# Matematyka dla studentów kierunku Projektowanie Architektury Wnętrz i Otoczenia

11 października 2018

## 0.1 Geometria analityczna w przestrzeni

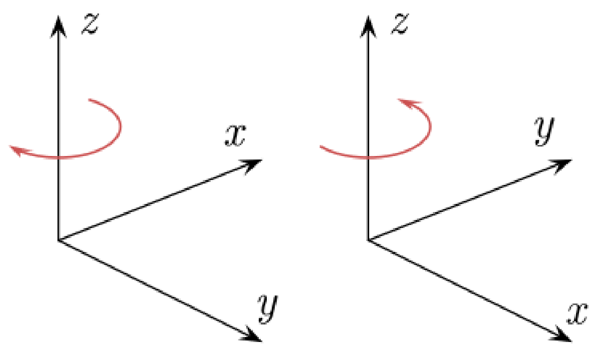
Przestrzenią $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek $(x, y, z)$ liczb rzeczywistych, tzn.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} .$$

Zbiór $\mathbb{R}^3$ można interpretować geometrycznie wprowadzając trójwymiarowy prostokątny (kartezjański) układ współrzędnych. $P = (x, y, z)$ - punkt w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

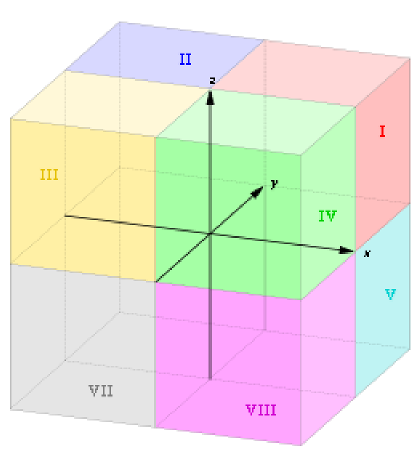
Układ

lewoskrętny prawoskrętny




Będziemy rozważać układ prawoskrętny.

- Liczby $x, y, z$ nazywamy **współrzędnymi** punktu $P$;
- $OX$, $OY$, $OZ$ - oznaczenia osi układu współrzędnych;
- $OXY$, $OYZ$, $OXZ$ - oznaczenia płaszczyzn (zawierających dwie wybrane osie układu współrzędnych);
- Podobnie jak dwuwymiarowy układ współrzędnych dzieli płaszczyznę na ćwiartki, tak trójwymiarowy układ współrzędnych dzieli przestrzeń na **oktanty**.




Trójka $(x, y, z)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ może być także interpretowana jako wektor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OP}$ zaczepiony w punkcie $O = (0, 0, 0)$, o końcu w punkcie $P = (x, y, z)$.

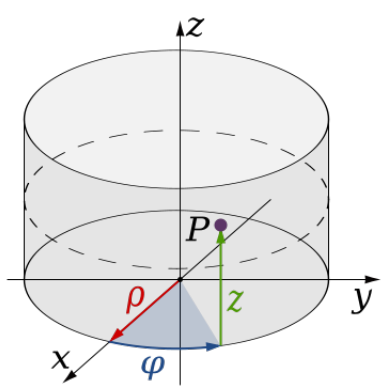
Podobnie, dwa punkty $P$ i $Q$ w przestrzeni wyznaczają jednoznacznie zarówno odcinek $PQ$, jak i wektor $\overrightarrow{PQ}$ (jak również $\overrightarrow{QP}$).

**Uwaga.** Zarówno wektory, jak i punkty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mogą być podane są za pomocą współrzędnych, więc przy odróżnieniu wektora od punktu należy zwrócić uwagę na rodzaj użytych nawiasów (o ile to rozróżnienie nie wynika z kontekstu).

- zapis $(x, y, z)$ oznacza współrzędne punktu,
- zapis $[x, y, z]$ oznacza współrzędne wektora.

- Jeśli współrzędnymi punktu są odpowiednie współrzędne rzutów punktu na osie układu współrzędnych, to takie współrzędne nazywamy **kartezjańskimi** (lub prostokątnymi).
- Współrzędne punktu można podawać także za pomocą innych wielkości liczbowych, określających jednoznacznie jego położenie. Zamiast współrzędnych prostokątnych można stosować **współrzędne cylindryczne** lub **współrzędne sferyczne**.

