

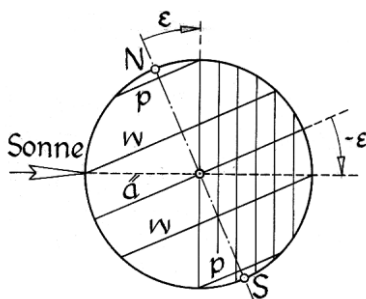
Sonnenuhren

Sonnenuhren sind Vorrichtungen, an denen mit Hilfe des Sonnenlichtes innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen die Zeit des Tages, allenfalls auch das Datum, abgelesen werden kann.

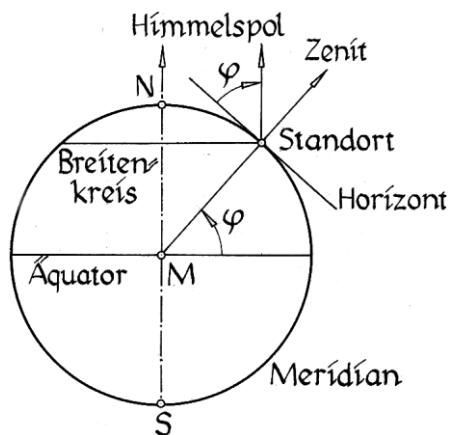
Vorbemerkung aus der Geographie

Die Zeitmessung mit Hilfe der Sonne hängt vom jeweiligen Standort ab. Die Lage eines Ortes auf der Erde kann durch die „geographischen Koordinaten“, die Länge λ und die Breite φ , angegeben werden (Figur 1). Die Linien gleicher geographischer Länge sind Halbkreise von einem Pol der Erde bis zum anderen und heißen Meridiane. Die Linien gleicher geographischer Breite sind Parallelkreise zum Äquator und heißen Breitenkreise. Besondere Breitenkreise sind die Polarkreise und die Wendekreise. Zu den Sonnenwenden wird die Erde so von der Sonne beschienen, dass der eine Polarkreis ein Gebiet mit 24 Stunden Sonnenlicht, der andere ein Gebiet mit 24 Stunden Dunkelheit begrenzt. Jeweils über einem der beiden Wendekreise steht die Sonne am Mittag eines

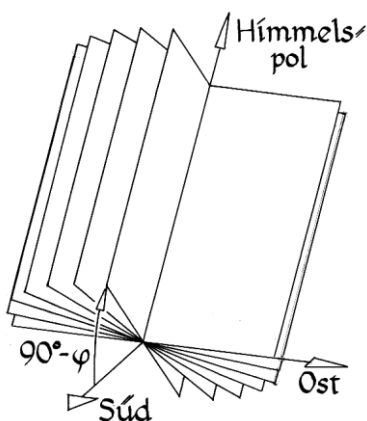
Sonnwendtages im Zenit (Figur 2).



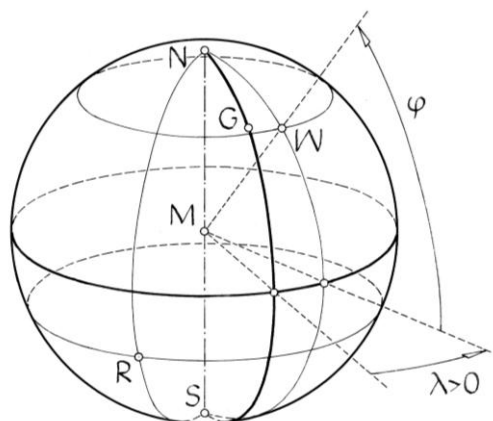
Figur 2: Wende- und Polarkreise



Figur 3: Sonnenuhrzeiger



Figur 4: Stundenebenen



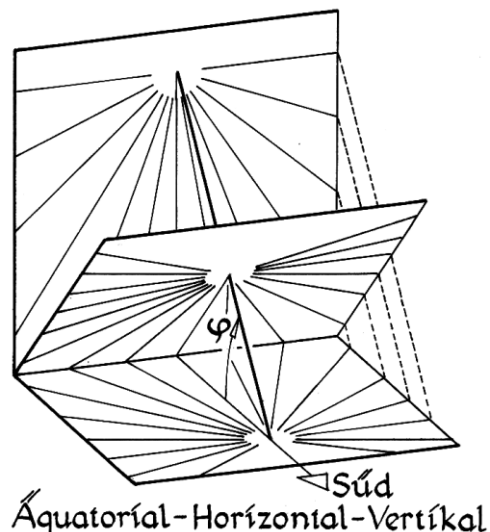
Greenwich	$\lambda = 0^\circ$	$\varphi = 51,2^\circ$
Wien	$\lambda = 16,3^\circ$	$\varphi = 48,2^\circ$
Río de Janeiro	$\lambda = -43,2^\circ$	$\varphi = -23^\circ$

Figur 1: Geographische Länge λ (lambda) und Breite φ (phi)

Die Zeit des Tages - Stunden und Minuten

Mit dem Schatten eines geraden Stabes auf einem Zifferblatt zeigt eine Sonnenuhr die Stunden „Wahrer Ortszeit“ an – im Allgemeinen verschieden von der „Mittleren Zeit“ unserer mechanischen und elektronischen Uhren, wie noch ausgeführt werden soll. Die Achse des Stabes befindet sich in einer gedachten lotrechten Nordsüdebene, sie ist unter dem Winkel φ der geographischen Breite des Standortes gegen die Horizontale geneigt. Der Stab zeigt so zum Himmelspol, um den sich die Gestirne zu drehen scheinen – zufolge der Erddrehung, die wir nicht wahrnehmen. Für Beobachter auf der nördlichen Halbkugel der Erde befindet sich der Himmelspol in der Nähe des Polarsterns (Figur 3). An manchen Sonnenuhren wird statt eines Stabes die Kante einer Platte verwendet.

Befindet sich die Mitte der Sonnenscheibe in der vertikalen Nordsüdebene, so ist das, zumindest außerhalb der Polargebiete, der Zeitpunkt des „Wahren Mittags“. Der Schatten des Stabes fällt auf die „Mittagslinie“ der Sonnenuhr. In den Polargebieten kann sich die Mitte der Sonnenscheibe auch zu Mitternacht in der lotrechten Nordsüdebene befinden: Mitternachts-sonne!



