Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1)

Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – Ein Beispiel für den Sekundarbereich I

HORST HISCHER

Geschichte der Mathematik kann ein spannender didaktischer Aspekt zur methodischen Gestaltung des Unterrichts sein. Am Beispiel einer Unterrichtseinheit *Die Entdeckung der Irrationalität am Pentagramm und Pentagon* für den Sekundarbereich I soll das *Konzept der historischen Verankerung* dargestellt und sein Wert für das Erreichen *innermathematischer Beziehungshaltigkeit* im Sinne von Freudenthal /1/ und Wittmann /2/ verdeutlicht werden.

1. Das Pentagramm

1.1. Das Pentagramm in der Antike

Ich beginne mit einem Sprung um rund 2500 Jahre zurück in die Antike. /3/

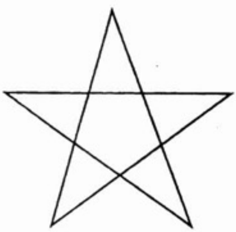

Fig. 1 zeigt das Erkennungszeichen der Pythagoreer, eines von Pythagoras im 6. Jh. v. Chr. gegründeten Geheimbundes, der bis in das 5. Jh. hinein in Unteritalien wirkte, erst in Kroton, dann in Metapont.

Fig. 1: Pentagramm bzw. Pentalpha

Die Pythagoreer nannten dieses Zeichen *Pentagramm*, und als eine Figur, die in einem Zuge gezeichnet werden kann, hatte es für sie eine geheimnisvolle Bedeutung. Es wurde auch *Pentalpha* genannt, weil das große A (alpha) fünfmal erkennbar ist.

Die magische Bedeutung des Pentagramms hat sich bis in die Neuzeit erhalten, und so gilt es im deutschen Sprachraum unter der Bezeichnung *Drudenfuß* als Symbol zur Abwehr von bösen Geistern. Goethe verwendet es bekanntlich im Faust beim Dialog zwischen Mephistopheles und Faust („Faust I, Studierzimmer"; s. auch Fig. 2):

Mephisto: *Gesteh ichs nur! Daß ich hinausspaziere,*
verbietet mir ein kleines Hindernis:
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle –

Faust: *Das Pentagramma macht dir Pein?*
Ei, sage mir, du Sohn der Hölle,
Wenn das dich bannt, wie kamst du dann herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?

Mephisto: *Beschaut* es recht! Es ist nicht gut gezogen;
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.

Doch zurück zu den Pythagoreern:
Verbindet man die Sternspitzen des Pentagramms in Fig. 1, so entsteht ein regelmäßiges Fünfeck, das sie *Pentagon* nannten (s. Fig. 3). Dessen Diagonalen bilden die Ausgangsfigur, also das Pentagramm, und im Inneren entsteht – als Schnittfigur – ein neues, kleineres Fünfeck.

Fig. 2:
„Offener“ Drudenfuß

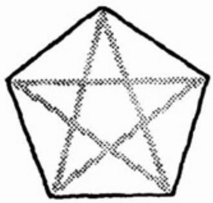

Fig. 3:
Pentagon

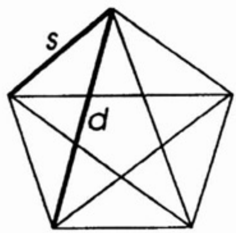

Fig. 4: Seite und
Diagonale des Pentagons

1.2. Die Entdeckung der Irrationalität durch Hippasos von Metapont

Der Altphilologe Kurt von Fritz /7/ publizierte im Jahre 1945 /8/ die Auffassung, ein gewisser Hippasos von Metapont (ca. 450 v. Chr.) habe entdeckt, daß Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks inkommensurabel sind, d. h.

$$\frac{d}{s} \neq \frac{m}{n}$$

für alle $m, n \in N^*$ (s. Fig. 4). Würde eine solche Gleichheit möglich sein, so gäbe es eine Strecke e mit
$d = me$ und $s = ne$,
und e hieße *gemeinsames Maß* von s und d .