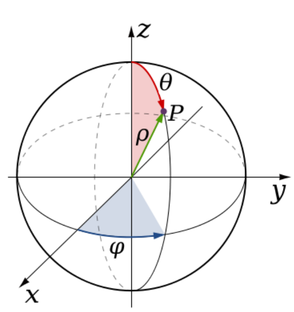
Współrzędne cylindryczne $P = P(\rho, \varphi, z)$
$\rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$




Zależności:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Współrzędne sferyczne $P = P(\rho, \theta, \varphi)$
$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$



Zależności:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

Zadanie domowe: Podać współrzędne

1. kartezjańskie punktu $P$, wiedząc, że ma on współrzędne cylindryczne $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$;
2. cylindryczne punktu $P$, wiedząc, że ma on współrzędne kartezjańskie $\left(1, -1, \sqrt{6}\right)$;
3. cylindryczne punktu $P$, wiedząc, że ma on współrzędne sferyczne $\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$;
4. kartezjańskie punktu $P$, wiedząc, że ma on współrzędne sferyczne $\left(1, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$;

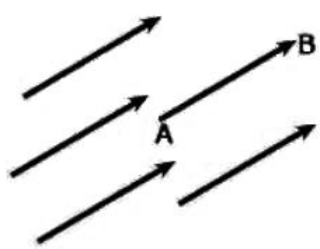
W dalszej części wykładu „współrzędne" będą oznaczać współrzędne kartezjańskie.

Jeżeli $A = (x_A, y_A, z_A)$ i $B = (x_B, y_B, z_B)$, to wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne

$$[x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A]$$

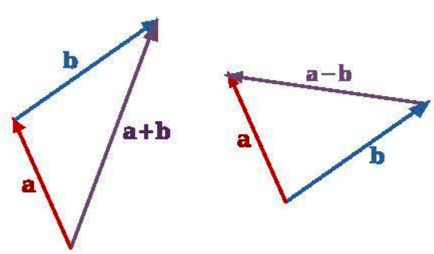
Wektor $[0, 0, 0]$ nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\overrightarrow{0}$.
Wektor $[-x_a, -y_a, -z_a]$ nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{a} = [x_a, y_a, z_a]$ i oznaczamy $(-\overrightarrow{a})$.

**Wektorem swobodnym** nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych, które mają ten sam kierunek, zwrot i długość.




Działania na wektorach określamy następująco:
1. dodawanie wektorów

$$[a_x, a_y, a_z] \pm [b_x, b_y, b_z] = [a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z]$$




2. mnożenie wektora przez stałą $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot [a_x, a_y, a_z] = [c \cdot a_x, c \cdot a_y, c \cdot a_z]$$

Powyższe działania mają następujące własności:

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$;
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$;
4. $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$;
5. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
6. $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$;
7. $\alpha \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

Długość wektora $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

zad.dom: Wyprowadzić powyższy wzór.

Własności długości wektora:
Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ zachodzi

- $|\overrightarrow{a}| \geq 0$;
- $|\overrightarrow{a}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;
- $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$;
- $|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{a}|$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Wersorem** wektora $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{a_0}$, który ma długość 1 oraz ten sam kierunek i zwrot jak wektor $\overrightarrow{a}$.

Wersory osi układu współrzędnych będziemy oznaczać następująco:

- $[1, 0, 0] = \overrightarrow{i}$ (wersor osi $0X$);
- $[0, 1, 0] = \overrightarrow{j}$ (wersor osi $0Y$);
- $[0, 0, 1] = \overrightarrow{k}$ (wersor osi $0Z$)

Jeżeli $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, to możemy zapisać

$$\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$$

Jeżeli $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, to $\overrightarrow{a_0} = \left[\frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}\right]$ jest wersorem wektora $\overrightarrow{a}$ . Zauważmy, że:

- $\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a}, OX)) = \dfrac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}$
- $\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a}, OY)) = \dfrac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}$
- $\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a}, OZ)) = \dfrac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}$

Liczby $\dfrac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \dfrac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \dfrac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}$ (Współrzędne wersora $\overrightarrow{a_0}$ wektora $\overrightarrow{a}$) nazywamy **cosinusami kierunkowymi** wektora $\overrightarrow{a}$.

**Iloczynem skalarnym** wektorów $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ nazywamy liczbę

$$|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}| \cdot \cos(\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}))$$

Iloczyn skalarny oznaczamy symbolem

$$\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{q}.$$

Iloczyn skalarny oznaczamy także symbolem $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}$ lub $\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q}$. W szczególności iloczyn skalarny $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}$ można zapisać krótko $\overrightarrow{p}^2$.

Własności iloczynu skalarnego:

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{0} = 0$;
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ ;
4. $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$ (tzn. $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}$ );
5. Jeżeli $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, to $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Z powyższych własności wynika w szczególności

5. $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = \overrightarrow{k}^2 = 1$
6. $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0$
7. Jeżeli $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego możemy wyznaczyć miarę kąta między wektorami:

$$\cos(\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})) = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}|}.$$

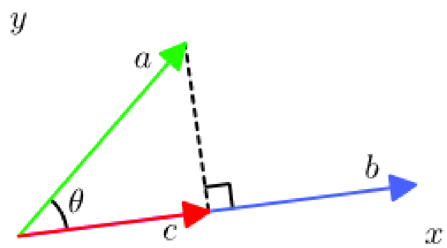
Zatem

$$\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}|}\right)$$

W szczególności z powyższego wzoru wynika, że jeśli $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} < 0$, to kąt $\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ jest rozwarty.

