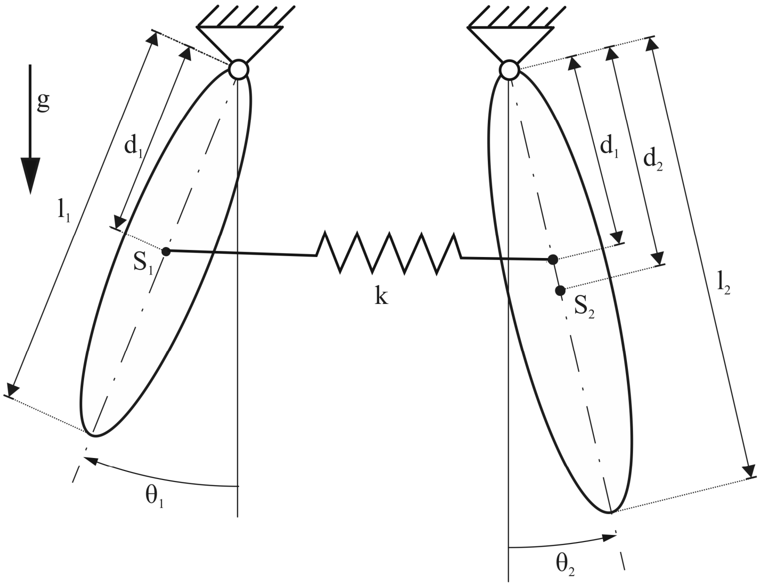
Aufgabe 1**:

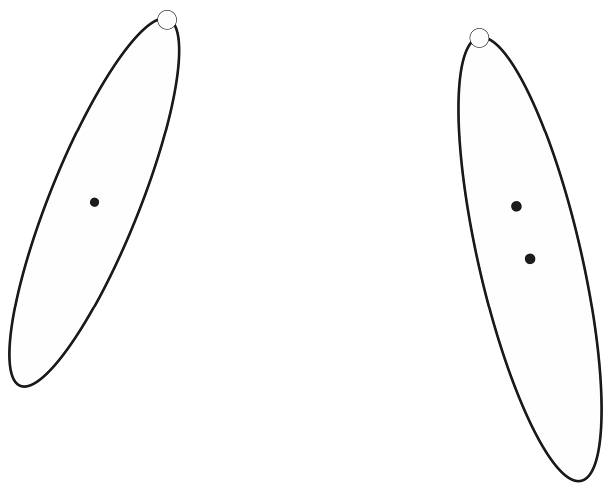
Das abgebildete System aus zwei Körperpendeln soll untersucht werden.



An Pendel 1 (Länge l_1, Schwerpunktsabstand d_1, Masse m_1 Trägheitsmoment bezüglich des Lagers $J_1 = m_1 {l_1}^2/3$) ist im Schwerpunkt eine Feder (Federkonstante k) befestigt. Die Feder ist mit einem zweiten Pendel (Länge l_2, Schwerpunktsabstand d_2, Masse m_2, Trägheitsmoment bezüglich des Lagers $J_2 = m_2 {l_2}^2/3$) verbunden. Die Feder ist für $\theta_1 = \theta_2 = 0$ entspannt.

Das Bewegungsverhalten soll im Folgenden untersucht werden. Betrachtet werden dabei **kleine Auslenkungen aus der Ruhelage**.

a) Schneiden Sie das System frei. Benennen Sie Kräfte und Momente.



b) Welche der eingeführten Kräfte und Momente sind Reaktionskräfte, welche sind eingeprägte Kräfte?

c) Wie berechnet sich die Federkraft?

d) Geben Sie die nichttrivialen Impuls- und Drallsätze für die Körper an.

e) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems?

f) Wie lautet die charakteristische Gleichung?

Verwenden Sie nun die folgenden numerischen Werte $m_1 = m_2 = 1[\mathrm{kg}]$, $l_1 = l_2 = 1[\mathrm{m}]$, $d_1 = d_2 = 0.5\ [\mathrm{m}]$, $k = 10$[N/m].

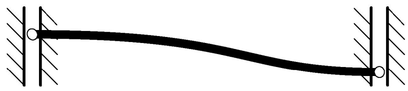
g) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und zugehörigen Schwingungsformen des Systems.

h) Skizieren sie die Eigenformen.

i) Wie ändern sich die Eigenformen, wenn das Pendel 2 doppelt so groß wie Pendel 1 ist ($m_2 = 2m_1$, $l_2 = 2\ l_1$.)

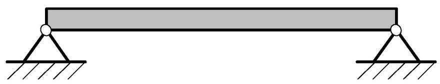
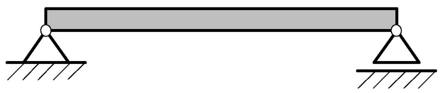
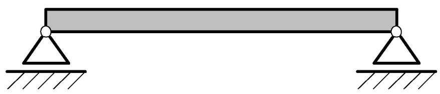
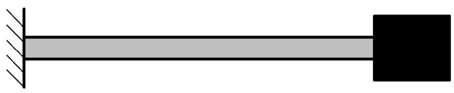
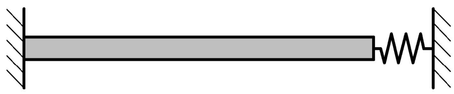
Aufgabe 2 *:

Formulieren Sie die Randbedingungen für die Transversalschwingungen $w(x,t)$ einer Saite (Länge L) mit folgenden Einspannungen:

Einspannung		Randbedingungen
fest – fest		
fest – frei		
frei – frei		

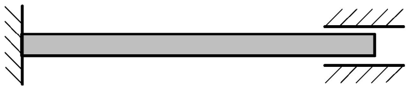
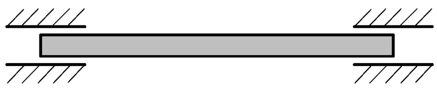
Aufgabe 3 *:

Formulieren Sie die Randbedingungen für die Längsschwingungen $u(x,t)$ eines Stabes (Dichte ϱ, Länge L, Querschnitt A, Elastizitätsmodul E) mit folgenden Lagerungen:

Lagerung		Randbedingungen
fest – fest		
fest – frei		
frei – frei		
fest – Endmasse m		
fest – Endsteifigkeit k		