Figur 5: Drei Zifferblätter

Die gedachte vertikale Nordsüdebene kann von 15° zu 15° um die Stabachse gedreht werden. Es entsteht das Bündel der „Stundenebenen“ (Figur 4). Alle vollen Stunden Wahrer Ortszeit gelangt die Mitte der Sonnenscheibe bei der scheinbaren Drehung der Sonne in eine Stundenebene. Der Schnitt der Stundenebene mit dem Zifferblatt ist die jeweilige Stundenlinie (Figur 5).

Datumsanzeige

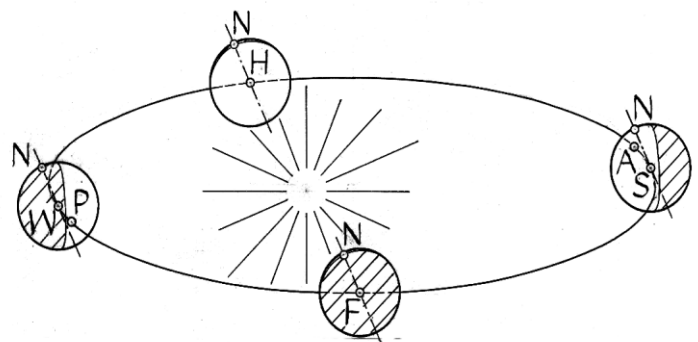
Auch der Schatten einer Stelle des Stabes, seines Endes oder einer Kugel auf dem Stab, kann bei seinem Weg über das Zifferblatt verfolgt werden, allenfalls auch der Lichtpunkt im Schatten einer durchlocherten Scheibe. Die Sonne steht im Laufe eines Jahres einmal höher, einmal niedriger, ihre Tagbögen sind voneinander verschieden. An jedem Tag bewegt sich die beobachtete Schattenstelle auf einem anderen Weg über das Zifferblatt. Diese Schattenwege („Datumslinien“) sind nur für bestimmte Tage auf den Zifferblättern eingetragen, meistens für die Tage, an denen die Sonne in ein neues „Zeichen des Tierkreises“ tritt, in ein bestimmtes Gebiet des Sternenhimmels.

Die Erde umläuft die Sonne während eines Jahres. Daher befindet sich die Sonne, von der Erde aus gesehen, an jedem Tag an einer etwas anderen Stelle unter den Fixsternen. Da die Sterne bei Tag nicht sichtbar sind, es sei denn während einer totalen Sonnenfinsternis, wird der Mond im ersten oder im letzten Viertel beobachtet. Die Richtung zur Sonne ist rechtwinklig zur Richtung zum Mond hin. Aus den Sternbildern um den Mond kann geschlossen werden, an welcher Stelle des Sternenhimmels sich die Sonne gerade befindet.

Alle Gestirne können auf die Innenseite einer Kugelfläche mit unvorstellbar großem Radius projiziert gedacht werden, auf die Himmelskugel oder Sphäre. Der Jahresweg der Sonne auf dieser Kugelfläche ist ein Großkreis, die sogenannte „Ekliptik“. Er wird in zwölf gleiche Teile geteilt, denen die Bereiche der zwölf Tierkreiszeichen entsprechen.

Wahre und Mittlere Zeit, „Zeitgleichung“

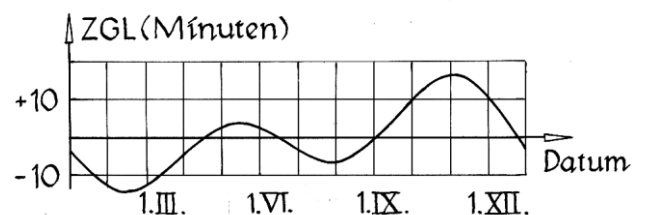
Nun soll auf den Begriff der „Mittleren Zeit“ eingegangen werden. Die Achse der Erde ist gegen die Ebene ihrer Umlaufbahn um die Sonne geneigt, sie verharrt weitgehend in ihrer Stellung im Raum. Das bringt uns den Wechsel der Jahreszeiten (Figur 6). Zu den Tagundnachtgleichen steht die Sonne zu Mittag über dem Äquator im Zenit, zu den Sonnenwenden über den Wendekreisen. Die Sonne muss sich von einem Mittag bis zum nächsten nach einer vollen Umdrehung weniger weiterdrehen, wenn sie in Äquatornähe im Zenit steht, als dann, wenn das an den Wendekreisen geschieht. 24 Stunden Wahrer Sonnenzeit sind zu den Tagundnachtgleichen kürzer als zu den Sonnenwenden.



A Aphel F Frühlingsanfang H Herbstanfang
P Perihel S Sommer W Wintersonnenwende

Die Erde umläuft die Sonne nicht auf einem Kreis, sondern auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt sich die Sonnenmitte befindet. Sie bewegt sich in Sonnennähe schneller als in Sonnenferne.

Beide Eigenschaften des Jahresumlaufs der Erde um die Sonne, die Schrägstellung der Erdachse und die wechselnde Geschwindigkeit des Umlaufs, ergeben Differenzen zwischen der „Wahren Zeit“ und der gleichförmigen „Mittleren Zeit“, die mit mechanischen oder elektronischen Uhren gemessen wird. Die Differenz „Wahre Ortszeit minus Mittlere Ortszeit“ heißt „Zeitgleichung“. Wegen des Schaltjahreszyklus und langfristiger, geringer Änderungen der Erdbewegung ist die Zeitgleichung von Jahr zu Jahr neu zu ermitteln. Das geschieht mit Rechenprogrammen und wird für die einzelnen Tage des Jahres in Tabellen festgehalten. Der Unterschied zwischen den beiden Zeiten kann bis zu 16 Minuten betragen. Viermal im Jahr sind die Unterschiede Null (Figur 7).



Figur 7: Diagramm der Zeitgleichung

Ortszeiten und Zonenzeiten

An jedem Ort ist Wahrer Mittag, wenn die Sonne die Nordsüdebene durch den Ort passiert – wenn wiederum von der Erscheinung der Mitternachts-sonne abgesehen wird. Alle Orte eines Meridians der Erde haben zu gleicher Zeit Mittag. Wegen der

Erddrehung ist es im Osten früher Mittag als im Westen. Die Erfordernisse des modernen Lebens führten in der zweiten Hälfte des 19. Jh. zur Einführung von „Zonenzeiten“, Mittleren Zeiten für Orte mit geographischen Längen von 15° zu 15° . Diese Zeiten gelten für alle Orte in bestimmten Zonen der Erde. Die ausgezeichneten Meridiane heißen „Zonenmeridiane“. Die Zonenzeit für 30° östlicher Länge mit dem Mittag um 12 Uhr, die Osteuropäische Zeit, ist zugleich unsere Sommerzeit.