**Rzutem prostokątnym** wektora $\overrightarrow{a}$ w kierunku wektora $\overrightarrow{b}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{c}$ określony wzorem

$$\overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2} \overrightarrow{b}$$




Niech $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{p} \nparallel \overrightarrow{q}$. **Iloczynem wektorowym** uporządkowanej pary wektorów $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{r}$ spełniający następujące warunki:

1. $\overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{p} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{q}$;

2. $|\overrightarrow{r}| = |\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}| \cdot \sin(\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}))$;

3. $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ tworzą układ zgodny z orientacją przestrzeni.

Iloczyn wektorowy oznaczamy symbolem

$$\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$$

Ponadto przyjmujemy:

- $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$ gdy $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{q}$.

Z powyższej definicji jasno wynika, że iloczyn wektorowy jest określony <u>jednoznacznie</u>.

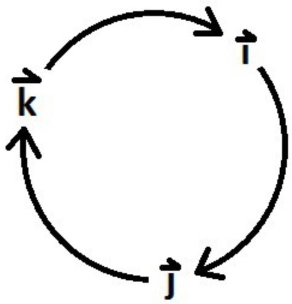
Długość iloczynu wektorowego $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ jest równa **polu równoległoboku** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$.

Własności iloczynu wektorowego:

1. $\overrightarrow{q} \times \overrightarrow{p} = -\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ (antyprzemienność);

2. $(\alpha\overrightarrow{p}) \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} \times (\alpha\overrightarrow{q}) = \alpha(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$;

3. $(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}) \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{q} + \overrightarrow{p_2} \times \overrightarrow{q}$;




4. $\overrightarrow{p} \times (\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}) = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q_2}$;
5. $|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}| \leq |\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|$.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika także w szczególności, że

- $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$;
- $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$;
- $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

Jeżeli $\overrightarrow{p} = [p_x, p_y, p_z]$ i $\overrightarrow{q} = [q_x, q_y, q_z]$, to współrzędne wektora $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ obliczamy za pomocą wyznacznika:

$$\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} \right]$$

**Iloczynem mieszanym** uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ nazywamy liczbę

$$(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) \circ \overrightarrow{r}$$

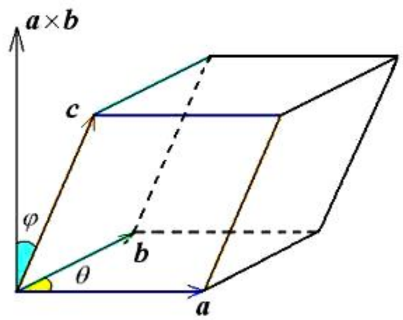
Iloczyn mieszany oznaczamy symbolem $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r})$, tzn.

$$(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}) = (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) \circ \overrightarrow{r}$$

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego:
Wartość bezwzględna z iloczynu mieszanego $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r})$ jest równa **objętości równoległościanu** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ i $\overrightarrow{r}$.

Jeżeli

$$\overrightarrow{p} = [p_x, p_y, p_z],$$
$$\overrightarrow{q} = [q_x, q_y, q_z],$$




$$\overrightarrow{r} = [r_x, r_y, r_z],$$

to

$$(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}) = \begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

Mówimy, że wektory $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ są **komplanarne** (współpłaszczyznowe), jeżeli stnieje płaszczyzna, do której wszystkie trzy wektory są równoległe

Własność:
$(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy i wektory są komplanarne.

Mówimy, że wektory $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ są **kolinearne** (współliniowe), jeżeli istnieje prosta, do której wszystkie obydwa wektory są równoległe.

Własność:
$\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ są kolinearne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{q}$.

Uwaga;
Przyjmujemy, że wektor $\overrightarrow{0}$ jest zarówno prostopadły, jak i równoległy do dowolnego wektora.

# Równania płaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

I. Równanie ogólne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem. Rozważmy niezerowy wektor $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$.

