & & & &
\end{array}
$$

Die k-te Diagonale enthält k Elemente, also enthalten die Diagonalen mit kleinerer Nummer insgesamt $1 + \ldots + (k-1) = (k-1)k/2$ Einträge. Wir behaupten, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ in genau einem k-Abschnitt $\{(k-1)k/2 + i : i = 1, \ldots, k\}$ liegt.

Zur Existenz sei $k \in \mathbb{N}$ maximal mit $(k-1)k/2 < n$. Dann gilt

$$(k-1)k/2 < n \leq k(k+1)/2 = (k-1)k/2 + k.$$

Für $l > k$ ist $(l-1)l/2 + 1 > k(k+1)/2 = (k-1)k/2 + k$, das heißt die beiden Abschnitte sind disjunkt, womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. Somit ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q}, \\ \varphi(n) &= \frac{k-i+1}{i}, \text{ für } n = \frac{(k-1)k}{2} + i \quad (k \in \mathbb{N},\, 1 \leq i \leq k). \end{aligned}$$

Die Abbildung ist surjektiv, und zwar gilt $\varphi(n) = p/q$ für $i = q$ und $k = p + q - 1$. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt nun mit Lemma 3.2. $\square$

Durch Anordnung in einem quadratischen Schema und analoge Abzählung läßt sich ganz analog zeigen, daß

eine abzählbare Vereinigung von jeweils abzählbaren Mengen abermals abzählbar ist.

Satz 3.2 ($\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar)

Es gibt keine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

BEWEIS: Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung und $\varphi(n) = x_n$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \notin I_n$ für jedes n.

Ist I_n schon bestimmt, so zerlege I_n in drei abgeschlossene Teilintervalle gleicher Länge und wähle für I_{n+1} ein Teilintervall, das x_{n+1} nicht enthält (im Zweifelsfall das rechte). Um I_1 zu definieren, wenden wir dieses Argument an auf $I_0 = [0, 1]$. Nach Satz 2.6 (Schachtelungsprinzip) gibt es ein $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathbb{R}$, also $x \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$