Hierzu muß man zweierlei über das *Weltbild der Pythagoreer* wissen:
(1) *Zahlen* sind nur natürliche Zahlen, die größer als Eins sind, also die Menge $\{2, 3, 4, \ldots\}$.
(2) *Alles ist Zahl*, d. h., alles ist als Verhältnis von „Zahlen" im Sinne von (1) darstellbar.
Somit müssen wir aus heutiger Sicht sagen, daß für die Pythagoreer zwei beliebige gleichartige „Größen" (im heutigen Verständnis) stets *kommensurabel* waren, also stets ein gemeinsames Maß besaßen. Natürlich verwendeten sie den Begriff *kommensurabel* nicht, weil für sie *Inkommensurabilität* nicht denkbar war – denn ein Begriff ist nur dann sinnvoll, wenn er abgrenzend, also im wörtlichen Sinne „definierend" ist, andernfalls wäre er inhaltsleer.
Dadurch, daß Hippasos nun am Pentagramm die Existenz der Inkommensurabilität entdeckt hatte, brach eine der philosophischen Grundlagen der Pythagoreer zusammen (nämlich: *Alles ist Zahl*). Die Legende berichtet, daß Hippasos von den Göttern zur Strafe für diese frevelhafte Entdeckung mit dem Tod durch Schiffsuntergang bestraft worden sei.
In unserer heutigen Sichtweise müssen wir also festhalten, daß die Pythagoreer mit Hilfe ihrer „Größenverhältnisse" das beschrieben haben, wozu wir heute den *geordneten Halbkörper der positiven rationalen Zahlen* verwenden, während infolge der Entdeckung von Hippasos ein Vorstoß zur Irrationalität und damit indirekt zum *geordneten Halbkörper der positiven reellen Zahlen* gelang. Die Überwindung des von Hippasos verursachten Grundlagenschocks erzielte Eudoxos im 4. Jh. v. Chr. mit seiner *Proportionenlehre*, wie sie im 5. Buch der Elemente von Euklid dargestellt ist.

Die spannende Frage für uns ist nun, wie es Hippasos gelang festzustellen, daß Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß besitzen! Er benutzte hierfür einen *Algorithmus*, und zwar die sog. *Wechselwegnahme*, die schon ca. 500 Jahre vor ihm den Handwerkern bekannt war, welche damit Maßbestimmungen durchführten.

Heute können wir diesen Algorithmus am besten mit einem Struktogramm veranschaulichen bzw. definieren (s. Fig. 5). Er liefert nicht nur ein gemeinsames Maß, sondern sogar das *größte gemeinsame Maß* der beiden gleichartigen Größen, das wir mit $ggM(a; b)$ bezeichnen. Offensichtlich ist dann

$ggM(a - b; b) = ggM(a; b)$, falls $a > b$.

Bei Anwendungen auf natürliche Zahlen heißt dieses Verfahren *Euklidischer Algorithmus*, welcher dann bekanntlich der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers dient.
Aus heutiger Sicht ist klar, daß die Wechselwegnahme genau dann nach endlich vielen Schritten abbricht, der Algorithmus also „anhält", wenn das Größenverhältnis rational ist.

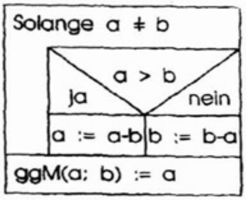

Fig. 5: Wechselwegnahme zur Ermittlung von ggM(a; b)

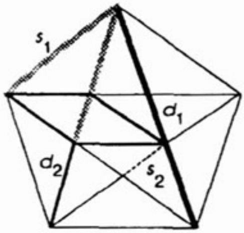

Fig. 6: Nichtabbrechen der Wechselwegnahme beim Pentagon

Hippasos wendete nun die Wechselwegnahme auf das Pentagon an und entdeckte, daß das Verfahren hier nicht abbricht, was wir wie folgt erkennen:
Unter der Voraussetzung, daß Diagonale und Seite eines Pentagons ein gemeinsames (also auch ein größtes) Maß besitzen, gilt gemäß Fig. 6 wegen

$$d_2 = d_1 - s_1 \text{ und } s_2 = s_1 - d_2 \text{ offensichtlich } ggM(d_1; s_1) = ggM(\mathrm{d}_2; \mathrm{s}_2).$$

Da dieses offensichtlich iterativ ad infinitum fortsetzbar ist, kann das Verfahren nicht abbrechen, und ein gemeinsames Maß ist nicht ermittelbar, was zu der Erkenntnis führt:

Diagonale und Seite eines regulären Fünfecks sind inkommensurabel.