An Standorten mit beliebigen geographischen Längen, die nicht auf einem Zonenmeridian liegen, können in die Zifferblätter von Sonnenuhren Stundenlinien für die Wahre Ortszeit eines Zonenmeridians eingetragen werden. Sie liegen zwischen den Stundenlinien für die jeweilige Wahre Ortszeit, entsprechend der Differenz zwischen den geographischen Längen des Standortes und des Zonenmeridians.

Werden in ein Zifferblatt für verschiedene Tage auf der jeweiligen Datumslinie die Stundenpunkte für die Mittlere Zeit eingetragen, ergeben sich achterförmige Stundenlinien. Abgelesen wird mit Hilfe einer ausgezeichneten Stelle des Stabschattens im Netz der Achterschleifen und der Datumslinien.

Wird die Anzeige auf einer Sonnenuhr mit der auf einer Armbanduhr verglichen, so ist zu beachten, für welche geographische Länge das Zifferblatt der Sonnenuhr konstruiert ist. Ist es für die Wahre Ortszeit des Standortes konstruiert, dann entsprechen jedem Grad Differenz zwischen der geographischen Länge des Standortes und der des Zonenmeridians vier Minuten Zeitdifferenz. Dann ist noch die Zeitgleichung in den Uhrenvergleich mit einzubeziehen.

Es folgen ausgewählte Beispiele aus der Geschichte der Sonnenuhren:

Anfänge

Bereits in vorgeschichtlicher Zeit wurden Sonne, Mond und Sterne beobachtet, für den Ackerbau im Hinblick auf Aussaat und Ernte. Die Zwölftteilung der Tage und Jahre kommt aus dem Zwischenstromland.

In Ägypten wurden Sonnenuhren gefunden, wie sie bis in die Neuzeit in verschiedenen Ländern und Abwandlungen vorkommen. Der wohl älteste Fund dieser Art stammt aus der Zeit des Königs Menephta (1323-1302 v. Chr.), eine halbkreisförmige Elfenbeinscheibe (Figur 8).

Sonnenuhren dieser Art wurden in späteren Jahrhunderten verwendet, in denen die sehr guten Sonnenuhren der griechischen und römischen Antike vergessen waren, in der zweiten Hälfte des ersten Jahrtausends in Armenien, England und Deutschland. Sie sind bis in die Zeit der Gotik an Baudenkmalern zu finden, sogar noch in der Renaissance neben moderneren Sonnenuhren.

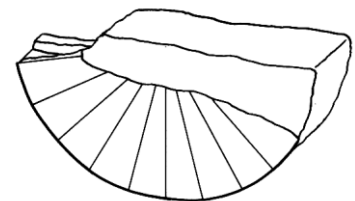
Die Zifferblätter dieser Sonnenuhren sind Halbkreise unter waagrecht durchmessern, die in vier, acht oder zwölf gleiche Sektoren geteilt sind (Figur 9). Sie befinden sich an lotrechten Südwänden. Der Schattenstab, meist verloren gegangen, war in der Mitte des Halbkreises befestigt, und wies waagrecht nach Süden. Bei Aufgang und Untergang der Sonne fiel sein Schatten auf die beiden waagrecht Halbmesser, zu Mittag war er lotrecht.

Mit einem Standort am Äquator würde eine solche Uhr die modernen Stunden der Wahren Ortszeit anzeigen. Je weiter ihr Standort vom Äquator entfernt ist, desto mehr unterscheiden sich die an ihr angezeigten Stunden in ihrer Länge nicht nur während der verschiedenen Jahreszeiten voneinander, sondern auch im Verlauf der einzelnen Tage. Gleichen Winkeln im lotrechten Zifferblatt können keine gleichen Zeiten entsprechen, außer eben am Äquator.

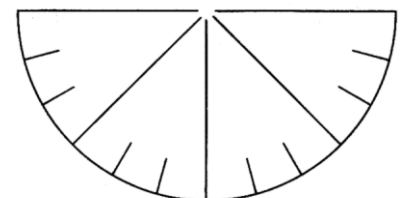
Aus Norwegen sind aus älterer Zeit auf waagrecht Steinplatten Achtelteilungen des Vollkreises bekannt, aus Deutschland verschiedenartige Ritzungen an Kirchenwänden, die nicht nach Süden gerichtet sind.

Griechische und römische Antike

Zwischen dem 7. und dem 4. Jh. v. Chr. entwickelten chaldäische und griechische Astronomen auf griechischen Inseln Sonnenuhren, mit deren Hilfe die Tage zwischen Aufgang und Untergang der Sonne in zwölf angenähert gleich lange Stunden geteilt wurden. Im Verlauf eines Jahres ändert sich die Länge dieser Stunden. Sie heißen temporäre Stunden oder Temporalstunden, bei den Engländern temporary oder seasonal hours, in Frankreich heures temporaires.