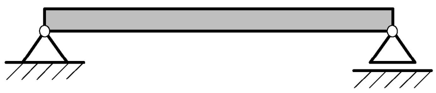
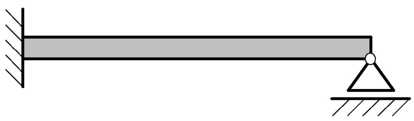
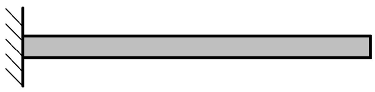
Aufgabe 4 *:

Formulieren Sie die Randbedingungen für die Torsionsschwingungen $\varphi(x,t)$ eines Stabes (Länge L) mit folgenden Lagerungen:

Lagerung		Randbedingungen
fest – fest		
fest – frei		
frei – frei		

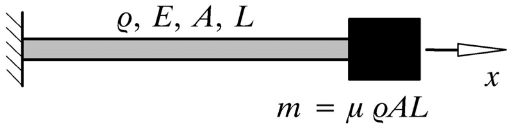
Aufgabe 5 *:

Formulieren Sie die Randbedingungen für die transversalen Schwingungen $w(x,t)$ eines Balkens (Länge L) mit folgenden Lagerungen:

Lagerung		Randbedingungen
fest – fest		
gelenkig – gelenkig		
frei – frei		
fest – gelenkig		
fest – frei		

Aufgabe 1 **:

Ein homogener Rundstab (Länge $L = 1\ \mathrm{m}$, Querschnitt $A = 1\ \mathrm{cm}^2$, Dichte $\varrho = 7800\ \mathrm{kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 210\,000\ \mathrm{MPa}$) ist am linken Ende fest eingespannt, am rechten Ende trägt er eine Endmasse $m = \mu\,\varrho A L$, $\mu \geq 0$.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes?

b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

c) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

d) Wie groß ist die Grundeigenfrequenz des Stabes ohne Endmasse ($\mu = 0$)?

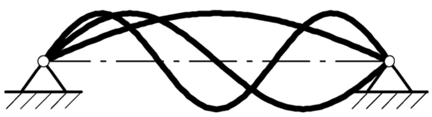
e) Bestimmen Sie graphisch die Grundeigenfrequenz für $\mu = 1$.

f) Berechnen und skizzieren Sie die Grundeigenschwingungsformen des Stabes mit und ohne Endmasse.

Hinweis: Aufgabenteil e) führt auf den Ausdruck $\tan(\omega/c\,L) = c/(L\,\omega)$. Es ist unmöglich, eine analytische Lösung hierfür anzugeben. Eine Möglichkeit eine (Näherungs-)Lösung zu finden ist das graphische Bestimmen einer Lösung. Zeichnen Sie die Kurven für die linke und rechte Seite der Gleichung (z.B. mit Matlab) und bestimmen Sie den Schnittpunkt durch ablesen.

Aufgabe 2 **:

Die nicht normierten Eigenfunktionen der eindimensionalen Wellengleichung lauten für eine fest - feste Einspannung an den Rändern



$$W_k(x) = D_k \sin\frac{k\pi x}{L}\,, \quad D_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

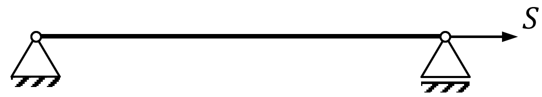
a) Zeigen Sie durch Integration, dass die Eigenfunktionen orthogonal sind, d.h. für beliebige $i \neq j$ gilt

$$\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = 0\ .$$

b) Normieren Sie die Eigenfunktionen.

Aufgabe 3 *:

Eine Gitarrensaite (Dichte $\rho = 7800$ kg1)/m³, Länge $L = 0.9$ m, Durchmesser $d = 0.5$ mm) soll mit der Grundschwingung (1. Eigenschwingungsform) auf den Kammerton a (440 Hz) abgestimmt sein.



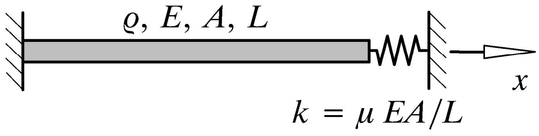
a) Geben Sie die Randbedingungen für die Gitarrensaite an.

b) Wie lautet allgemein die Gleichung für die Eigenkreisfrequenz ω_k?

c) Mit welcher Kraft S muss die Saite vorgespannt werden damit die Frequenz der Grundschwingung der Frequenz des Kammertons entspricht?

Aufgabe 1 **:

Ein homogener Rundstab (Länge $L = 1\,\mathrm{m}$, Querschnitt $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Dichte $\varrho = 7800\,\mathrm{kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 210\,000\,\mathrm{MPa}$) ist am linken Ende fest eingespannt, am rechten Ende ist er mit der Steifigkeit $k = \mu\, EA/L,\ \mu \geq 0$ abgefedert.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes?

b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

c) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

d) Bestimmen Sie graphisch die Grundeigenfrequenz für $\mu = 1$.

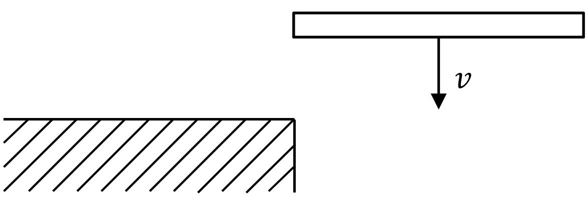
e) Zeigen Sie, dass für $\mu \to \infty$ die Eigenfrequenzen in den Fall einer festen Einspannung, für $\mu = 0$ in den Fall eines freien Stabendes übergehen.

Aufgabe 2 */:**

Ein symmetrischer Stab hat die Länge $L_1 = 1.2\ \mathrm{m}$, Masse m_1 und ein Trägheitsmoment von $J = 0.25\mathrm{m}^2 m_1$ bezogen auf eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Stabachse. Er fällt in horizontaler Lage ohne Drehung herab. Bei einer Geschwindigkeit von $v = 5\ \mathrm{m}/s$ stößt das eine Stabende gegen einen Mauervorsprung. Die Stoßkraft sei genau senkrecht. Der Kontakt findet nur in einem Punkt statt.

a) Klassifizieren Sie den Stoß.

b) Schneiden Sie das System frei (Zeitpunkt des Stoßes). Zeichnen Sie in den Freischnitt die Geschwindigkeiten und die Kraft- und Momentenstöße ein.



c) Formulieren Sie die kinematischen Bindungen. Was gilt für die Bewegung der Mauer?