Bemerkenswert an diesem Existenzbeweis ist, daß – im Gegensatz zu den sonst üblichen Beweisen – nicht algebraisch argumentiert wird, sondern daß lediglich ein „nichtabbrechender Algorithmus" /9/ angegeben wird.
Doch welche irrationale Zahl ist denn hier eigentlich entdeckt worden?
Wir ordnen dem Ausgangsfünfeck mit der Seite s und der Diagonalen d in anderer Weise gemäß Abb. 7 ein kleineres Fünfeck zu, das offenbar die Seite $d-s$ und die Diagonale s hat. Aufgrund der Ähnlichkeit gilt

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d - s},$$

also mit $x = \dfrac{d}{s}$ dann $x = \dfrac{1}{x - 1}$

$x_2 - x - 1 = 0$, was auf $\dfrac{d}{s} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ führt.

Wegen der Inkommensurabilität von d und s ist diese Zahl schließlich irrational!

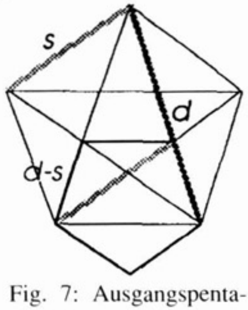

Fig. 7: Ausgangspentagon und zugeordnetes kleines Pentagon

Üblicherweise weist man die Existenz irrationaler Zahlen am Beispiel von $\sqrt{2}$ nach, also an der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrats. Vergleicht man jedoch das hohe Abstraktionsniveau der hierfür üblichen Irrationalitätsbeweise mit der Wechselwegnahme am Pentagon, so wird mit v. Fritz plausibel, daß die Irrationalität wohl am regulären Fünfeck und nicht am Quadrat entdeckt worden ist, daß also Hippasos als Entdecker der Irrationalität gelten kann. /10/

Die Zahl $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ hat weitere interessante Eigenschaften, z. B.:

(1) Mit $x := \frac{d}{s} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ war ja $x^2 - x - 1 = 0$, also $x^2 = x + 1$ oder:

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = \ldots$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{2} = (\sqrt{5}+1) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Diese am Pentagramm als Längenverhältnis „einfach" begründete $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ hat also zugleich eine Darstellung, die sich als „einfachster" regulärer, unendlicher Kettenbruch erweist.

(2) Aus $x = 1 + \frac{1}{x}$ ergibt sich ein Approximationsalgorithmus für $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, der in Fig. 8 in schülergerechter Taschenrechner-Notation dargestellt ist.

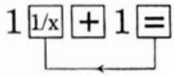

Fig. 8

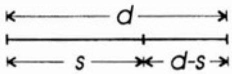

Fig. 9

(3) *Goldener Schnitt*: Die aus dem Pentagramm abgelesene Gleichung $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ läßt sich als Streckenteilung interpretieren, die in der perikleischen Baukunst bedeutsam war (s. Fig. 9).
(4) Für die *Fibonacci-Folge* (a_n) mit $a_0 := a_1 = 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

1.3. Ein Weg zur Entdeckung der Irrationalität über das Pentagramm im Mathematikunterricht der Klasse 9

Diese historisch geprägten Vorbetrachtungen haben nun Konsequenzen für die Planung und Durchführung von Unterricht.Wenn es z. B. um die Erarbeitung des Begriffs der *reellen Zahlen* geht, so kommt es offenbar auf die *Abgrenzung* der rationalen gegenüber den irrationalen Zahlen an, was man schon immer gern in Klasse 9 durch Unterscheidung von Kommensurabilität und Inkommensurabilität getan hat. Folgt man hierbei der mutmaßlichen historischen Entwicklung, so bietet sich folgender, von mir mehrfach erprobter Unterrichtsgang, an:

• Kennenlernen der Wechselwegnahme und handelnde Anwendung: *ggM, ggT*.

• Festigung der pythagoreischen Evidenz: Das *ggM* zu zwei gegebenen gleichartigen Größen existiert immer und ist mit der Wechselwegnahme bestimmbar.