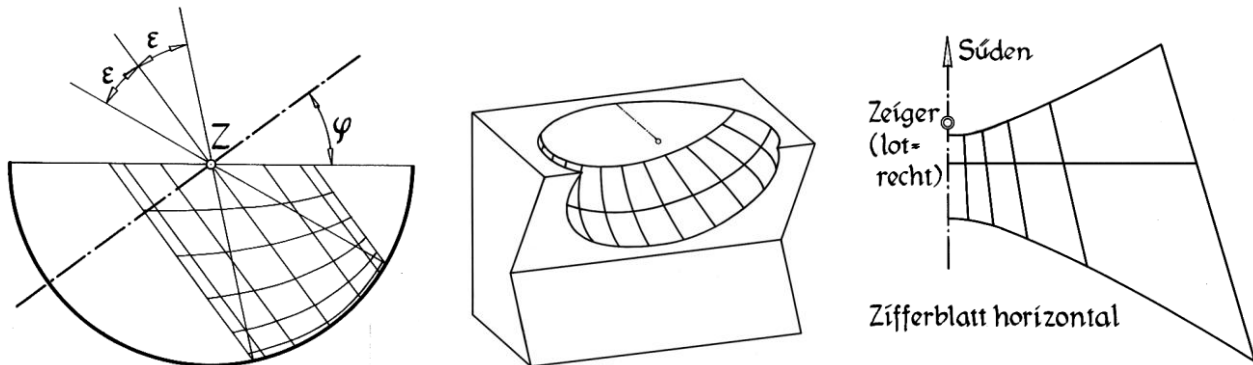
Figur 8: Altägyptische Sonnenuhr



Figur 9: Vertikale Süduhr, alt

Mit dem Schatten einer Stabspitze wird der Weg der Sonne auf der Himmelskugel in das Innere einer Halbkugel abgebildet, die Stabspitze befindet sich in der Mitte dieser Halbkugel (Figur 10, links; φ ist die geographische Breite des Standortes). Die Halbkugel wird oben von einem waagrechten Kreis begrenzt, dem Bild des Horizonts. Oft ist ein südlicher Teil der Halbkugel abgeschnitten, unter dem Winkel $90^\circ - \varphi$ (Figur 10, Mitte). Zu den Sonnenwenden überstreicht der Schatten der Stabspitze die Bilder der beiden Wendekreise der Sphäre, zu den Tagundnachtgleichen das Bild des Himmelsäquators. Die drei Kreisbögen werden jeweils in zwölf gleiche Teile geteilt, die Teilungspunkte durch Stundenlinien verbunden. Der Stab hieß „Gnomon“. Die Sonnenuhrenkunde wird oft als „Gnomonik“ bezeichnet.

Projektionen dieser sphärischen Zifferblätter aus dem Mittelpunkt der Kugel auf verschiedene Flächen ergaben eine Vielzahl von Formen griechischer Sonnenuhren, die von den Römern übernommen wurde. Zifferblätter gab es auf Ebenen (Figur 10, rechts), in nach vorne offenen Hohlkugelteilen mit einem Lichteinfall durch eine Öffnung an der höchsten Stelle, weiters in konkaven Teilen der Mantelflächen von Drehzylindern und Drehkegeln, deren Achsen zur Erdachse parallel waren.



Figur 10: Antike Sonnenuhren; Skaphe, Hemicyclium und ebene Horizontaluhr

Neuzeit

In den „dunklen“ Jahrhunderten war das astronomische Wissen der Antike im Abendland vergessen, wurde aber von den Arabern bewahrt. Im 15. Jh., vielleicht bereits vorher von den Arabern, wurde der „Polstab“ erfunden, der zum Himmelspol gerichtet ist. Die Tage können unabhängig von den Jahreszeiten in 24 fast gleiche Teile geteilt werden. (Die Werte der Zeitgleichung ändern sich sehr geringfügig von Stunde zu Stunde.) Maßgeblich an der Entwicklung des Polstabs beteiligt waren die Österreicher Johannes von Gmunden (1380/84-1442) und Georg von Peurbach (1423-1461).

Zifferblätter mit Datumslinien ermöglichten verschiedene Teilungen der Tage: Babylonische Stunden teilten die Zeiträume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufgängen der Sonne in 24 bis auf geringe Unterschiede gleiche Teile, Italische Stunden die Zeiträume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Untergängen. (Vollkommen exakte Teilungen sind nicht möglich. Die Refraktion, die Ablenkung des Sonnenlichtes beim Durchgang durch die Lufthülle der Erde, bewirkt, dass die erste und die letzte Stunde eines Tages länger sind als die anderen Stunden.)

Die Italischen Stunden ließen auch erkennen, mit welcher Dauer des Tageslichtes an einem Tag noch zu rechnen war. An der Braunschweiger Hütte (Pitztal) gibt es seit 1992 eine Sonnenuhr mit Linien für die Italischen Stunden, ein Dienst für die Bergwanderer!

Eine Sonnenuhr kann in einer Reihe von Nächten vor und nach dem Vollmond auch als Monduhr verwendet werden. Bei Vollmond wird die Mitternacht auf der Mittagslinie angezeigt. Tabellen neben dem Zifferblatt geben an, wie je nach dem „Mondalter“ die durch das Mondlicht angezeigte Zeit umzurechnen ist.

Noch Ende des 19. Jh. wurden auf französischen Bahnhöfen Sonnenuhren zum Nachstellen der mechanischen Uhren verwendet. Nach 1920 bekamen verdiente englische Beamte in den Kolonien sehr genaue „Heliochronometer“.

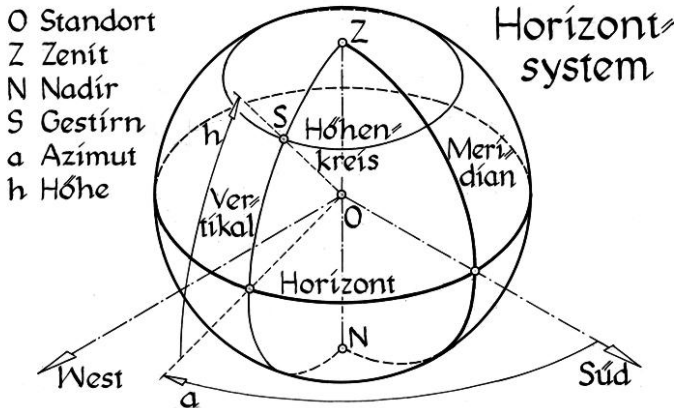
Schon immer wurden mit Erfindungsgeist Sonnenuhren der verschiedensten Arten gebaut, auch heute wird Neues entwickelt. Sonnenuhren werden als Schmuck an Wänden angebracht oder in Gärten und auf öffentlichen Plätzen aufgestellt. Mitunter werden zu Repräsentationszwecken monumentale Sonnenuhren errichtet.

In Österreich sollte altes Kulturgut gepflegt werden. Wiederholt fallen bei Restaurierungen historische Sonnenuhren dem Sparstift zum Opfer. Vor allem wichtig ist aber wohl ein Besinnen auf ein naturgegebenes Zeitmaß und, damit verbunden, auf den Wert der Zeit.

Weitere Hinweise zum Thema Sonnenuhren

Koordinatensysteme der Sphärischen Astronomie

Die Gestirne werden aus dem Beobachtungsort auf die Innenseite einer Kugelfläche mit unvorstellbar großem Radius, die Sphäre, projiziert. Weil es so nur auf die Richtungen zu den Gestirnen hin ankommt, kann die große Sphäre zu einer konzentrischen „Richtungskugel“ verkleinert werden, auf der die Örter der Gestirne anschaulich dargestellt werden können. Berechnungen werden verschiedene sphärische Koordinatensysteme zu Grunde gelegt. Sie entsprechen dem System der geographischen Koordinaten auf der Erdkugel.