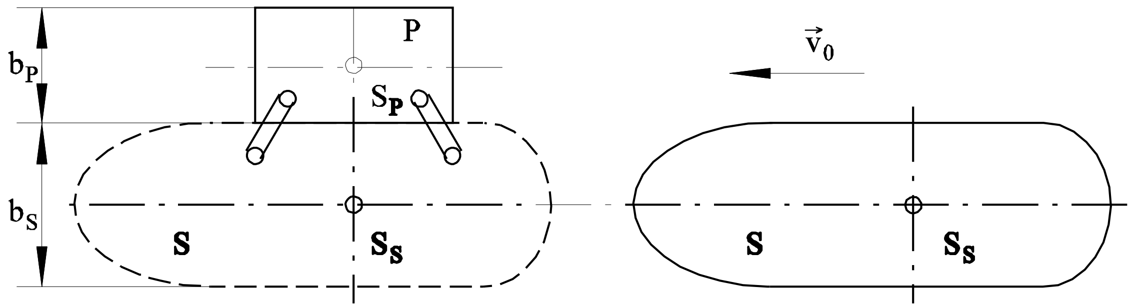
d) Formulieren Sie die Impuls- und Drallbilanzen.

e) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß mit Hilfe der Stoßzahl ε an.

f) Wie bewegt sich der Stab unmittelbar nach dem Stoß, wenn der Stoß 1) elastisch und 2) plastisch ist?

g) Wie viel kinetische Energie geht in diesen Fällen verloren?

Aufgabe 1 **:



Ein Schiff S nähert sich nach Abstellen des Motors mit einer Restgeschwindigkeit v_0 = 0.3 m/s einem Prahm P (flacher Schwimmkörper), an dem es nach Erreichen der gestrichelt gezeichneten Stellung festgebunden wird. Der Prahm sei vor dem Anlegen in Ruhe. Schiff und Prahm sollen für die Dauer des Anlegemanövers als im Wasser frei beweglich angesehen werden. Der Wasserwiderstand soll vernachlässigt werden. Die Daten seien:

Massen:	$m_s = 20\text{t}$	$m_p = 10\text{t}$
Breiten:	$b_s = 3\text{m}$	$b_p = 4\text{m}$
Trägheitsmomente bezüglich der Schwerpunkte S_S bzw. S_P:	$J_s = 200\text{t}\,\text{m}^2$	$J_p = 40\text{t}\,\text{m}^2$

a) Wie ist der Bewegungszustand des fest gebundenen Systems Schiff und Prahm unmittelbar nach dem Anlegemanöver? Dabei sind die Geschwindigkeit **v** des gemeinsamen Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit **ω** zu berechnen.

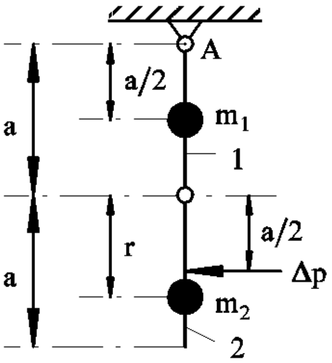
b) Wie groß ist der durch die Kräfte senkrecht zur Anlegefläche entstehende Momentenstoß $\int M\,dt$, der zwischen Schiff und Prahm während des Anlegens wirksam ist?

c) Wie groß müsste die Breite des Prahms (bei gleichem J_P) sein, wenn $\int M\,dt = 0$ werden soll?

d) Wie groß ist die in der Berührungsebene übertragene mittlere Bremskraft, wenn das Abbremsen 10 s dauert?

Hinweise zur Lösung: Die zwischen Schiff und Prahm ausgeübten Kräfte können in eine Komponente F in der Berührungsebenen sowie in Komponenten senkrecht dazu zerlegt werden. Die letzteren ergeben das Moment M.

Aufgabe 2 *: An einem masselosen Stab, der die Punktmasse m_1 trägt und in A drehbar aufgehängt ist, hängt ein zweiter masseloser Stab mit der Punktmasse m_2. In halber Höhe trifft auf diesen Stab ein Kraftstoß Δp .

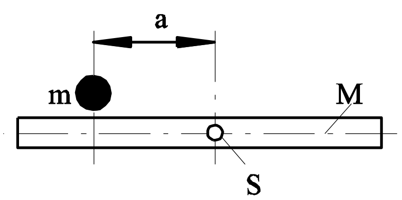


Für $m_1 = 3m_2$ berechne man den Abstand r der Punktmasse m_2, so dass sich unmittelbar nach dem Stoß

a) der Stab 2 nicht dreht,

b) beide Stäbe mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit bewegen.

Aufgabe 3 */:** Ein Stab habe die Masse M und Trägheitsmoment $J = Mk^2$ bezüglich einer Querachse durch den Schwerpunkt. Man lässt den Stab, ohne ihn anzustoßen, aus der waagerechten Lage fallen. Unmittelbar danach trifft im Abstand a vom Schwerpunkt entfernt eine herabfallende, punktförmige Masse m auf den Stab.



Wie bewegt sich dieser, wenn der Stoß plastisch ist?

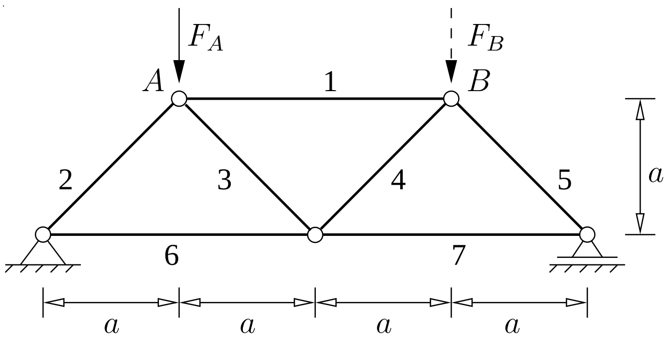
Aufgabe 1 *:

Das dargestellte Fachwerk (Dehnsteifigkeit der Stäbe *EA*) wir zunächst nur durch die Kraft F_A belastet.

a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen sowie die Stabkräfte S_1 bis S_7 (Hinweis: Verwenden Sie das aus TM 1 bekannte Knotenpunktverfahren).