• Begegnung mit dem Pentagon und Pentagramm:
– Entdeckung des Pentagons durch Verknoten eines Papierstreifens (s. Fig. 10).
– Konstruktion eines Pentagons mit Geodreieck (Berechnung des Innenwinkels) und Zirkel.

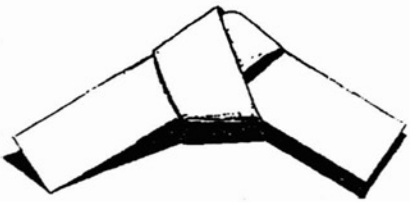

Fig. 10

– Einzeichnen der Diagonalen und Erkennen des Pentagramms.
– Hinweis auf die magische Bedeutung (Pythagoreer, Drudenfuß, *Faust*, . . .).
– Entdeckung des inneren Pentagons (s. Fig. 3).
– Entdeckung der Iteration und der unendlichen Figurenfolge („Folge der Fünfecke“, s. Fig. 11).

– Experimentieren mit der Wechselwegnahme am Pentagon, evtl. schon Formulierung einer Vermutung.

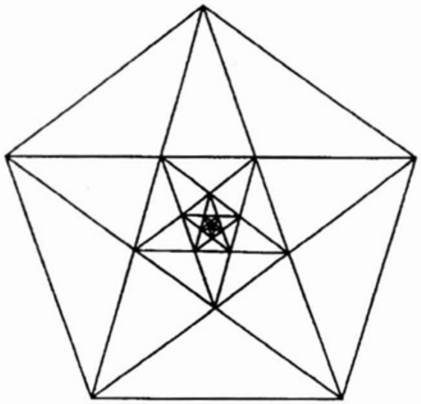

Fig. 11: „Folge der Fünfecke" – 1. Version

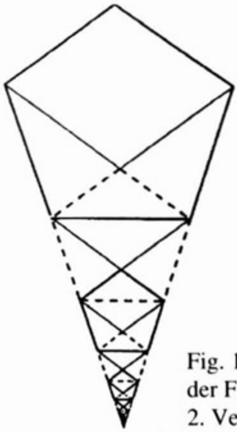

Fig. 12: „Folge der Fünfecke" – 2. Version

• Darstellungswechsel:

– Einmalige Wechselwegnahme liefert bereits $s' = d - s$ und $d' = s$ (s. Fig. 7, aus der Fig. 12 entwickelt wird).
– Erkennen, daß bei unendlicher Figurenfolge die Wechselwegnahme (auch hier!) nicht abbricht (neue unendliche „Figurenfolge", s. Fig. 12).
– Interpretation: d und s können kein gemeinsames Maß besitzen.
– Umdeutung: Es gibt keine natürlichen Zahlen m und n mit $\frac{d}{s} = \frac{m}{n}$.
– Folgerung: Es muß ein „Faktor" k existieren mit $d = k \cdot s$, jedoch ist $k \notin \mathbb{Q}$,
– vor allem:

<u>Die rationalen Zahlen sind nicht alles! ⇒ Existenz irrationaler Zahlen!</u>

Folgendes sollten wir hier abschließend festhalten:

• Dadurch, daß historisch gesehen die Irrationalität „entdeckt" worden ist, gibt es keine „Einführung" von reellen bzw. irrationalen Zahlen, vielmehr sind diese <u>schon vorhanden</u> (sie sind ja „reell"), sie werden also – bei historisch-genetischem Unterrichtsaufbau – nur <u>entdeckt</u>! /vgl. 1, S. 195/

• Dieser historisch orientierte Aufbau „entdeckenden Lernens" kann <u>im Sinne eines Spiralcurriculums</u> genutzt werden:
– Wechselwegnahme mit Cuisenaire-Stäben (im Prinzip schon in der Primarstufe, sonst auch als Einstieg spätestens in Klasse 9).
– Wechselwegnahme als Agorithmus zur *gg*M – *und* *gg*T-Bestimmung (Kl. 6, spätestens Kl. 9).

– Experimentieren mit dem Pentagon und Pentagramm, Entdeckung unendlicher Figurenfolgen, Etndeckung der Irrationalität (Kl. 9).
– Propädeutische Einführung von *Folge* und *Grenzwert* (Kl. 9).
– Vertiefende Behandlung von *Irrationalität, Folge* und *Konvergenz* anhand des Pentagramms (Oberstufe).