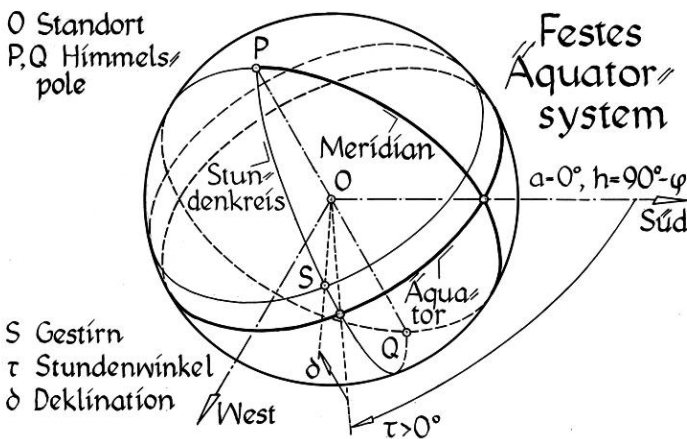


Das Horizontsystem

Die waagrechte Ebene durch den Beobachtungsort schneidet die Sphäre nach dem mathematischen Horizont, die Richtungskugel nach dessen Bild. Lotrecht über dem Beobachter befindet sich der Zenit, sein Gegenpunkt auf der Sphäre heißt Nadir. Alle Gestirne scheinen sich um die Verbindungsgerade der beiden Himmelspole, die Himmelsachse, zu drehen. Sie ist parallel zur Erdachse. Der halbe Großkreis der Sphäre durch den Zenit und die beiden Himmelspole heißt der Meridian des Beobachtungsortes. Er liegt in einer lotrechten, von Süden nach

Norden gerichteten Ebene. (In manchen Büchern wird der volle Großkreis als Meridian bezeichnet.)

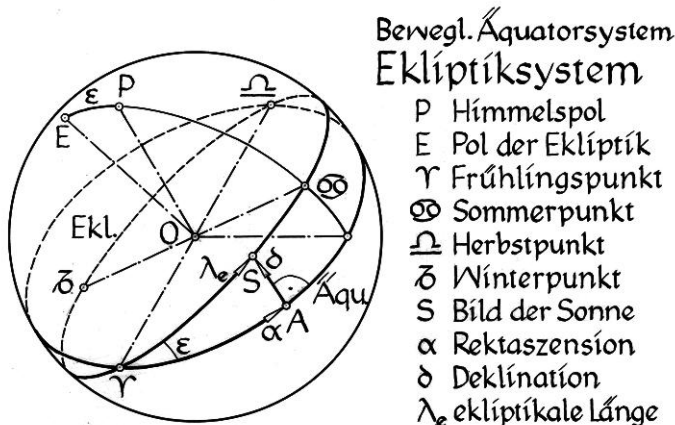
Vom Südpunkt des Horizonts weg wird das Azimut a gemessen, nach Westen positiv, nach Osten negativ. (Aus Australien erfahre ich, dass dort das Azimut vom Nordpunkt des Horizonts weg gemessen wird, am Vormittag negativ, am Nachmittag positiv. Auf der südlichen Hemisphäre der Erde steht die Sonne zu Mittag im Norden und scheint sich entgegen dem Uhrzeiger zu bewegen.) Das Horizontsystem ist auf der nördlichen Halbkugel der Erde ein Linkssystem. Die Höhe h , auch Elevation genannt, wird oberhalb des Horizonts positiv, unterhalb negativ gemessen.



Das feste Äquatorsystem

Das feste Äquatorsystem

Die Bezugskreise sind der Himmelsäquator und der Meridian des Beobachtungsortes. Die Koordinaten sind der Stundenwinkel τ (tau), vom Meridian nach Westen positiv gemessen, und die Deklination δ (delta), zum Himmelsnordpol hin positiv, zum Himmels-südpol hin negativ gemessen. Das System ist auf der nördlichen Halbkugel ein Linkssystem.



Bewegl. Äquatorsystem Ekliptiksystem

- P Himmelspol
- E Pol der Ekliptik
- γ Frühlingspunkt
- ω Sommerpunkt
- $\bar{\omega}$ Herbstpunkt
- δ Winterpunkt
- S Bild der Sonne
- α Rektaszension
- δ Deklination
- λ_e ekliptikale Länge

Das bewegliche Äquatorsystem

Die Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Himmelsäquator heißen der Frühlings- und der Herbstpunkt. An diesen Stellen der Sphäre befindet sich die Sonne während ihres scheinbaren Jahresumlaufs um die Erde zu den Tagundnachtgleichen. Das „bewegliche“ Äquatorsystem macht die scheinbare tägliche Drehung der Gestirne um die Erde mit. Die erste Koordinate wird vom Frühlingspunkt entlang des Himmelsäquators gegenläufig zu den Stundenwinkeln gemessen. Sie heißt die Rektaszension α (alpha). Die zweite Koordinate ist wieder die Deklination δ . Das System ist ein Rechtssystem.

Die zweite Koordinate ist wieder die Deklination δ . Das System ist ein Rechtssystem.

Das System der Ekliptik

Bezugskreis ist die Ekliptik. Die erste Koordinate, die ekliptikale Länge λ_e , wird vom Frühlingspunkt im gleichen Sinn wie die Rektaszension gemessen. Die zweite Koordinate, die ekliptikale Breite φ_e , wird zu den Polen der Ekliptik hin gemessen. Auch dieses System ist ein Rechtssystem.

Umwandlungen

Für die Arbeit an Sonnenuhren sind Umwandlungen nützlich, die auf Formeln der Sphärischen Trigonometrie beruhen. Hier werden bloß zwei Aufgaben vorgestellt.