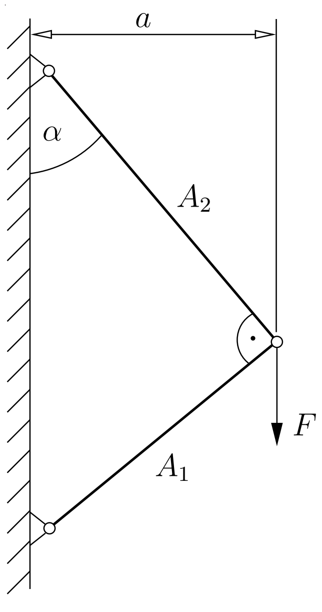
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Verschiebung des Punktes *A*.

c) Das Fachwerk wird nun zusätzlich durch die Kraft F_B belastet. Kann nun zur Berechnung der Verschiebung im Punkt *A* ebenfalls der Arbeitssatz herangezogen werden?



Aufgabe 2 */:**

Das nebenstehende Fachwerk besteht aus zwei Stäben (jeweils Elastizitätsmodul *E*, Querschnittsfläche A_1 bzw. A_2) und wird durch eine Kraft *F* belastet. Für ein Flächenverhältnis von $A_1/A_2 = \tan\alpha$ verschiebt sich der Lastangriffspunkt nur vertikal.

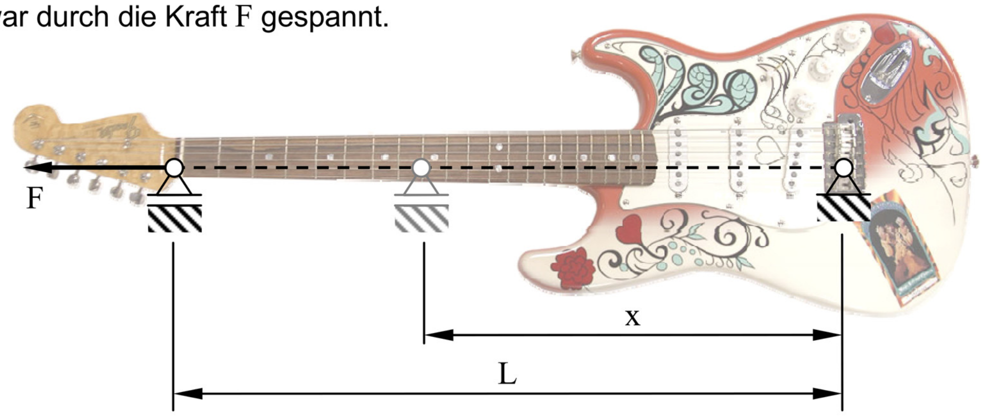


a) Berechnen Sie für dieses Flächenverhältnis die Verschiebung des Lastangriffspunktes mit Hilfe des Arbeitssatzes.

b) Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe einer geometrischen Betrachtung. Berechnen Sie hierzu die Verlängerung der Stäbe. Ermitteln. Sie dann die Verschiebung des Lastangriffspunktes mit Hilfe einer Skizze. Vernachlässigen Sie dabei die Winkeländerung.

Aufgabe 3 **: (Prüfungsaufgabe SS 2006, Wiederholung kont. Schwingungen).

Als Jimi Hendrix bei seinem legendären Konzert in Monterey seine Gitarre verbrannte, spielte er auf der bereits brennenden Gitarre zum Abschied noch einen letzten Ton. Die gespielte Saite (Länge L, Dichte ρ, Querschnittsfläche A) war durch die Kraft F gespannt.



a) Geben Sie die Schwingungsfrequenz der ersten Eigenfrequenz der ungegriffenen Saite (Länge L) an.

$\omega_1 =$ ___________________

b) Für welche gegriffene, d.h. verkürzte Gesamtlänge x der Saite hätte sich ein Ton der Frequenz $\overline{\omega}_1 = 3/2\,\omega_1$ ergeben?

$x =$ ___________________

c) Um welche Kraft ΔF hätte Jimi die Spannkraft der ungegriffenen Saite erhöhen müssen, um ebenfalls die Eigenfrequenz $\overline{\omega}_1 = 3/2\,\omega_1$ zu erhalten?

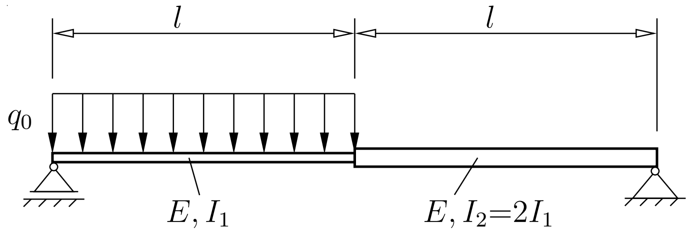
$\Delta F =$ ___________________

d) Während die Gitarre brannte, blieb die Kraft F eine Zeit lang konstant. Wurde während dessen der nachklingende Ton durch die thermische Ausdehnung höher oder tiefer?

○ höher ○ tiefer

Aufgabe 1 *:

Bestimmen Sie für den skizzierten, elastischen Balken die Durchbiegung und die Verdrehung in Balkenmitte mit dem Satz von Castigliano. Der Querkraftanteil in der Komplemetärenergie kann vernachlässigt werden.



Berechnen Sie zunächst nur die Durchbiegung. Führen Sie hierzu eine geeignete Hilfskraft F_H ein.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen.

b) Geben Sie den Momentenverlauf an (Hinweis: Schneiden Sie dazu die beiden Teile des Balkens frei).

c) Wie berechnet sich hier die komplementäre Formänderungsenergie?

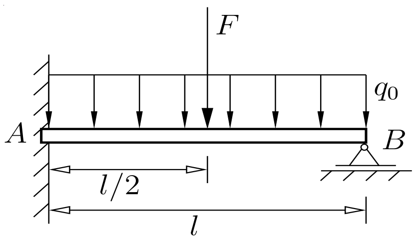
d) Bestimmen Sie die Durchbiegung in der Balkenmitte mit Hilfe des 2. Satzes von Castigliano.

