Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Tag: 11. April - 17. April 2016**

Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 1

The occurrence of any event where the chances are beyond one in ten followed by 50 zeros is an event which we can state with certainty will never happen, no matter how much time is allotted and no matter how many conceivable opportunities could exist for the event to take place.
(Émile Borel , 1871-1956)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

1.1. (4 Punkte) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $A, B \in \Sigma$, sowie $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge messbarer Mengen. Beweisen Sie:

(a) a) $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(b) b) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, falls $B \subseteq A$ und $\mu(B) < \infty$.

(c) c) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

1.2. (4 Punkte) Sei M eine überabzählbare Menge. Wir definieren

$$\mathfrak{M} := \{A \subseteq M |\ A \text{ oder } M \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf M ist.

b) Für $A \in \mathfrak{M}$ definieren wir

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$ ist.

Votieraufgaben

1.3. Konstruieren Sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{Q} \subset \Omega$ und $\mu^{(1)}(\Omega) < \varepsilon$. Was folgt daraus für $\mathbb{Q}$?

1.4. Zeigen Sie, dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von der Menge $M := \{]a, \infty[\ |\ a \in \mathbb{R}\}$ erzeugt wird.

1.5. Die Cantormenge C ist wie folgt definiert: Durch Entfernen des mittleren offenen Teilintervalls von $C_1 := [0, 1]$ erhält man $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Induktiv erhält man die aus 2^n kompakten Intervallen bestehende Menge C_{n+1} durch Entfernen der 2^{n-1} offenen mittleren Teilintervalle von C_n. Nun definiert man

$$C := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$$

Zeigen Sie:

a) C ist eine $\mu^{(1)}$-Nullmenge.

b) C ist überabzählbar.

1.6. Zeigen Sie, dass die Abbildung μ^*, die bei der Vervollständigung des Maßraums (Ω, Σ, μ) definiert wurde, ein Maß auf (Ω, Σ^*) ist.