Bei einer Umwandlung vom festen Äquatorsystem ins Horizontsystem wird vom Pol-Zenit-Gestirndreieck ausgegangen. Der Innenwinkel beim Pol ist der Stundenwinkel τ , der Außenwinkel beim Zenit das Azimut a ; die „Seiten“ des Dreiecks sind die Komplementärwinkel zur Höhe h , zur Deklination δ und zur geographischen Breite φ .

$$(1a) \quad \sin h = \sin \varphi \times \sin \delta + \cos \varphi \times \cos \delta \times \cos \tau$$

$$(1b) \quad \cos a = (\sin \varphi \times \sin h - \sin \delta) / \cos \varphi / \cos h; \text{ die Vorzeichen von } a \text{ und } \tau \text{ müssen gleich sein.}$$

Ein zweites Beispiel hilft die Deklinationen der Tage bestimmen, an denen die Sonne in ein neues Zeichen des Tierkreises tritt. Mit ε (epsilon) wird die „Schiefe der Ekliptik“ bezeichnet, der Winkel zwischen den Ebenen der Ekliptik und des Himmelsäquators. Er beträgt derzeit $23,44^\circ$. Die Erdachse ist gegen die Ebene der Ekliptik unter $(90^\circ - \varepsilon)$ geneigt. Es gilt:

$$(2) \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \times \sin \lambda_e; \lambda_e = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots$$

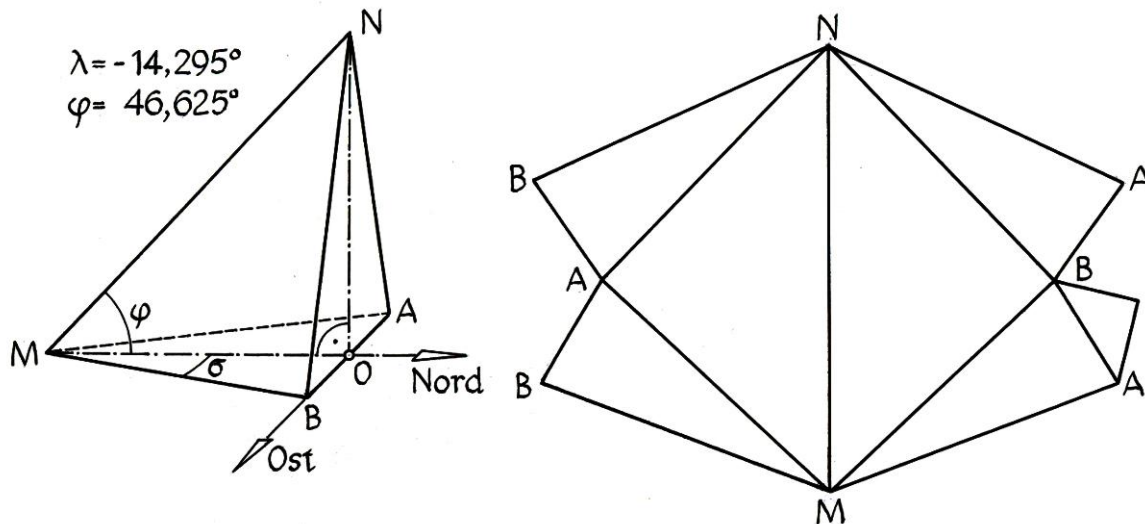
$$\text{Zeitgleichung} = \text{Wahre minus Mittlere Ortszeit, Zgl} = \text{WOZ} - \text{MOZ}$$

$$\text{Mittleuropäische Zeit MEZ} = \text{MOZ} + (15^\circ - \lambda) \times 4\text{min}/^\circ, \quad \text{Sommerzeit MESZ} = \text{MEZ} + 1 \text{ h}$$

$$\text{MEZ} = \text{WOZ} + (15^\circ - \lambda) \times 4\text{min}/^\circ - \text{Zgl}, \quad \text{WOZ} = \text{MEZ} - (15^\circ - \lambda) \times 4\text{min}/^\circ + \text{Zgl}$$

Eine Horizontaluhr als Aufgabe für den Unterricht

Geübt werden soll genaues Zeichnen und Arbeiten. Das Zifferblatt wird auf ein A4-Blatt gezeichnet. Der „Zeiger“ wird aus Karton als eine dreiseitige Pyramide angefertigt. Er kann aber auch in der Form eines rechteckigen Dreiecks aus einem Brettchen gesägt werden. Die Schatten werden dann am Vormittag von der einen, am Nachmittag von der anderen schrägen Kante des Brettchens geworfen. Es folgt ein Vorschlag für eine „Zeigerpyramide“, die entsprechend der geographischen Breite des Standorts zu bemaßen ist. Die Maße können den Schülerinnen und Schülern mitgeteilt werden.



$$\text{NO} = d \text{ („Gnomonhöhe“, } d = 65 \text{ mm)}$$

$$\text{MO} = d / \tan \varphi \text{ (Kärnten } 46,5^\circ < \varphi < 47^\circ)$$

$$\text{OA} = \text{OB} = \text{MO} \times \tan 10^\circ$$

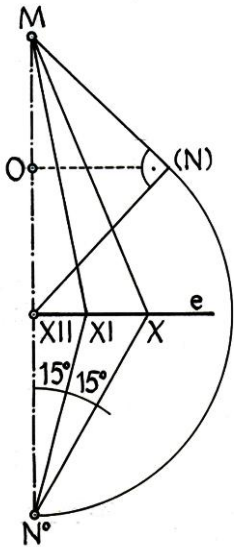
$$\text{MA} = \text{MB} = \text{MO} / \cos 10^\circ$$

$$\text{NA} = \text{NB} = \sqrt{\text{NO}^2 + \text{OA}^2}$$

Der Umriss einer „Zeigerplatte“ (Brettchen) wäre das rechtwinklige Dreieck MNO.

Wegen der langen Schatten im Winter wird das Zifferblatt auf das A4-Blatt im Hochformat gezeichnet. Begonnen wird mit einem Rahmen von 1 cm Breite. Dann wird für eine Zeigerpyramide als Mittagslinie die Symmetrieachse der schmälere Rechteckseite gezeichnet. Als Schnittpunkt der Stundenlinien wird der Punkt M 250 mm von der unteren Rahmenlinie angenommen.

Wird eine Zeigerplatte (das Brettchen) verwendet, dann gibt es zwei Mittagslinien, eine, mit der die Anzeige am Vormittag endet, und eine, mit der sie am Nachmittag beginnt. Zum Wahren Mittag fällt



der Schatten der Zeigerplatte genau in die "noon gap", wie die Engländer den Zwischenraum nennen.

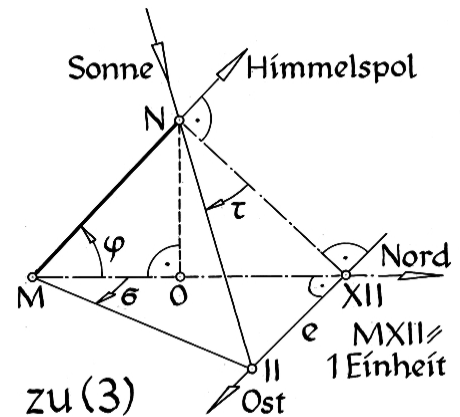
Für die zeichnerische Ermittlung der Stundenlinien kann eine Normalebene zur Kante MN der Pyramide durch N gelegt werden. Sie ist parallel zur Ebene des Himmelsäquators. Entlang der Schnittgeraden e dieser Ebene mit der Ebene des Zifferblattes bewegt sich der Schatten von N an den Tagen der Tagundnachtgleichen, e heißt Äquinoktiallinie. Um e wird die Normalebene durch MN in die Ebene des Zifferblattes gedreht, N gelangt nach N°. Das geschieht mit Hilfe eines Risses auf die lotrechte Ebene durch MN. Durch N° werden, von der Mittagslinie weg beginnend, von 15° zu 15° die Stundenlinien einer Äquatorialuhr gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Linien mit e werden mit M verbunden. Diese Verbindungsgeraden sind die Stundenlinien der Horizontaluhr.