Im Folgenden wird die Verdrehung in Balkenmitte berechnet:

e) Modifizieren Sie die in a) – c) durchgeführten Rechenschritte entsprechend.

f) Bestimmen Sie die Verdrehung in der Balkenmitte.

Aufgabe 2 *:



Ein statisch unbestimmt gelagerter Kragträger mit der Biegesteifigkeit *EI* wird mit einer konstanten Streckenlast q_0 und einer Einzelkraft *F* belastet. Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt *B* und die Durchbiegung in Balkenmitte.

a) Berechnen Sie den Momentenverlauf in Abhängigkeit der unbekannten Lagerkraft F_B.

b) Geben Sie die geometrische Verträglichkeitsbedingung für die Verschiebung im Punkt B an.

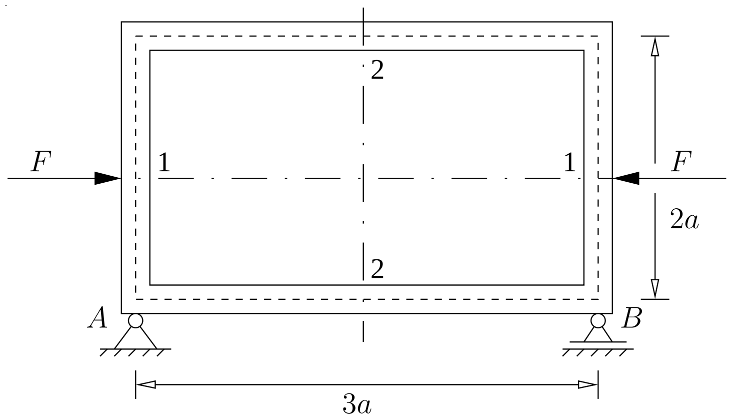
c) Berechnen Sie die unbestimmte Lagerkraft mit Hilfe des Satzes von Menabrea.

Im Folgenden wird das statisch unbestimmte System in ein statische bestimmtes überführt. Dazu wird das Lager B durch eine „eingeprägte Kraft“ F_B ersetzt.

d) Ermitteln Sie nun die Durchbiegung in Balkenmitte.

Aufgabe 1 **:

Der skizzierte, symmetrische Rahmen ist in *A* und *B* statisch bestimmt gelagert. Er besitzt überall den gleichen Querschnitt und die gleiche Biegesteifigkeit *EI.* Er wird durch die beiden Einzelkräfte *F* belastet.



a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen auf den Rahmen.

b) Ermitteln Sie den Verlauf des Biegemomentes.

c) Berechnen Sie mit dem Satz von Castigliano die Verringerung des Abstandes 1-1 und die Vergrößerung des Abstandes 2-2.

Hinweis: Normal- und Querkraftanteile in den Komplementärenergien können vernachlässigt werden.

Aufgabe 2 **:

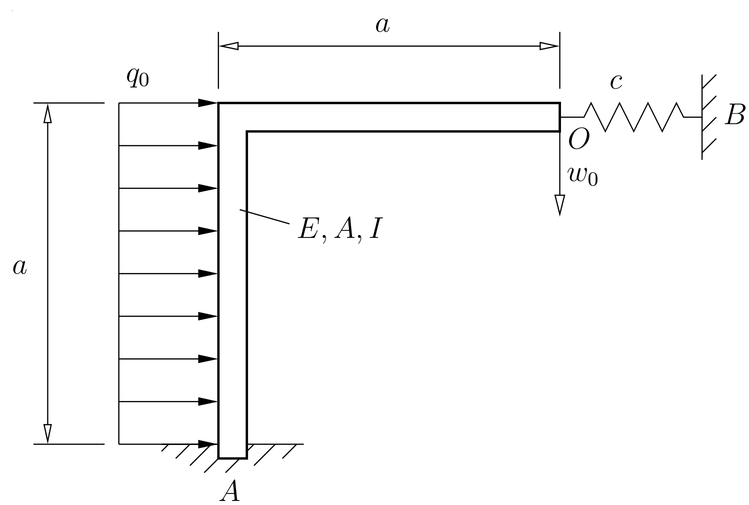
Ein Rahmen (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Flächenträgheitsmoment I) ist auf einer Seite fest eingespannt und stützt sich auf der anderen Seite über eine Feder (Federsteifigkeit c) an einer Wand ab. Er ist mit der Streckenlast q_0 belastet.

Berechnen Sie

a) die Lagerreaktionen im Punkt A auf den Rahmen als Funktion der Federkraft und eventuell notwendiger Hilfskräfte bzw. Hilfsmomente.

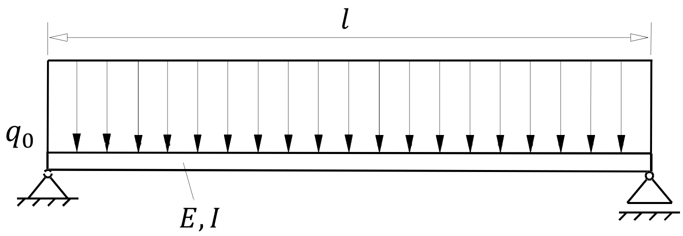
b) die vertikale Verschiebung w_0 des Rahmens im Punkt O. Betrachten Sie dazu die Formänderungsenergie des gesamten Systems und bestimmen Sie die Federkraft.

c) die Neigung des Rahmens ψ_0 im Punkt O.



Hinweis: Berücksichtigen Sie die Verformungsenergie aufgrund der Normalkräfte, vernachlässigen Sie jedoch den Einfluss der Querkräfte.