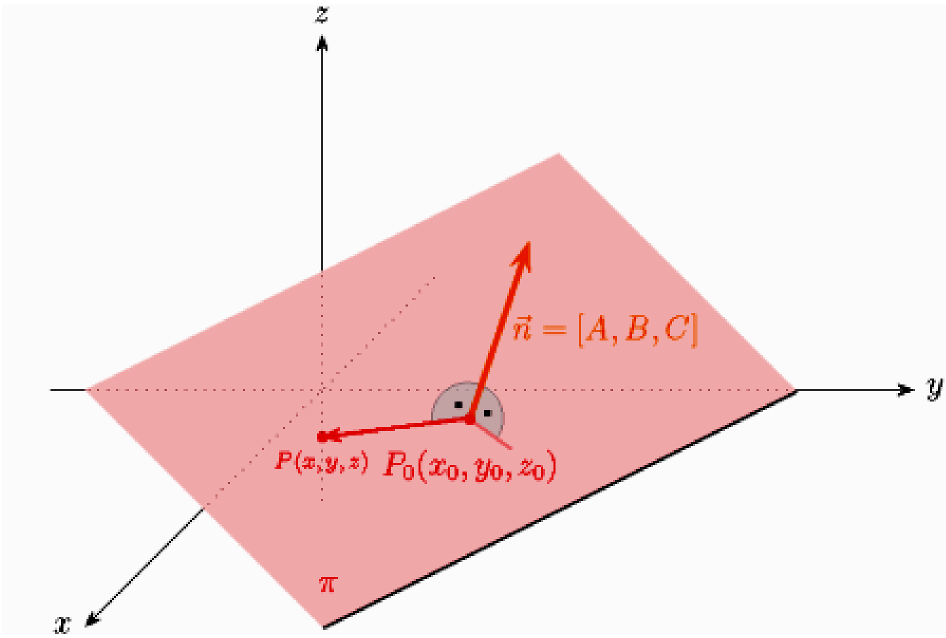
**Pytanie**: jakie jest miejsce geometryczne punktów $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, takich, że wektory $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{P_0P}$ są prostopadłe?
**Odpowiedź**: punkty te tworzą płaszczyznę, która jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{n}$ i przechodzi przez punkt $P_0$.

Wektor $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ nazywamy **wektorem normalnym** płaszczyzny $\pi$. Wektor normalny płaszczyzny $\pi$ oznaczamy także symbolem $\overrightarrow{n_\pi}$
Ponieważ wektory $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ i $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ są prostopadłe, więc

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \circ [A, B, C] = 0$$

Płaszczyzna $\pi$ jest więc zbiorem punktów $P = (x, y, z)$ spełniających równanie (o zmiennych $x, y, z$):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$




Oznaczmy $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Równanie ogólne płaszczyzny

$$\pi : \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Płaszczyzna ma nieskończenie wiele postaci równania ogólnego, przy czym równania $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ opisują tę samą płaszczyznę wtedy i tylko wtedy $[A_1, B_1, C_1, D_1] = \alpha[A_2, B_2, C_2, D_2]$ dla pewnej stałej $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jeżeli trzy (różne) punkty $A, B, C$ są niewspółliniowe, to istnieje dokładnie jedna płaszczyzna zawierająca punkty $A, B, C$.

Wówczas np. wektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$, jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty $A, B, C$, więc w oparciu o powyższy iloczyn wektorowy można wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A, B, C$.

II. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Niech $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ będzie równaniem ogólnym płaszczyzny $\pi$. Jeżeli $D \neq 0$, to możemy je przekształcić następująco:

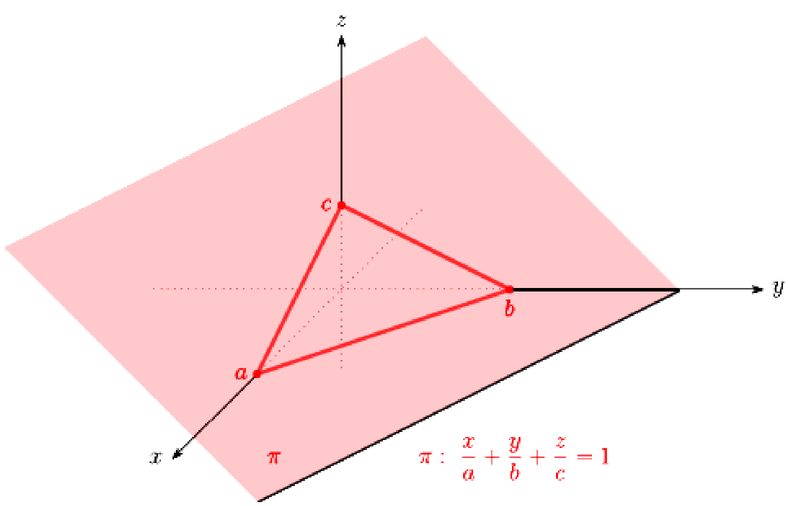
$$Ax + By + Cz = -D \qquad \backslash : (-D)$$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

Oznaczmy

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny $\pi : \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$


z
c
y
b
a
x
π
$\pi:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$