Die Stundenlinien schließen mit der Mittagslinie die Winkel σ ein. Sie können auch durch Rechnung ermittelt werden, wenn im Unterricht die Taschenrechnertasten für

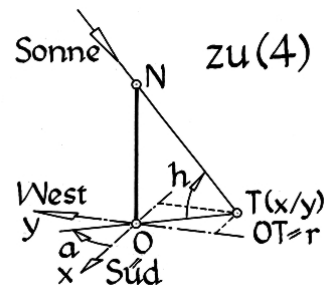
die Winkelfunktionen erklärt wurden. („Rechenbefehle im Hinblick auf ähnliche Dreiecke werden ausgeführt.“ Die Zahlen können auch ohne nähere Erklärung vorgegeben werden.)

$$(3) \quad \tan \sigma = \sin \varphi \times \tan \tau \quad (\tau = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \dots)$$

Die Sonnenuhr kann für die Wahre Zeit des Zonenmeridians eingerichtet werden, sodass bei einem Vergleich mit einer Armbanduhr nur die Zeitgleichung zu berücksichtigen ist. Dann ist in der Zeitzone der Mitteleuropäischen Zeit in Gleichung (3) statt τ als Stundenwinkel $\tau_z = \tau + (15^\circ - \lambda)$ einzusetzen. Während der Periode der Sommerzeit ist zu jeder Stundenzahl eine Stunde zu addieren.



Die Stundenlinien schneiden die untere Rahmenlinie in Entfernungen $x = 250 \times \tan \sigma$ mm links und rechts von der Mittagslinie, die linke und die rechte Rahmenlinie $y = 95 / \tan \sigma$ mm unterhalb der Stundenlinie VI-VI durch M. (Die 95 mm sind im Fall einer "noon gap" zu ändern, die durch die Breite einer Platte mit zwei Zeigerkanten entstehen kann.)



Sollen nun auch noch zusätzlich zur Äquinoktiallinie weitere Datumslinien in das Zifferblatt eingetragen werden, so wird der Mittelpunkt einer Richtungskugel im Anzeigepunkt N angenommen. Die Kugel berühre das Zifferblatt in O. Nach der Formel (2) der letzten Seite werden die gewünschten Deklinationen berechnet, mit (1a) und (1b) zu den Paaren (τ / δ) die Paare (a / h) . Mit dem Punkt O als Ursprung, positiven x-Koordinaten nach Süden und positiven y-Koordinaten nach Westen gilt für die Schatten T von N:

$$(4) \quad r = NO / \tan h, \quad x = -r \times \cos a, \quad y = -r \times \sin a$$

Ebene Zifferblätter in anderen Lagen

Die Lage ebener, nicht waagrecht Zifferblätter wird durch Azimut und Höhe einer Normalen zum Zifferblatt festgelegt, die von diesem weg weist, durch die „Deviation“ (Südabweichung) s und den Komplementärwinkel t zur „Inklination“ (Neigung). Beim Berechnen dieser Zifferblätter kann ein sphärisches Dreieck verwendet werden, das dem Pol-Zenit-Gestirn-Dreieck entspricht.

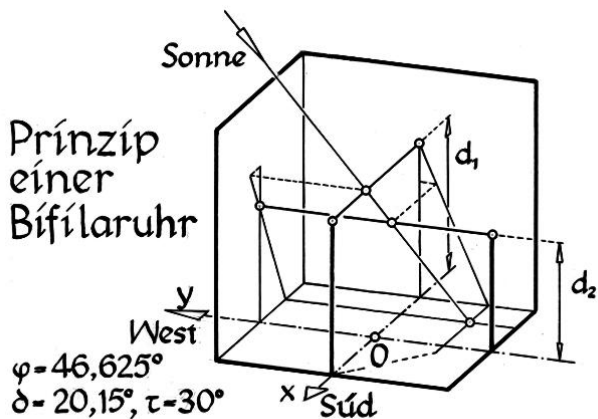
An die Stelle des Poles tritt nun auf einer Richtungskugel der Gegenpunkt P zum Berührungspunkt O der Kugel mit der Ebene des Zifferblattes, Zenit Z und Gestirnsort S bleiben unverändert. Der Winkel bei P sei ρ (rho), die „Seite“ PS κ (kappa). Der Winkel bei Z ist $a - s$, die „Seite“ ZP $= 90^\circ - t$, die „Seite“ ZS $90^\circ - h$. Im Zifferblatt wird als x-Achse die Waagrechte durch O, als y-Achse die Fallgerade durch O gewählt. Zunächst wird nach (1a) und (1b) zum Paar (τ / δ) das Paar (a / h) ermittelt. Dann:

$$(5a) \quad \cos \kappa = \sin h \times \sin t + \cos h \times \cos t \times \cos (a-s)$$

$$(5b) \quad \cos \rho = (\sin h - \cos \kappa \times \sin t) / \sin \kappa / \cos t; \text{ die Vorzeichen von } a-s \text{ und } \rho \text{ müssen gleich sein.}$$

$$(6) \quad r = NO \times \tan \kappa, \quad x = r \times \sin \rho, \quad y = r \times \cos \rho$$

Für $t = 0^\circ$ sind das die Formeln für vertikale Zifferblätter.



Bifilaruhren

Im einfachsten Fall sind über einem waagrecht Zifferblatt in verschiedenen Richtungen zwei waagrecht Fäden gespannt, der eine in Nord-Süd-, der andere in Ost-West-Richtung. An den Schnittpunkten der Schatten werden Stunde und Datum angezeigt. Die Koordinaten der Schnittpunkte ergeben sich aus den Formeln (4), wenn die Abstände d_1 , d_2 der Fäden vom Zifferblatt an die Stelle von NO gesetzt werden.