Aufgabe 1 *:



Auf einen homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI) wirkt eine konstante Streckenlast $q(x) = q_0$ wie in obiger Abbildung skizziert. Mit dem dreigliedrigen Ritz-Ansatz

$$\tilde{w}(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x)$$

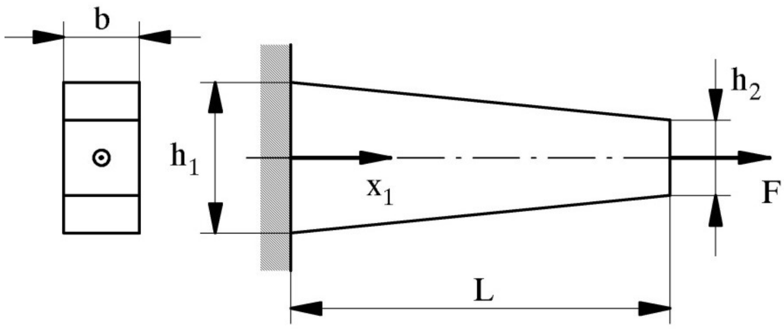
mit den Ansatzfunktionen

$$\phi_1(x) = \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right), \quad \phi_2(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right), \quad \phi_3(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)^2,$$

soll näherungsweise die Biegelinie sowie die Durchbiegung der Balkenmitte bestimmt werden. Berechnen Sie dazu zunächst die Koeffizienten c_i und werten Sie die Näherungslösung anschließend an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ aus.

Aufgabe 2 *:

Die Verformung des in der Skizze dargestellten Zugstabes soll mit der Methode der finiten Elemente untersucht werden.



a) Entwickeln Sie die lokale Steifigkeitsmatrix für ein sich verjüngendes Stabelement mit einem linearen Verschiebungsansatz.

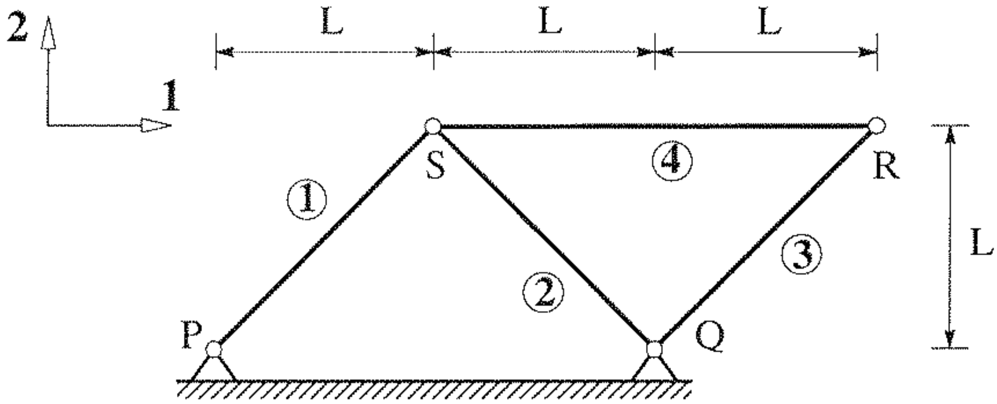
b) Bestimmen Sie eine Näherungslösung für den Verschiebungsverlauf $u(x_1)$ durch eine Approximation mit zwei finiten Elementen.

c) Vergleichen Sie die Näherungslösung aus b) mit der exakten Lösung des Problems.

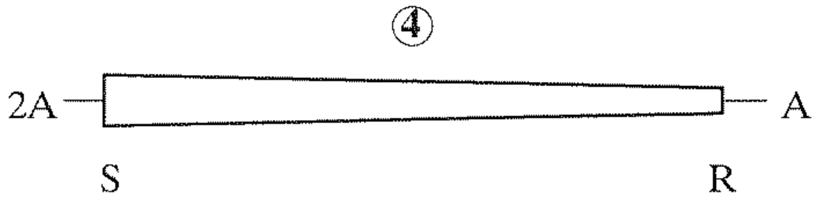
Zahlenwerte: $h_1 = 25\text{ mm}$, $h_2 = 12{,}5\text{ mm}$, $b = 12{,}5\text{ mm}$,
$L = 300\text{ mm}$, $F = 20000\text{ N}$, $E = 210000\,\text{N/mm}^2$.

Aufgabe 1 */:**

Das skizzierte ebene Tragwerk soll mit Hilfe der Finite–Elemente–Methode untersucht werden.



Alle Stäbe des Tragwerks haben den gleichen Elastizitätsmodul E. Die Stäbe 1, 2 und 3 haben den konstanten Querschnitt A. Der Querschnitt des Stabes 4 nimmt vom Knoten S in Richtung zum Knoten R linear ab.



a) Bestimmen Sie die Zahl der Freiheitsgrade des ebenen Modells mit 4 Elementen.

$f =$ ______

b) Wie lautet der Vektor $\underline{y}$ der unabhängigen Knotenpunktsverschiebungen?

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{S1} & u_{S2} & u_{R1} \end{bmatrix}$ ○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{S1} & u_{S2} & u_{Q1} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{S1} & u_{S2} & u_{R1} & u_{R2} \end{bmatrix}$ ○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{S1} & u_{R1} & u_{R2} & u_{Q1} \end{bmatrix}$

c) Welcher Wert kann für die Querschnittsfläche A_4 des Stabes 4 in der lokalen Steifigkeitsmatrix verwendet werden?

$$A_4 = \_\_\_\_\_\_$$

d) Geben Sie die Richtungskosinusse für die vier Stäbe an.

Stab 1: $c_{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_$, $c_{21} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Stab 2: $c_{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_$, $c_{21} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Stab 3: $c_{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_$, $c_{21} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Stab 4: $c_{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_$, $c_{21} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

e) Stellen Sie die Submatrizen $\underline{\underline{K}}_{\text{sub}\,\gamma}$ für die vier Stäbe im globalen Koordinatensystem auf.

$$\underline{\underline{K}}_{\text{sub}\,1} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\text{sub}\,2} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\text{sub }3} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{K}}_{\text{sub }4} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}.$$

f) Wie lauten die Verteilungsmatrizen $\underline{\underline{C}}_\gamma$ zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Knotenpunktsverschiebungen der Stäbe und dem Vektor $\underline{y}$ der unabhängigen Knotenpunktsverschiebungen?

$$\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \quad \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}_1 \cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} \cdot \underline{y}$$

$$\underline{w}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \quad \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}_2 \cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} \cdot \underline{y}$$

$$\underline{w}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}_3 \cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \underline{y}$$

$$\underline{w}_4 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}}_4 \cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \underline{y}$$

g) Berechnen Sie die globale Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$.

$$\underline{\underline{K}} = \text{-------} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Das Tragwerk wird belastet. Dabei bewegt sich der Knoten R um 2 mm nach unten, während die anderen Knoten ihre Lage beibehalten.