2. Didaktische Einordnung

2.1. Die „methodischen Variablen" nach Vollrath

Nach der Vorstellung dieses ersten Beispiels möchte ich nun eine Einordnung in didaktische Kategorien vornehmen. Ich beziehe mich hierbei auf die von Vollrath eingeführten methodischen Variablen /1/, die der Beschreibung und Planung von Unterricht dienen sollen (s. Fig. 13). Und zwar unterscheidet er *zwei Klassen methodischer Variablen*, nämlich

– *Unterrichtsphasen* und
– *methodische Entscheidungen.*

Beide Klassen sind miteinander verknüpft, denn methodische Entscheidungen beziehen sich auf die Gestaltung der Unterrichtsphasen.
Als Unterrichtsphasen nennt Vollrath u. a. *Algorithmen, Anwenden, Argumentieren, Begriffsentwicklung, Formulieren* und *Suchen von Zusammenhängen.*
Als methodische Entscheidungen führt er Probleme der *Auswahl*, der *Dosierung*, der *Komposition* und der *Steuerung* auf.

Für das Thema dieser Abhandlung wird sich die Variable *Komposition* als bedeutsam erweisen, und zwar in Zusammenhang mit Begriffsbildung. Vollrath gliedert diese Variable in die Teilvariablen *Zuordnung, Reihenfolge, Verbindung* und *Akzentuierung* auf.
Mit *Verbindung* meint er insbesondere Verbindungen des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen Themenkreisen, also etwa das, was Erich Wittmann mit Bezug auf Hans Freudenthal *Beziehungshaltigkeit* genannt hat /2, S. 143/. Auch der sog. *Anwendungsorientierte Unterricht* würde eine Belegung dieser Variablen sein.
Nun ist *Beziehungshaltigkeit* im wörtlichen Sinn das Gegenteil von Beziehungslosigkeit. *Verbindung* im Sinne von Beziehungshaltigkeit hat damit zur Folge, daß der behandelte Themenkreis für den Lernenden vielseitig und ganzheitlich erscheint, er wird damit leichter behalten *als ein Aggregat von beziehungslosen Teilen /12/.*

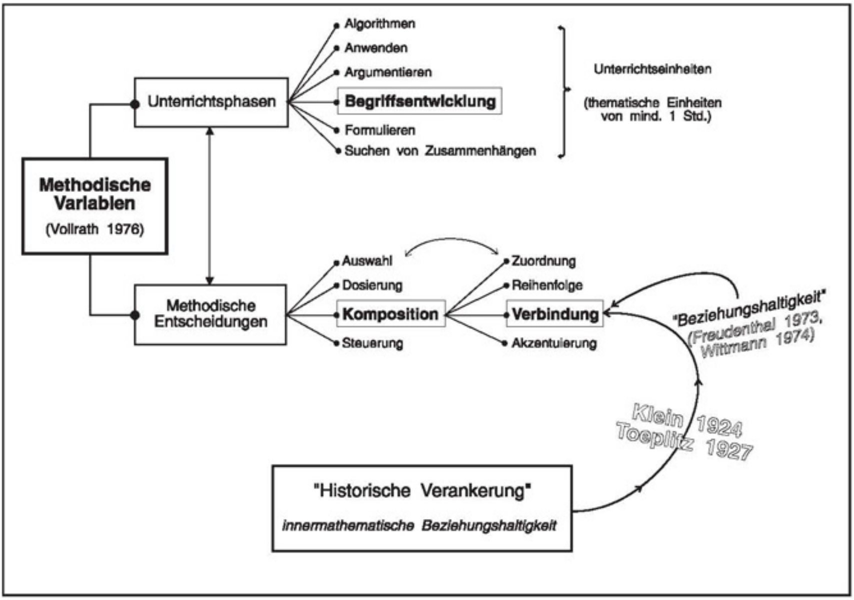

Fig. 13: „Methodische Variablen“ nach /11/ und „Historische Verankerung“ /s. 4/

Deshalb plädiert Wittmann auch für die *Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik* /2, S. 125/. Dieses ist für ihn eines der Kennzeichnen der sog. genetischen Methode (ebenda).