Analematische Uhren

Die einfachste „analematische“ Uhr besteht aus einem Zifferblatt in einer waagrecht Ebene

und einem lotrechten Zeiger, der dem Datum entsprechend auf eine Nordsüdlinie des Zifferblattes gestellt wird. Der Schatten zeigt dann zu Stundenpunkten, die auf einer Ellipse angeordnet sind.

Die Hauptachse der Ellipse befindet sich auf einer Ost-West-Geraden und habe die Länge $2a$. Die Nebenachse liege auf der Nord-Süd-Geraden, auf die der Zeiger gestellt wird, und habe die Länge $2b = 2a \times \sin \varphi$, wobei wieder φ die geographische Breite des Standortes ist. Mit τ als Stundenwinkel, der x-Achse in Nord-Süd- und der y-Achse in Ost-West-Richtung werden die Stundenpunkte gezeichnet:

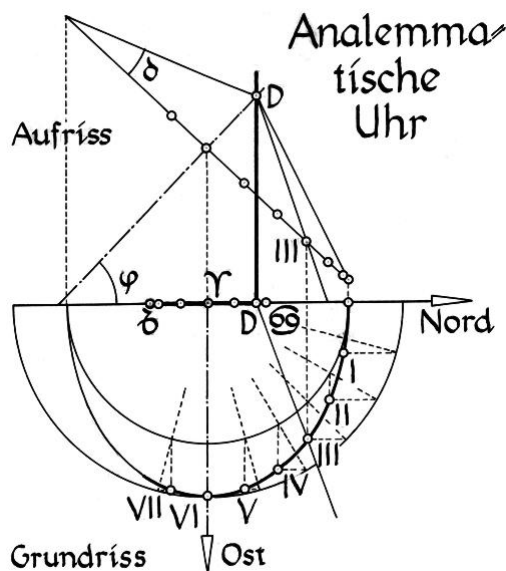
$$(7) \quad x = b \times \sin \tau, \quad y = a \times \cos \tau$$

Jedem Datum entspricht eine Deklination δ der Sonne. Die Entfernungen der Datumspunkte zum Stellen des Zeigers sind, vom Mittelpunkt der Ellipse weg gemessen:

$$(8) \quad x = a \times \tan \delta \times \cos \varphi$$

Die Sonnenstrahlen, die den Zeiger treffen, treffen auch die gedachten lotrechten Linien durch die Stundenpunkte. Daher gehen die Schatten des Zeigers durch die Stundenpunkte.

Es gibt große analematische Sonnenuhren, an denen sich ein Mensch auf die jeweilige Datumsmarke stellen kann. Sein Schatten weist dann zur geltenden Stundenmarke.



Zum Nachlesen

- Hans Kern, Josef Rung: Sphärische Trigonometrie. Für Gymnasien. Bayerischer Schulbuchverlag. (ISBN 978-3-7627-3534-2; vergriffen)
- Rudolf Hame: Sphärische Trigonometrie. Grundlagen, Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel. Oldenbourg Schulbuchverlag. (ISBN 978 3-637-03256-9, € 24,70)
- James Evans: The History and Practice of Ancient Astronomy. Oxford University Press 1998. (ISBN 978-0-19-509539-5, € 85,-)
- Karl Schwarzinger: Katalog der ortsfesten Sonnenuhren Österreichs; 3. Auflage 2006, mit CD-Rom. Österreichischer Astronomischer Verein. Bestellung siehe unten.

Homepages

- Arbeitsgruppe Sonnenuhren www.gnomonica.at
- Helmut Sonderegger <http://www.helson.at>
- British Sundial Society <http://www.sundialsoc.org.uk> ...

(Software für Sonnenuhreberechnungen)
 How can we help you?
 How do sundials work? (Tony Moss)

Veröffentlichungen des Österreichischen Astronomischen Vereins:

Karl Schwarzingger, Katalog der ortsfesten Sonnenuhren Österreichs; 3. Auflage 2006, mit CD-Rom. Bestellen durch Einzahlen von € 15,- auf das Konto „Astro-Verein Katalog Sonnenuhren“, Kto.Nr. 0300-002771 bei der Sparkasse Feldkirch, BLZ 20604; IBAN AT55 2060 4003 0000 2771, BIC SPFKAT2B: In dem Betrag sind die Versandkosten inkludiert, bitte um genaue Angabe von Name und Anschrift!

Arbeitsgruppe Sonnenuhren im Österreichischen Astronomischen Verein

Mitgliedsbeitrag pro Jahr derzeit € 25,-; jährlich zwei „Rundschreiben“ (unsere Zeitschrift), eine Tagung im Herbst.

Kontakt: Walter Hofmann, Favoritenstraße 108/6, 1100 Wien; E-Mail: wf.hofmann@aon.at

Eine Anmerkung des Verfassers

Zehn Jahre sind seit der freundlichen Einladung an mich vergangen, einen Beitrag zu den Seminaren der Kärntner Arbeitsgemeinschaft für Geometrie zu leisten. Ich danke der früheren Leiterin der Arbeitsgemeinschaft, Frau OStR. Mag. Helgrid Müller, für die Möglichkeit, mein Seminarpapier von damals zu aktualisieren. Nur an wenigen Stellen habe ich geändert. Erst in letzter Zeit habe ich erfahren, dass geographische Längen nach Osten positiv, nach Westen negativ gezählt werden. Das war unbedingt richtig zu stellen, ursprünglich hatte ich es anders angegeben.

Viele schöne Sonnenuhren schmücken Kärntner Häuser. Auf der Villacher Alpe wurde 2016 nahe des letzten Parkplatzes des Villacher Alpenstraße die Beobachtungstation „Sonnenwege“ errichtet, in der mit Steinsetzungen die Richtungen zu den Aufgängen und Untergängen der Sonne zu den Sonnenwenden und Tagundnachtgleichen angezeigt und mit vier Sonnenuhren Möglichkeiten der Zeitmessung vorgestellt werden. Wenn Sie nicht ohnehin schon dort waren, die Anlage wäre ein Grund mehr für einen Ausflug auf diesen Berg mit seinen Aussichtspunkten, einem Alpengarten und einem Geologie-Lehrpfad.

Wien, im August 2020

Walter Hofmann



„Sonnenwege“ auf der Villacher Alpe

Auftraggeber: Großglockner Hochalpenstraßen AG

Initiator: Dr. Georg Kandutsch, 9543 Arriach

Planung und Bauaufsicht: Ing. Adi Prattes, 9640 Kötschach; Koreferent beim Seminar im März 2010