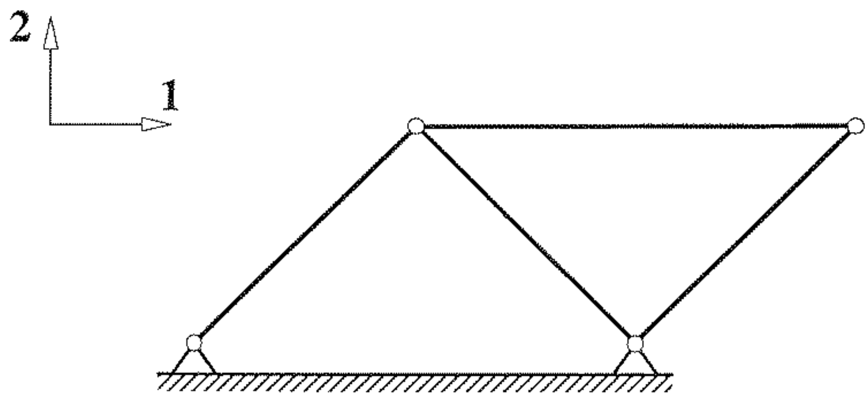
h) Wie lautet der Vektor der freien Knotenpunktsverschiebungen für diesen Belastungsfall?

$$\underline{y} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

i) Berechnen Sie den Vektor $\underline{q}$ der verallgemeinerten Kräfte für diese Belastung. (Zahlenwert: $\frac{AE}{L} = 50\sqrt{2}\ \frac{N}{mm}$).

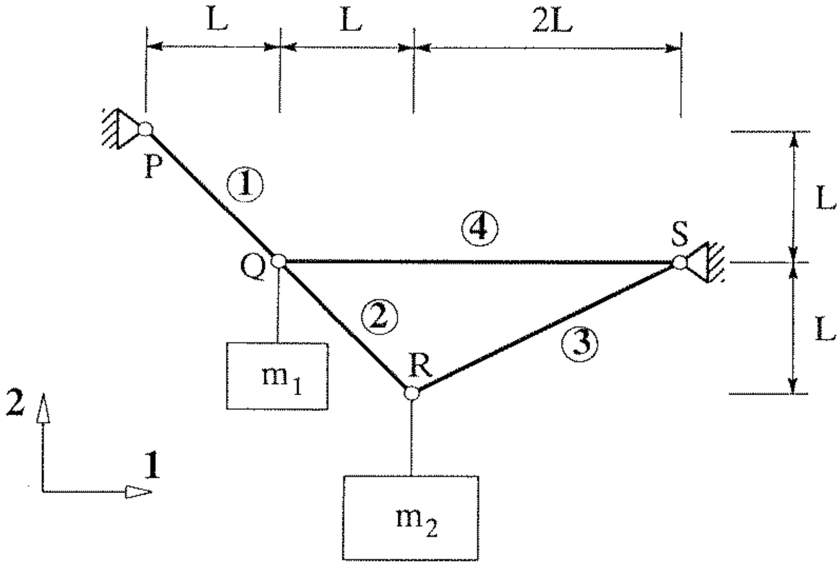
$$\underline{q} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

j) Zeichnen Sie diese Belastung in die Skizze ein. (Maßstab: 25 N = 10 mm).



Aufgabe 2 */:**

An dem skizzierten ebenen Fachwerk sind zwei Gewichte (Masse m_1 und m_2) aufgehängt. Die Verformung des Fachwerks soll mit der Finite−Elemente−Methode untersucht werden. Alle Stäbe des Fachwerks haben den gleichen Elastizitätsmodul E und den gleichen Querschnitt A.



a) Wie groß ist die Zahl der Freiheitsgrade f des elastischen Fachwerks?

$f =$ _____

b) Welcher Vektor $\underline{y}$ beschreibt die freien Knotenpunktsverschiebungen des Fachwerks?

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q1} & u_{Q2} & u_{R1} & u_{R2} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{P1} & u_{Q1} & u_{R1} & u_{S1} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q1} & u_{Q2} & u_{R1} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q2} & u_{R2} & u_{S2} \end{bmatrix}$

c) Bestimmen Sie die globale Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ des Fachwerks mit der Finite–Elemente–Methode. Stellen Sie dabei Ihren Rechenweg dar.

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\qquad\qquad} \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Entscheiden Sie (ohne Rechnung), welche der folgenden Inversen der globalen Steifigkeitsmatrix für das Fachwerk richtig ist.

○ $$\underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{L}{9EA} \begin{bmatrix} 27 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 27+18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \\ 0 & -6\sqrt{2} & 4\sqrt{2}+5\sqrt{5} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} \\ 0 & 12\sqrt{2} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} & 16\sqrt{2}+5\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

○ $$\underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 27 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 27+18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \\ 0 & -6\sqrt{2} & 4\sqrt{2}+5\sqrt{5} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} \\ 0 & 12\sqrt{2} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} & 16\sqrt{2}+5\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

○ $$\underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{3L}{EA} \begin{bmatrix} 27 & 27 & 0 & 0 \\ 27 & 27+18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \\ 0 & -6\sqrt{2} & 4\sqrt{2}+5\sqrt{5} & 16\sqrt{2}+5\sqrt{5} \\ 0 & 12\sqrt{2} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} & -8\sqrt{2}+5\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\underline{q}$ und dem Vektor der Knotenpunktsverschiebungen $\underline{y}$?

____

f) Wie lautet der Vektor der verallgemeinerten Kräfte bei der gegebenen Belastung durch die zwei Gewichte?

$$\underline{q} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

g) Berechnen Sie die vertikale Verschiebung der Knoten Q und R.