2.2. „Historische Verankerung“ als innermathematische Beziehungshaltigkeit

Der Begriff *genetische Methode* geht ja ursprünglich auf Felix Klein zurück, der sich – immerhin als bedeutender Mathematiker! – zugleich in ganz besonderer Weise mit der Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Lehrerbildung befaßt hat.

Toeplitz entwickelte 1927 die Vorstellungen von Klein weiter, indem er schrieb: (. . .) *alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen?, alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein,* *nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an die Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.* /13, S. 92, zitiert auch bei 2, S. 127/

Da in der Pädagogischen Psychologie heute der Begriff *genetische Methode* anders als damals gebraucht wird, möchte ich stattdessen in Würdigung der Ideen von Klein und Toeplitz die Bezeichnung *historische Verankerung* wählen, die ich im selben Zusammenhang bereits 1981 vorgeschlagen habe /s. 4/. Und zwar plädiere ich für die Verwendung historischer Beispiele im Unterricht, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten sie gemäß Toeplitz vom „Staub der Zeit" befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden.
Durch diese Belegung der methodischen Variablen „Verbindung" läßt sich eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* erreichen (s. Fig. 13), und „Geschichte der Mathematik" erscheint in diesem Sinne als *didaktischer Aspekt* – zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert.

Als ein erstes Beispiel für diese historische Verankerung können die Wechselwegnahme und das Pentagramm dienen, die gemeinsam den Aufbau einer entsprechenden Unterrichtseinheit von ca. 3 Wochen Dauer in Kl. 9 gestatten. Darüber hinaus können sowohl die Wechselwegnahme als auch das Pentagramm Anlaß propädeutischer, handlungsorientierter Aktivitäten in früheren Klassenstufen sein. Das von Artmann herausgegebene MU-Themenheft liefert hierzu bekanntlich eine Fülle von Anregungen. /s. 5/

/1/ Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* – Bd. 1. – Klett. – Stuttgart, 1973

/2/ Wittmann, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* – Vieweg. – Braunschweig, 1974[1], 1978[5]

/3/ Dieses mathematikhistorische Beispiel hat bereits vor über zehn Jahren Eingang in die Mathematikdidaktik gefunden (s. /4/, /5/, /6/)

/4/ Hischer, Horst: *„Historische Verankerung" als methodische Variante im Mathematikunterricht.* – In: Beiträge zum Mathematikunterricht. – Schroedel. – Hannover, 1981. – S. 43

/5/ Artmann, B. (Hrsg.): *Aktivitäten mit dem regelmäßigen Fünfeck.* – In: Der Mathematikunterricht / Themenheft. – Klett. – Stuttgart *28* (1982) 4

/6/ Hischer, H.; Scheid, H.: *Grundbegriffe der Analysis.* – In: Knoche, N.; Scheid, H. (Hrsg.): *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik.* – B. I. Wissenschaftsverlag. – Mannheim, 1994; (völlige Neubearbeitung von Hischer, H.; Scheid, H.: *Materialien zum Analysisunterricht.* – Herder. – Freiburg, 1982)

/7/ Für diesen Hinweis danke ich Herrn B. Artmann.

/8/ von Fritz, K.: *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont.* – In: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft. – Darmstadt, 1965 (Nachdruck aus Annals of Mathematics *46* (1945), S. 242–264)

/9/ Es hat also Vorteile, auch solche nichtabbrechenden bzw. „nicht anhaltenden" Verfahren als „Algorithmen" zu bezeichnen. Die Wechselwegnahme ist damit stets ein Algorithmus!

/10/ Einwandfrei bewiesen ist das jedoch bisher nicht, wie mir B. Artmann kürzlich bestätigte.

/11/ Vollrath, H.-J.: *Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht.* – In: Der Mathematikunterricht. – Klett. – Stuttgart *28* (1976) 5. – S. 7–24

/12/ Strunz, K.: *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht.* – Quelle & Meyer. – Heidelberg, 1968 /zitiert bei 11, S. 17/

/13/ Toeplitz, O.: *Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Inifinitesimalrechnung an den höheren Schulen.* – Zitiert in /2, S. 127/