ISBN 978 87 7066 827 9

Sætning 1: Regneregler for addition - Bevis

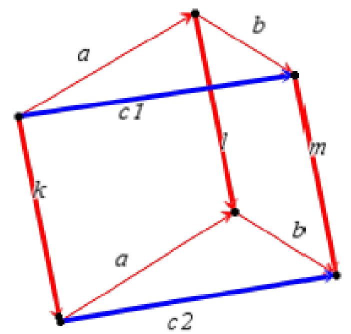
Sætning 1: Regneregler for addition

For alle vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ gælder:

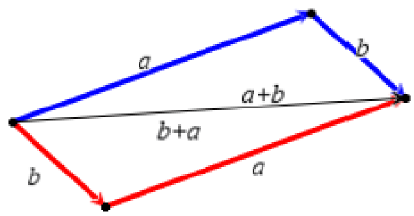
1. Vektoradditionen $\vec{a}+\vec{b}$ er uafhængig af hvilke repræsentanter vi vælger for vektorerne. Vi siger, at addition er *veldefineret*.
2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ Vi siger, at den *kommutative* lov gælder for vektoraddition
3. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ Vi siger, at den *associative* lov gælder for vektoraddition

Bevis:

1. Tegn selv på samme papir to forskellige versioner af den geometriske addition $\vec{a}+\vec{b}$. Vi skal vise, at de to pile, c_1 og c_2, der i de to tegninger går fra vektor $\vec{a}$'s startpunkt til vektor $\vec{b}$'s slutpunkt, repræsenterer samme vektor. Tegn nu de tre linjer, *k*, *l* og *m* der forbinder henholdsvis de to $\vec{a}$ -piles startpunkter, de to $\vec{a}$ -piles slutpunkter, og de to $\vec{b}$ -piles slutpunkter. Vi ved fra den klassiske geometri, at en firkant, hvor to modstående sider er parallelle og lige lange er et parallelogram.
Se nu til sidst på firkanten dannet af *k, l* samt c_1 og c_2. Her ved vi, at *k* og *l* er lige lange og parallelle. Det samme gælder derfor for c_1 og c_2 - altså de repræsenterer samme vektor!



2. De to vektorer bestemmer et parallelogram, hvor modstående sider er parallelle, dvs. har samme retning, og har samme længde. Da vektorer kan afsættes hvor som helst, repræsenterer de modstående sider samme to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Diagonalen i parallelogrammet kan derfor fremkomme både som $\vec{a}+\vec{b}$ og som $\vec{b}+\vec{a}$, så de to repræsenterer samme vektor.



3. Afsæt de tre vektorer i forlængelse af hinanden, og kald startpunktet *A*, de to forbindelsespunkter *B* og *C* og slutpunktet *D*. Så er $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ og $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$. Vi udregner venstre side i formlen:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$ Vi udnytter definitionen på vektoraddition

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AC}$$ Vi udnytter igen definitionen på vektoraddition

Udregn på samme måde højre side og se, at det giver det samme.