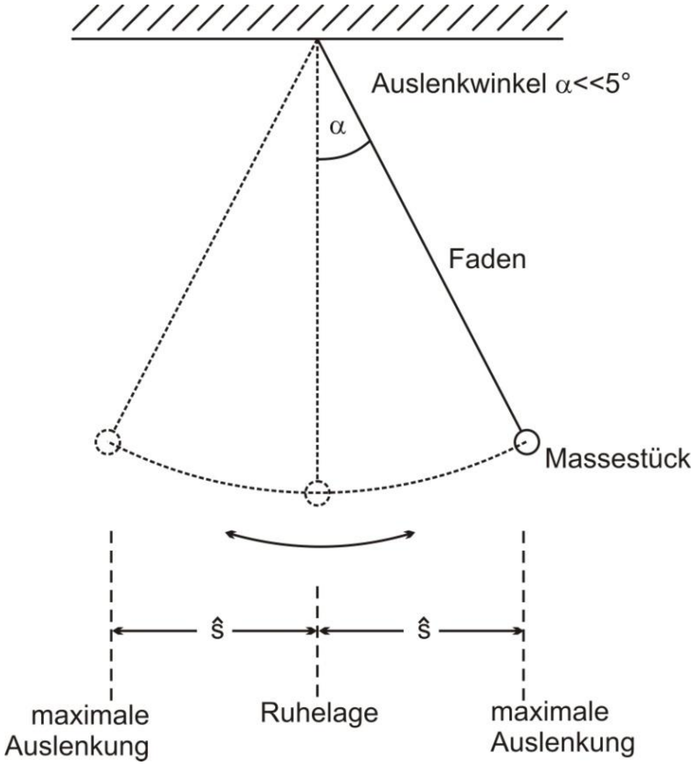
5.1.5 Schwingungsdauer eines Fadenpendels

Ein Fadenpendel besteht aus einem sehr dünnen Faden mit zu vernachlässigender Masse an dem ein Gewicht mit der Masse m angehängt wurde. Lenkt man die Masse m um die Strecke $\hat{s}$ (Amplitude) aus und lässt das Gewicht dann los, so führt es, wenn man von Reibungsverlusten absieht, eine freie ungedämpfte Schwingung aus. Um nachfolgende Rechnungen zu vereinfachen, gehen wir von sehr kleinen Auslenkungen des Pendels aus (α<<5°; Hinweis: Die Winkel in der Zeichnung sind aus Gründen der Übersichtlichkeit vergrößert dargestellt).



Die Auslenkung des Fadenpendels zu einem beliebigen Zeitpunkt t kann analog zum Federpendel mit einer Sinusfunktion beschrieben werden:

$$s(t) = \hat{s} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Auch Geschwindigkeit und Beschleunigung unterscheiden sich nicht von der des Federpendels:

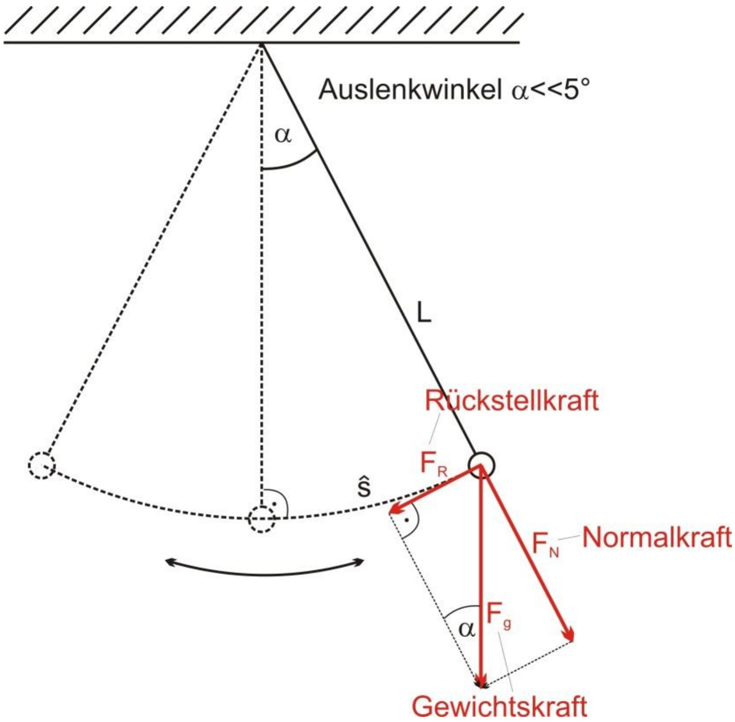
$$v(t) = \hat{v} \cdot cos(\omega \cdot t) = \hat{s} \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t)$$

$$a(t) = -\hat{a} \cdot sin(\omega \cdot t) = -\hat{s} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Genau wie beim Federpendel soll auch jetzt die <u>Schwingungsdauer T</u> berechnet werden. Lenkt man das Fadenpendel um die Strecke $\hat{s}$ aus, so wirkt auf das Massestück die Gewichtskraft F_g. Diese wird im Kräfteparallelogramm in zwei Teilkräfte aufgeteilt, die Normalkraft und die Rückstellkraft (siehe Zeichnung). Die Normalkraft ist diejenige Kraft mit der gewissermaßen am Faden des Pendels gezogen wird. Da der Faden stabil genug ist um diese Kraft zu kompensieren, spielt sie für die folgende Überlegung keine weitere Rolle mehr. Senkrecht zur Normalkraft wirkt die sog. Rückstellkraft. Diese sorgt dafür, dass sich das Massestück, wenn es losgelassen wird in Richtung

Ruhelage bewegt und das Pendel anfängt zu schwingen. Die für die Beschleunigung des Pendels verantwortliche Kraft wird deshalb von der Rückstellkraft geliefert:

$$F_{Beschl.} = F_R$$



Die für die Formel benötigte Rückstellkraft kann mit Hilfe des Sinus aus der bekannten Gewichtskraft berechnet werden:

$$sin(\alpha) = \frac{F_R}{F_g}$$

$$\Leftrightarrow F_R = F_g \cdot sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow F_R = m \cdot g \cdot sin(\alpha)$$

Da der Auslenkwinkel schlecht gemessen werden kann, muss $sin(\alpha)$ durch andere leichter bestimmbare Größen ersetzt werden. Nimmt man an dieser Stelle an, dass der Auslenkwinkel wirklich sehr klein ist, so kann in erster Näherung von einer geradlinigen Auslenkung ausgegangen werden. Die Auslenkung $s(t)$ ist deshalb die Gegenkathete und die Fadenlänge L die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck:

$$sin(\alpha) = \frac{s(t)}{L}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Formel für die Rückstellkraft ein, so erhält man:

$$F_R = m \cdot g \cdot \frac{s(t)}{L}$$

Die Schwingungsdauer kann nun analog zur Herleitung der Schwingungsdauer des Federpendels berechnet werden:

$$F_{Beschl.} = F_R$$

$$\Leftrightarrow -m \cdot a(t) = m \cdot g \cdot \frac{s(t)}{L}$$

$$\Leftrightarrow -m \cdot \left(-\hat{s} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t)\right) = \frac{g}{L} \cdot m \cdot \hat{s} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \hat{s} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t) = \frac{g}{L} \cdot m \cdot \hat{s} \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Die Schwingungsdauer des Fadenpendels ist somit nur abhängig von der Länge des Pendels und nicht von der angehängten Masse m.