$u_{Q2} =$ ______________________________

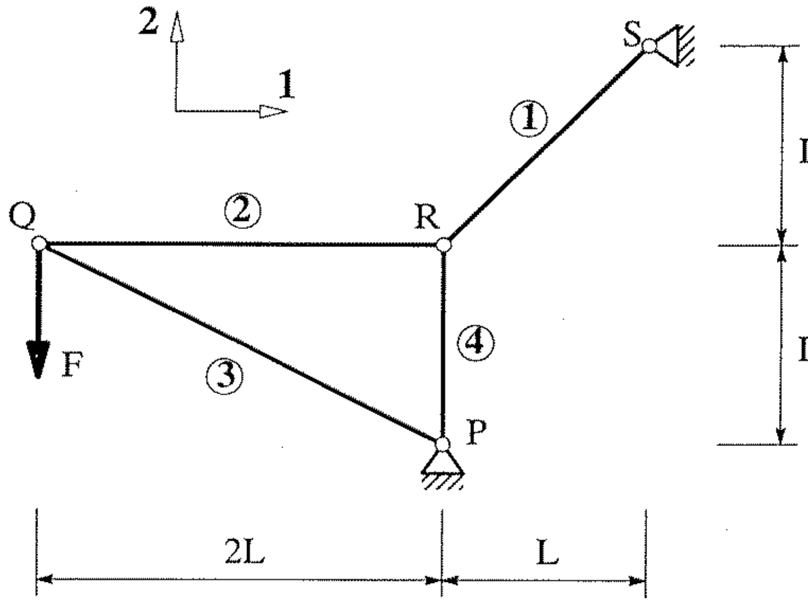
$u_{R2} =$ ______________________________

h) Bestimmen Sie das Massenverhältnis der beiden Gewichte, bei dem sich die gleiche vertikale Verschiebung der Knoten Q und R ergibt.

$\frac{m_2}{m_1} =$ ______________________________

Aufgabe 1 */**

Das skizzierte ebene Fachwerk eines Verladekrans wird durch die Kraft F im Knoten Q belastet. Die Verformung des Fachwerks soll mit der Finite–Elemente–Methode untersucht werden. Alle Stäbe des Fachwerks haben den gleichen Elastizitätsmodul E und den gleichen Querschnitt A.



a) Wie groß ist die Zahl der Freiheitsgrade f des elastischen Fachwerks?

$f =$ _____

b) Welcher Vektor $\underline{y}$ beschreibt die freien Knotenpunktsverschiebungen des Fachwerks?

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q1} & u_{Q2} & u_{R1} & u_{R2} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{P1} & u_{Q1} & u_{R1} & u_{S1} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q1} & u_{Q2} & u_{R1} \end{bmatrix}$

○ $\underline{y} = \begin{bmatrix} u_{Q2} & u_{R2} & u_{S2} \end{bmatrix}$

Mit einem Finite–Elemente–Programm wurde die Inverse der globalen Steifigkeitsmatrix für gegebene Zahlenwerte von A, E und L berechnet:

$$\underline{\underline{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.914 & 5.828 & 1.914 & -0.500 \\ 5.828 & 17.247 & 3.828 & -1.000 \\ 1.914 & 3.828 & 1.914 & -0.500 \\ -0.500 & -1.000 & -0.500 & 0.500 \end{bmatrix} \frac{10^{-3}\,\mathrm{mm}}{\mathrm{N}}$$

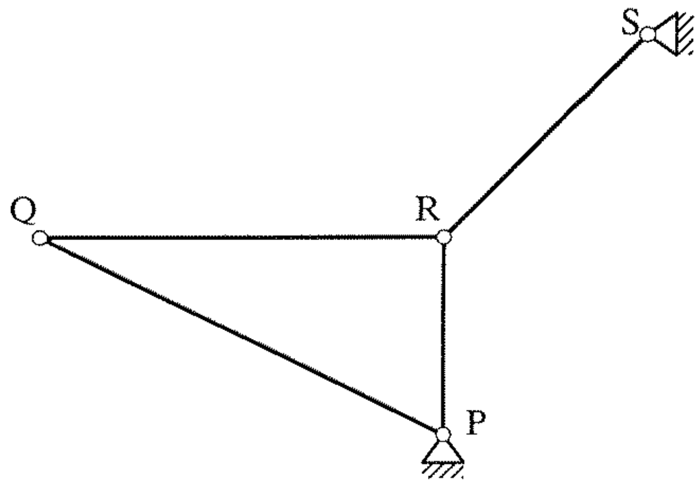
c) Wie lautet der Vektor der verallgemeinerten Kräfte, wenn das Fachwerk mit der Kraft $F = 100\,\mathrm{N}$ belastet wird?

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}^T \mathrm{N}$$

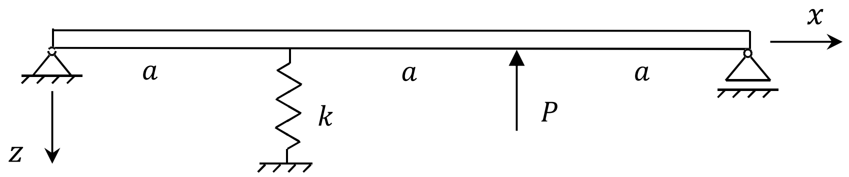
d) Bestimmen Sie die Verschiebung der freien Knotenpunkte für diese Belastung.

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}^T \mathrm{mm}$$

e) Skizzieren Sie die Verschiebungsvektoren der Punkte Q und R nach der Belastung im Maßstab: $1\,\mathrm{mm}$ Verformung $\widehat{=}$ $2\,\mathrm{cm}$ in der Skizze. Hinweis: Durch diese Maßstabswahl kann die Längenänderung der Stäbe nicht mehr aus der Skizze abgelesen werden.



Aufgabe 2 *:



Der skizzierte masselose Balken (Länge $3a$, Biegesteifigkeit EI) ist an den Endpunkten drehbar gelagert. An der Stelle $x = a$ ist eine Feder (Federsteifigkeit k) so befestigt, dass sie für $w(a) = 0$ gerade entspannt ist. An der Stelle $x = 2a$ wird der Balken durch die Einzelkraft P belastet.
Mit dem eingliedrigen Ritz-Ansatz

$$\tilde{w}(x) = c_1 \phi_1(x) \quad \text{mit} \quad \phi_1(x) = \frac{x^2(x-3a)}{a^3}$$

soll die Biegelinie approximiert werden.

a) Zeigen Sie, dass der angegebene Ansatz die Randbedingungen erfüllt.
b) Berechnen Sie die Formänderungsarbeit der Gesamtanordnung in Abhängigkeit von c_1.
c) Ermitteln Sie die Konstante c_1 mit dem Ritz'schen Verfahren.